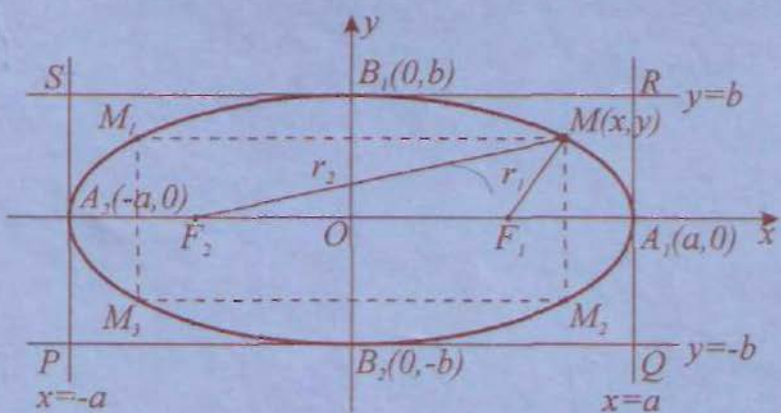
Vasilie Onoi

# ALGEBRĂ LINIARĂ
# și
# GEOMETRIE ANALITICĂ



CZU 512.64 + 514.12 (075.8)
0-57

V a s i l e O n o i. ALGEBRĂ LINIARĂ ŞI GEOMETRIE ANALITICĂ.
- Ch.: Evrica, 2000, - 544 p.

Lucrarea cuprinde elemente de algebră liniară şi geometrie analitică care au aplicaţie la cercetările proceselor economice. Conform programelor analitice, unele dintre subiectele tratate se studiază facultativ. Pentru acest motiv, scopul cărţii este de a contribui la însuşirea de sine stătător de către studenţi a materiei expuse. Noţiunile de bază sunt ilustrate prin diverse exemple şi exerciţii rezolvate, iar la sfârşitul fiecărui capitol sunt propuse o serie de exerciţii pentru a fi rezolvate independent.

Cartea este destinată studenţilor facultăţilor economice ale instituţiilor de învăţământ superior, dar poate fi folosită şi la alte instituţii de învăţământ.

M - 208 - 96
ISBN 9975 - 941 - 72 - 9

©Editura «Evrica», 2000
©Vasile Onoi, 2000.

ACADEMIA DE TRANSPORTURI,
INFORMATICĂ ȘI COMUNICAȚII

*Vasile Onoi*

# ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

**CHIȘINĂU * EVRICA * 2001**

# Prefață

în prezent, metodele matematice de cercetare se aplică pe larg în diverse domenii ale activității umane. Acest fapt înaintează cerințe deosebite față de pregătirea matematică a specialiștilor, în particular a celor din economie. Practica aplicării matematicii în cercetările economice demonstrează că în calculul economic rolul fundamental îl joacă algebra, în special algebra matriceală, deoarece calculul matriceal este un instrument des folosit actualmente în tehnica de calcul moderna. Din punct de vedere matematic, problemele economice, de regulă, conduc la sisteme de ecuații și inecuații liniare, matrice și spații liniare. Teoriile acestor obiecte sunt strâns legate între ele. De studiul lor se ocupă o ramură a matematicii - algebra liniară, problemele căreia sunt foarte actuale pentru economistul contemporan.

Prezenta lucrare este structurată în două părți, ce constau, respectiv, din nouă și opt capitole, care cuprind parțial materia cursului "Matematică superioară" ce se predă la facultățile economice ale instituțiilor de învățământ superior. Partea I este consacrată algebrei liniare, iar partea a II-a - geometriei analitice și algebrei liniare din cadrul cursului teoretic unificat de Matematică superioară.

Pentru ca expunerea acestui studiu să fie sugestivă, se prezintă un număr mare de exemple ce ilustrează noțiunile și teoremele de bază. Din aceste considerente, este o lucrare didactică și poate fi studiată de sine stătător. Lucrarea este scrisă în baza mai multor studii (indicate în bibliografie), din care au fost preluate o serie de noțiuni, teoreme, interpretări geometrice, precum și unele expresii.

Primul capitol este introductiv, cuprinzând noțiuni recapitulative ce se referă la lucrare; acesta poate fi omis la o primă citire.

In capitolul al doilea se expune metoda eliminării complete (metoda Jordan-Gauss) de rezolvare efectivă a unui sistem de ecuații liniare al-

gebrice, metodă, ce stă la baza algoritmului, numit al *metodei simplex,* care este unul dintre cele mai comode la folosirea tehnicii electronice de calcul.

Expunerea algebrei vectoriale începe cu vectorii aritmetici n-dimensionali, care au o larga aplicație în economie. Studiului acestor vectori îi este consacrat un capitol aparte (cap. 3).

Determinantul de ordinul $n$ se introduce inductiv, exprimându-l prin determinanți de ordinul $n - 1$.

In partea, a II-a se expun elemente de algebră vectorială, și de geometrie analitică în plan și în spațiu. Produsul vectorial și *cel* mixt al vectorilor nu se introduc, deoarece acestea, după cât se pare, practic nu au aplicație în economie. Geometria analitică se expune pe baza algebrei vectoriale. Se examinează mulțimi convexe de puncte în spațiul $n$-dimensional Rn și se rezolva sisteme de inecuații liniare prin metoda grafică. Două capitole (cap. 16 și 17) sunt consacrate studierii spațiilor liniare (peste câmpul numerelor reale) și respectiv a operatorilor liniari - noțiuni ce reprezintă obiectul principal de studiu al algebrei liniare.

Pentru comoditate, s-a convenit ca începutul și sfârșitul demonstrației unei teoreme sau afirmații să fie însemnate, respectiv, prin semnele ▷ și ◁.

*Autorul*

# PARTEA I

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

## CAPITOLUL 1

## Mulțimi și aplicații (funcții)

### 1.1. Noțiunea de mulțime

#### 1.1.1. Mulțime, submulțime. Notații

Noțiunile "mulțime" și "element al unei mulțimi" sunt unele dintre noțiunile fundamentale, primare ale matematicii, care nu pot fi definite strict, ci se explică prin exemple. Descriptiv termenul "mulțime[1]" se explică ca totalitate de obiecte, colecție, unire a unor obiecte (numite *elementele mulțimii)* de natură oarecare, bine determinate. De exemplu, se poate vorbi despre mulțimea tuturor studenților dintr-o aulă, despre mulțimea punctelor unui segment de dreaptă etc. Vom nota mulțimile cu majuscule: *A,B, X,...*, iar elementele lor - cu minuscule: *a,b,x,...* Astfel, cu literele aldine **N,Z,Q,R** se notează, respectiv, mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor întregi, mulțimea

[1] Uneori mulțimea e numită: *sistem, ansamblu, complex, familie, clasă, spațiu,* aceste expresii fiind, în principiu, echivalente și se folosesc pentru a evita monotonia limbajului sau eventuale confuzii.

numerelor raționale și mulțimea numerelor reale. 0 oarecare mulțime $X$ se consideră definită (determinată) dacă este cunoscut pe deplin din care elemente este alcătuită. Dacă mulțimea are un număr finit de elemente, se zice că ea este *finită;* în caz contrar, mulțimea se numește *infinită.*

Există două moduri de a defini o mulțime.

1) Prin *scrierea nemijlocită* (sau *numirea individuală)* a tuturor elementelor mulțimii:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Exemplul *1.* $X = \{1,2,5,10\}$ - mulțimea tuturor divizorilor numărului 10.

Exemplul 2. $N = \{0,1,2,\ldots, n,\ldots\}$ - mulțimea tuturor numerelor naturale.

In particular, o mulțime poate să fie compusă numai dintr-un singur element: $X = \{x_1\}$.

2) Prin *specificarea unei proprietăți (proprietatea caracteristică)* pe care o au elementele mulțimii și nu le au alte elemente. Aceasta proprietate separă elementele unei mulțimi $A$ între elementele altei mulțimi mai largi sau de bază. Mulțimea $A$ de elemente $x$ ce posedă o anumită proprietate $P(x)$, simbolic, se scrie sub forma $A = \{x \mid P(x)\}$.

Exemplul 3. Dacă considerăm cunoscută mulțimea N a numerelor naturale, atunci $A = \{x \mid x = 2n,\ n = 0,1,2,\ldots\}$ înseamnă că mulțimea $A$ constă din numerele naturale pare: 0, 2,4,6,...

Exemplul 4. $X = \{x \mid -1 < x < 1\}$ este mulțimea numerelor reale cuprinse între -1 și 1.

Despre o mulțime definită după primul mod se zice că este dată *sintetic,* iar despre cea definită prin al doilea mod se zice că este dată *analitic.*

Vom utiliza simbolurile $a \in A$, $b \notin A$, care înseamnă, respectiv, că elementul $a$ aparține mulțimii A, iar elementul $b$ nu aparține lui $A$.

Uneori va fi comod de a considera așa-numita *mulțimea vidă* $\varnothing$, adică mulțimea care nu conține nici un element.

Exemplul 5. Mulțimea punctelor de intersecție a două drepte paralele este mulțimea vidă $\varnothing$.

**Definiția 1.** Se spune că o mulțime $A$ este *inclusă* în mulțimea $B$ și scriem $A \subset B$ daca fiecare element al mulțimii $A$ este și element al mulțimii B. In acest caz se mai spune că $A$ este o *submulțime* (sau o *parte)* a mulțimii $B$.

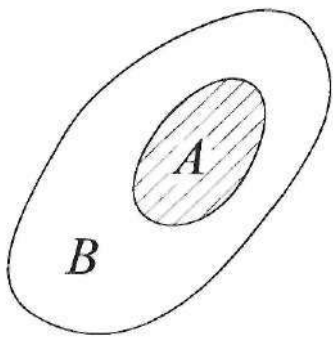



Fig. 1.1

Exemplul 6. Dacă $B = \{1,2,3,4,5\}$, atunci $A = \{1,2,4\}$ este submulțime a lui $B$ și scriem $A \subset B$.

Dacă mulțimile se reprezintă prin "figuri logice", atunci relației $A \subset B$ îi corespunde figura 1.1. Se consideră că $\varnothing$ este submulțime a oricărei mulțimi $A$, adică $\varnothing \subset A$; în afară de aceasta, din numărul submulțimilor fiecărei mulțimi face parte și însăși această mulțime, adică $A \subset A$. $A$ și $\varnothing$ se numesc *submulțimi improprii* ale mulțimii $A$. Toate celelalte submulțimi ale mulțimii $A$ se numesc *submulțimi proprii* ale lui $A$. Simbolurile $\in$, $\subset$ se numesc, respectiv, semnul de *apartenență* și de *incluziune*.

**Definiția 2.** Două mulțimi $A$ și $B$ se numesc *egale* și se scrie $A = B$ dacă orice element al lui $A$ aparține lui $B$ și reciproc, adică dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

### 1.1.2. Simboluri logice

Vom întrebuința de asemenea simbolurile logice: $\forall$, numit *cuantificatorul universal,* care se folosește în locul cuvintelor "pentru orice", "oricare ar fi", și $\exists$ - *cuantificatorul existențial* în locul cuvintelor "există" sau "există un așa". De exemplu, $\forall x \geq 0$ se citește: "pentru

orice valoare nenegativa a lui $x$ "; expresia $\exists n \in \mathrm{N}$ înseamnă: "există un așa număr $n$ în mulțimea numerelor naturale".

**Exemplul 1.** Din cursul preuniversitar sunt cunoscute noțiunile de funcție pară și impară. Funcția $f$ se numește pară dacă pentru orice $x \in \mathcal{X} \subset \mathrm{R}$ are loc egalitatea $f(-x) = f(x)$, unde $X$ - domeniul de definiție al funcției. Folosind cuantificatorul universal, definiția funcției pare se poate scrie astfel:

$$(\forall x \in \mathcal{X} \subset \mathbf{R})\colon \boldsymbol{f(-x) = f(x).}$$

In aceasta formula, precum și în toate următoarele, expresiile legate de fiecare simbol logic se separă cu paranteze rotunde. Două puncte în ele înseamnă "are loc".

Definiția funcției impare se scrie sub forma

$$(\forall x \in \mathcal{X} \subset \mathbf{R})\colon f(-x) = -f(x).$$

Exemplul 2. Funcția $f$, definita pe toată dreapta numerică, se numește periodică daca exista un așa număr $T > 0$ (perioada funcției), încât pentru orice $x \in \mathrm{R}$ este verificată egalitatea $f(x+T) = f(x)$. Utilizând cuantificatorii, această definiție se poate scrie în modul următor:

$$(\exists\, \mathrm{T} > 0)\ (\forall x \in \mathrm{R})\colon f(x+T) = f(x)$$

In afară de cuantificatorul universal $\forall$ și cel existențial $\exists$, deseori vom întrebuința simbolurile logice de *implicație* $=>$ și de *echivalența* $\Leftrightarrow$ sau $\sim$. Simbolul $\Rightarrow$ înseamnă "implica", "urmează", "rezultă" (o propoziție, sau afirmație, rezultă din alta), iar simbolul $\Leftrightarrow$ echivalența afirmațiilor ce se află de diferite părți ale lui. De exemplu, definiția submulțimii $A$ a mulțimii $B$ se poate formula astfel:

$$[A \subset B) \Leftrightarrow ((x \in A) => (x \in B)),\ \forall x \in A.$$

### 1.1.3. Simbolul $\sum$ (sigma)

0 sumă de forma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ se notează prescurtat prin $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Deci avem expresiile:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk};$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in},$$

iar

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{mj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) =$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n}) +$$

$$+ \ldots + (a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn}).$$

Scrierea $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ se mai notează cu $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$

Această suma dublă poate fi generalizată prin scrierea:

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

unde suma se extinde la toate complexele (a1,a2, • • • , *an)* de indici, numere naturale, care satisfac anumite condiții date.

## 1.2. Operații cu mulțimi

### 1.2.1. Reuniunea mulțimilor

**Definiție.** Se numește *reuniunea* (suma) a două mulțimi *A.* și *B* mulțimea *A U B* (U - semnul reuniunii) care constă din toate elementele ce aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile date, adică care intră în *A* sau în *B,* sau în *A* și *B* concomitent:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \quad .$$

Grafic, reuniunea a două mulțimi este reprezentată în fig. 1.2 prin porțiunea haşurată.

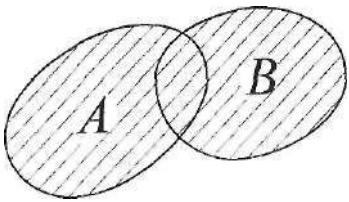



Fig. 1.2

Exemplul 1. $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

In mod analog, $A \cup B \cup C$ este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre aceste mulțimi: *A,B,C.*

Se numește *reuniunea* mulțimilor *Ai,* unde *i* aparține unei mulțimi de indici $(i \in I)$, mulțimea $\bigcup_i Ai$ care constă din toate elementele ce aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile *Ai.* In particular, reuniunea unui număr finit de mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vom nota-o $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sau $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

Exemplul 2. Dacă $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,4\}$, $A_3 = \{4,5\}$, atunci $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,4,5\}$.

### 1.2.2. Intersecția mulțimilor

**Definiție.** Se numește *intersecția* a două mulțimi *A* și *B* mulțimea $A \cap B$ ($\cap$ - semnul intersecției) care constă din toate elementele ce aparțin atât unei, cât și celeilalte mulțimi, adică care intră și în mulțimea *A,* și în mulțimea *B* (partea comună a mulțimilor):

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\} .$$

Grafic, intersecția a două mulțimi este reprezentată în fig. 1.3 prin porțiunea haşurată.

Exemplul 1. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

Dacă $A \subset B$, atunci, evident, $A \cap B = A$. Dacă *A* și *B* nu au elemente comune, atunci intersecția lor este vidă: $A \cap B = \varnothing$

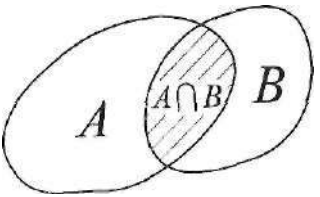



Fig. 1.3

Exemplul 2. $\{1,2,3\} \cap \{4,7,8\} = \varnothing$.

In mod analog, $A \cap B \cap C$ este partea comună a trei mulțimi *A, B, C.*

*Intersecția* mulțimilor *Ai, i* $\in$ *I,* se definește ca mulțimea $\bigcap_i Ai$, care constă din toate elementele ce aparțin concomitent fiecăreia dintre mulțimile *Ai.* Intersecția unui număr finit de mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vom nota-o $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ sau $\bigcap_{i=1}^{n} Ai$.

Exemplul 3. Dacă $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$, $A_2 = \{1,4,5,6\}$, $A_3 = \{4,5,9\}$, atunci $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{4,5\}$.

### 1.2.3. Diferența a două mulțimi

**Definiție.** Se numește *diferența* dintre mulțimea *A* și mulțimea *B* mulțimea $A|B$ care consta din toate acele elemente ale mulțimii *A* ce nu aparțin mulțimii *B:*

$$A \setminus B = \{x \setminus x \in A, x \notin B\}.$$

Grafic, diferența dintre *A* și *B* este reprezentată în fig. 1.4 prin porțiunea haşurată.

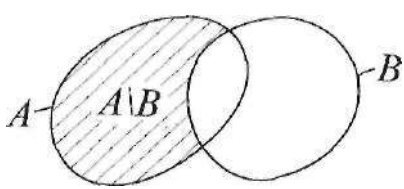



Fig. 1.4

Exemplul 1. $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$.

Dacă $A \subset B$ (fig. 1.1), atunci diferența $B \setminus A$ se numește *complementara* mulțimii $A$ până la mulțimea $B$ (sau *complementara lui A în raport cu B)* și se notează $C_B A$:

$$C_B A = \{x | \ x \in B, \ x \notin A\} = B \setminus A.$$

Exemplul 2. Fie $B = \{1,2,3,4,5\}$, iar $A = \{2,4\}$, atunci complementara mulțimii $A$ până la mulțimea $B$ este mulțimea $C_B A = B \setminus A = \{1,3,5\}$.

### 1.2.4. Produs cartezian

Definiția 1. Se numește *pereche ordonată* (cuplu) perechea *(x,y)* de elemente $x$ și $y$, considerate în ordinea dată, adică în sensul că $x$ este primul element, iar $y$ este al doilea element.

In perechea (x,y), $x$ se numește *prima componentă,* iar *y a doua componentă.*

Două perechi *(x1,y1)* și *(x2,y2)* sunt *egale* daca și numai dacă $x1 = x2$ și $y1 = y2$

Rezultă că $(x, y) \neq (y, x)$, egalitatea având loc numai în cazul când $x = y$. De aici rezultă că noțiunea de pereche ordonată diferă de cea de mulțime formată din două elemente. De exemplu, perechile ordonate (1,2) și (2,1) sunt distincte. În plus, ele diferă de mulțimea {1,2}.

Definiția 2. Fie $A$ și $B$ două mulțimi. Se numește *produsul cartezian* al mulțimilor $A$ și $B$ (în această ordine) mulțimea $A$ x $B$ ale cărei elemente sunt toate perechile ordonate *(a,b)* în care $a \in A$ și $b \in B$:

$$A * B = \{(a,b) | \ a \in A \text{ și } b \in B\} .$$

Când $A = B$, se notează $A * A = A^2$.

Exemplu. Fie $A = \{1,3,5\}$ și $B = \{1,2,4\}$. Atunci $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,4)\}$ și $B*A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$.

Se observă că $A * B \neq B * A$, deoarece, de exemplu, elementul $(1,2) \in A * B$ și $(1,2) \notin B*A$.

## 1.3. Numere reale şi mulţimi numerice

### 1.3.1. Noţiuni despre numere reale

Noţiunile de număr raţional, iraţional şi real sunt cunoscute din cursul preuniversitar. Reamintim că se numeşte *număr raţional* orice număr de forma *p/q,* unde *p, q* sunt numere întregi, iar $q \neq 0$. Orice număr raţional poate fi reprezentat (scris) sub formă de fracţie zecimală periodica, respectiv pozitivă sau negativa, şi reciproc.

Se numeşte *număr iraţional* orice fracţie zecimală neperiodică, pozitivă sau negativă (de exemplu, $\sqrt{2}$ = 1.41421356...; $\pi$ = = 3,141592...).

Numerele raţionale şi iraţionale se numesc *numere reale.*

O mulţime elementele căreia sunt numere reale se numeşte *mulţime, numerică.*

Mulţimea R a numerelor reale este reuniunea mulţimii Q a numerelor raţionale şi a mulţimii I a numerelor iraţionale: $R = Q \cup I$. Mulţimea Q reuneşte toate numerele întregi şi fracţionare (fracţiile zecimale periodice), pozitive şi negative. Din submulţimile mulţimii R de asemenea fac parte mulţimea N = {(), 1,2,...,n.,...} a numerelor naturale şi mulţimea Z = {..., —2,-1,0,1,2,...} a numerelor întregi, întrucât fiecare număr natural *n* este un număr întreg, rezultă că $N \subset Z$, iar fiindcă fiecare număr întreg *r* este un număr raţional, apoi $Z \subset Q$. Orice număr raţional *q* este un număr real, de aceea $Q \subset R$. Aşadar, $N \subset Z \subset Q \subset R$; în afară de aceasta, $I \subset R$.

Pentru prescurtare, deseori vom spune simplu "număr" în loc de "număr real".

### 1.3.2. Valoarea absolută a unui număr real

**Definiţie.** Se numeşte *valoarea absolută* a unui număr real *x* (sau *modulul* lui ar) numărul nenegativ, notat |x|, care este însuşi acest număr *x* dacă $x > 0$ sau numărul $-x$ dacă $x < 0$.

Deci

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0, \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Exemplul 1. $|2| = 2$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|0| = 0$.

Din definiție rezultă că pentru orice $x \in R$:

$$a; \leq |x| \quad \text{și} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Pentru $a > 0$, următoarele inegalități sunt echivalente:

$$|x| < a \Leftrightarrow a < x < a;$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon;$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq a, \quad x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty).$$

Au loc proprietățile:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

2) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$;

4) $|x/y| = |x| / |y|$ $(y \neq 0)$.

Exemplul 2. $|-2 + 3| < |-2| + |3|$, adică $1 < 5$.

> 1) Fie $x + y \geq 0$. Atunci $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$ (deoarece $x \leq |x|$). Pentru $x + y < 0$, avem $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |\leq x + |-y| = |x| + |y|$.

2) Notăm $x - y = z$. Atunci $x = y + z$, $|X| = |y + z| \leq |y| + |z|$, de unde $|z| \geq |x| - |y|$ sau $|x - y| \geq |x| - |y|$.

3) și 4) rezultă nemijlocit din definiția $|x|$. ◁

## 1.4. Metoda inducției matematice

*Inducția matematică* este o metodă de raționament care se bazează pe următorul principiu *(principiul inducției matematice)*.

Fie $P(n)$ o propoziție (o proprietate) care depinde de un număr natural $n > n_0$, $n_0$ fiind un număr natural fixat. Dacă:

1) $P(n)$ este adevărată pentru $n = n_0$ și

2) presupunând că *P(n)* este adevărată pentru $n = k$ *(k* fiind un număr natural $\geq n_0$), se demonstrează că ea este adevărată şi pentru $n = k + 1$, adică dacă $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ $(k \geq n_0)$, atunci propoziţia *P(n)* este adevărată pentru orice număr natural $n \geq n_0$.

Acest principiu implică metoda de demonstraţie, numită metoda inducţiei matematice.

Exemplu. Să se demonstreze că pentru $x > -1$ este adevărată inegalitatea *(inegalitatea lui Bernoulli*[2]*):*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

▷ Pentru $n = 0$ şi $n = 1$, inegalitatea (1.1) este satisfăcută. Presupunem că ea este satisfăcută pentru $n = k$, adică $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Înmulţind ambele părţi ale acestei egalităţi cu $(1 + x) > 0$, obţinem $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$, deoarece $kx^2 \geq 0$.

În felul acesta, inegalitatea s-a dovedit a fi verificată şi pentru $n = k + 1$. În bază principiului inducţiei matematice, conchidem că formula (1.1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$. ◁

## 1.5. Noţiunea de aplicaţie (funcţie)

### 1.5.1. Definiţiile de bază

Noţiunea de aplicaţie (sau funcţie), ca şi noţiunea de mulţime, se referă la noţiunile fundamentale ale matematicii.

Fie *A* şi *B* două mulţimi. Dacă fiecărui element *x* al mulţimii *A,* în baza unei legi (procedeu sau convenţii etc.) *f*, i se asociază un unic element *y* din mulţimea *B*, atunci se spune că este definită o *aplicaţie* ***f*** (sau *corespodenjă)* a mulţimii *A* în mulţimea *B*[3].

Elementul $y \in B$ corespunzător elementului $x \in A$. (sau în care trece elementul $x \in A$) se numeşte *imaginea* elementului *x* prin aplicaţia *f* (sau *valoarea lui* ***f*** *în x),* iar însuşi elementul *x* - *preimagine* a lui *y* prin *f*.

I. Bernoulli (1654-1705) - matematician elveţian.

In definiţia diverselor aplicaţii trebuie distins cu atenţie sensul prepoziţiilor în, pe şi între.

Când, în particular, fiecare element $y \in B$ corespunde prin $f$ (cel puțin) unei preimagini $x \in A$, se poate preciza spunând că $f$ este o aplicație a mulțimii $A$ *pe* $B$.

0 aplicație a lui $A$ în $B$ se mai numește și *funcție,* definita pe mulțimea $A$ cu valori în mulțimea $B$.

Expresiile: "aplicație", "funcție", "corespondență" exprimă aceeași noțiune și de aceea vor fi întrebuințate în viitor ca sinonime.

Definiția aplicației presupune, de fapt, existența următoarelor *trei elemente:*

1° o mulțime $A$, pe care este definită aplicația și care se numește *domeniul de definiție al aplicației;*

2° o a doua mulțime $B$, în care ia valori aplicația și care se numește *domeniul valorilor aplicației* sau *codomeniul aplicației;*

3° o lege (procedeu, convenție etc.) $f$, conform căreia fiecărui element $x \in A$ i se asociază un anumit element $y \in B$. Această lege o numim *legea de asociere* (sau *de definire)* a aplicației.

Aplicația cu trei elemente constituente A, $B$, $f$ se notează

$$f: A \to B$$

și se citește "aplicația $f$ a mulțimii $A$ în $B$" sau "funcția $f$ definită pe $A$ cu valori în 5", sau "aplicația $f$ de la $A$ la B".

Deși în definiția unei aplicații $f: A \to B$ apar în mod necesar trei elemente, totuși uneori se spune simplu "$f$ este o aplicație", urmând ca celelalte două elemente să rezulte din context.

Pentru notarea aplicației, în loc de $f$ poate fi utilizată oricare altă literă, de exemplu, $g$, $h$, $F$, $p$ etc.

Dacă prin aplicația $f: A \to B$ elementului $x \in A$ i se asociază elementul $y \in B$, notat de asemenea cu simbolul $f(x)$, atunci vom scrie $y = f(x)$.

Faptul că elementului $x \in A$ i se asociază elementul $f(x) \in B$ este convenit de a-l nota cu ajutorul unei *săgeți mărginite:* $x \mapsto f(x)$.

Imaginea $f(x)$ se determină de către elementul $x$ în mod univoc, însă $x$ nu numaidecât univoc se determină de către elementul $f(x)$.

Mulțimea imaginilor tuturor elementelor $x \in A$ se numește *imaginea mulțimii* $A$ prin aplicația $f$ (sau *imaginea* prin aplicația $f$) și se notează cu simbolul $f(A)$ sau Im $f$:

$$f(A) = \mathrm{Im} f = \{ y | y = f(x),\ x \in A \}.$$

Evident, $f(A) \subseteq B$.

### 1.5.2. Reprezentarea grafica a unei aplicații

Dacă mulțimile se reprezintă prin "figuri logice", atunci legea de asociere a aplicației $f: A \to B$ poate fi reprezentată grafic printr-o diagramă (fig. 1.5). (Diagramă = o reprezentare grafică schematică, care înfățișează în mod ilustrativ o corelație dintre mărimi.) In fig. 1.5 elementele mulțimilor $A$ și $B$ sunt reprezentate prin puncte, iar săgețile indică legea de definire a aplicației $f$ a mulțimii $A$ în mulțimea $B$. Grafic, domeniul de definiție $A$ și imaginea mulțimii $A$ prin aplicația $f$ sunt reprezentate prin porțiunile haşurate.

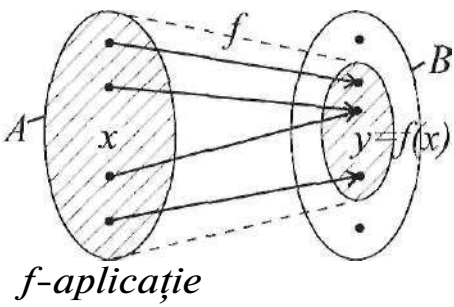



Fig. 1.5

### 1.5.3. Exemple de aplicații

1. Asociem fiecărui cuvânt din dicționarul limbii române moderne litera inițială a sa. Astfel de asociere definește o aplicație a mulțimii cuvintelor acestui dicționar în mulțimea literelor alfabetului latin.

2. Fie $A$ mulțimea tuturor locuitorilor din Republica Moldova la o anumita dată, iar N mulțimea numerelor naturale. Definim aplicația $f$: $A \to$ N astfel: $f(x)$ este egală cu vârsta (în ani) a lui $x \in A$ la acea dată.

3. Fie Z mulțimea numerelor întregi. Definim aplicația $f$: Z —» Z după legea: fiecărui număr $x \in$ Z i se asociază pătratul său, adică $x \mapsto f(x) = x^2$.

4. Asociem fiecărui număr real $x$ sinusul său, adică $x \mapsto$ sin $x$. Această asociere realizează o aplicație $f$: R —> R, al cărei domeniu de definiție și codomeniu este R, iar imaginea prin aplicația $f$ este Im $f = [-1,1] \subset$ R.

In mod analog, asocierea $x \mapsto \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) definește o aplicație $f$: $R^*_+$ —» R, unde $R^*_+$ este mulțimea numerelor reale pozitive $R^*_+ = \{ a \in R \mid a > 0\}$. Domeniul de definiție al acestei aplicații este $R^*_+$, iar codomeniul ei și imaginea prin aplicația $f$ este R.

Două aplicații $f$: $A \to B$ și $g$: $C \to D$ se numesc *egale* și se scrie $f = g$ dacă. $A = C$, $B = D$ și pentru orice $x \in A$, avem $f(x) = g(x)$, adică dacă domeniile și imaginile respective coincid.

Exemplul 5. Fie mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim aplicația $f$: $A \to B$ după "legea": $f$(a) = 1, $f(b) = f$(c) = 2, $f(d) = 4$.

De asemenea, de la $A$ la $B$ putem defini și o altă aplicație, de exemplu $g$: $A \dashrightarrow B$, uncie $g(a) = 2$, $g(b) = g(c) = 3$, $g(d) = 1$.

Pentru aplicațiile $f$ și $g$, avem $f$(a) = 1, iar $g(a) = 2$.

Se observă deci că aplicațiile $f$ și $g$ nu sunt egale.

### 1.5.4. Noțiunea de funcție

In cazul în care $f$: $A \dashrightarrow B$ este numita funcție, $A$ se numește *domeniul de definiție al funcției f*, *B - domeniul valorilor funcției,* sau *codomeniul funcției.* Imaginea $f$(A) se numește *mulțimea valorilor funcției,* sau *domeniul de variație al funcției f.*

Fie $f$: $A$ —» $B$ o funcție. Dacă $x$ este un element oarecare din A, iar $y$-elementul corespunzător $f(x)$, atunci se scrie $y = f(x)$. Această egalitate poartă numele de *dependență funcțională* asociată funcției $f$, iar $x$ se numește *variabilă independentă,* sau *argument.* Ori de câte ori ne este clar domeniul și codomeniul funcției $f$, putem indica pentru această funcție numai dependența funcțională $y = f(x)$·

Deseori însăși funcția $f$ se notează cu simbolul $f(x)$. Notarea funcției $f$: $A \dashrightarrow B$ și a valorii lui $f$ în $x \in A$ cu unul și același simbol

*f(x),* de obicei, nu duce la confuzie, deoarece în fiecare caz concret e clar despre ce este vorba.

Valoarea particulară a funcției *f(x)* în $x = x_0$ se scrie astfel: $f(x_0)$ sau $y_0 = f(x_0)$. De exemplu, dacă $f(x) = 2x + 1$, atunci $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ etc.

Funcția $f$: $A$ —» $B$ se numește *constantă* pe $A$ dacă $f(x) = c =$ = const, $\forall x \in A$. Dacă c = 0, atunci funcția se numește *nulă,* adică $(f = 0) \Leftrightarrow (f(x) = 0, \ \forall x \in A)$.

O aplicație $f$: $A \to B$ se numește *funcție numerică* dacă atât domeniul de definiție $A$, cât și domeniul valorilor $B$ sunt submulțimi ale mulțimii R a numerelor reale, adică $A \subseteq R$ și $B \subseteq R$. In acest caz, se vorbește despre funcția de o singură variabilă $y = f(x)$·

**Exemplu.** Următoarele aplicații:

1) $f$: R --> R, $f(x) = x + 1$;

2) $g$: [0,3] --> [0,9], $g(x) = x^2$

sunt funcții numerice.

Dacă $A \subseteq R^n$, $B \subseteq R$, unde $R^n$ este mulțimea tuturor sistemelor ordonate $(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ de $n$ numere reale, atunci se vorbește despre funcția $y = f(x_1, x_2 \cdots, x_n)$ de $n$ variabile $x_1, x_2 \cdots, x_n$

## 1.6. Moduri de definire a unei aplicații (funcții)

Când definim o aplicație, trebuie să precizăm cele trei elemente care o caracterizează: domeniul de definiție, domeniul valorilor și legea de asociere. Vom distinge două moduri de a defini o aplicație.

### 1.6.1. Aplicații definite sintetic

**In** multe cazuri, o aplicație $f: A \to B$ poate fi definită "numind pentru fiecare element în parte din A elementul ce i se asociază din mulțimea $B$".

E x e m p l u l 1. Fie A = {1,2,3,4} și $B$ = {1,5,7}. Definim $f$: A --» B, considerând: $f(1) = 5$, $f(2) = 1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$.

Legea de asociere a funcției $f$: $A \longrightarrow B$ poate fi reprezentată grafic printr-o diagramă (fig. 1.6) sau printr-un tabel (fig. 1.7).

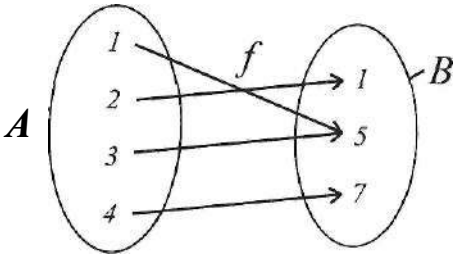



Fig. 1.6

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 1 | 5 | 7 |

Oricărei aplicații definite sintetic i se poate asocia o diagramă ca în fig. 1.6, sau un tabel ca în fig. 1.7.

Deseori este bine de a indica diagrama sau tabelul de valori pentru a defini aplicația respectivă.

E x e m p l u l 2. Să considerăm diagrama din fig. 1.8. Aplicația asociată este: $f$: $A \dashrightarrow B$, unde $f(a) = f(c) = -1$, $f(b) = 2$, $f(d) = 4$,

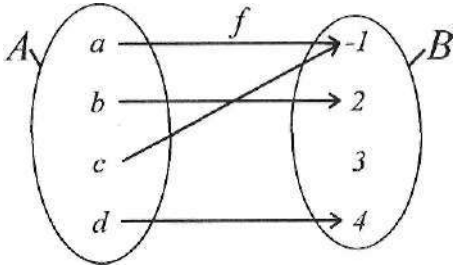



Fig. 1.8

Sau să considerăm tabelul din fig. 1.9. Aplicaţia (funcţia) asociată este $f\colon \{a,b,c,d\} \to \{0,1,3\}$, unde $f(a) = 1$, $f(b) = f(d) = 3$, $f(c) = 0$.

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 0 | 3 |

Fig. 1.9

### 1.6.2. Aplicaţii definite analitic

O aplicaţie (funcţie) $f\colon A \to B$ poate fi definită specificând o proprietate (sau relaţie) ce leagă un element arbitrar $x \in A$ de elementul $f(x)$ din $B$.

Exemple.

1) Prin definiţie, partea întreagă $[a]$ a unui număr real $a$ este cel mai mare număr întreg care este cel mult egal cu $a$. De exemplu: $[2,3] = 2$, $[5] = 5$, $[-2,1] = -3$ etc. Definim aplicaţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ astfel: $f(x) = [x]$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Fiind dată o formulă (sau o expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcţie sau mai multe funcţii.

De exemplu, considerăm expresia $E(x) = x^2$. Putem defini funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = x^2$.

Aceleiaşi expresii $E(x) = x^2$ putem să-i asociem funcţia $g\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$.

Funcţiile $f$ şi $g$ sunt diferite, deoarece domeniul de definiţie al lui $f$ este $\mathbf{R}$, iar al lui $g$ este $\mathbf{Z}$.

3) Fiind date mai multe expresii algebrice, putem defini o funcţie sau mai multe funcţii.

Să considerăm expresiile: $E_1(x) = x + 1$, $E_2(x) = x^2$ şi $E_3(x) = 1$. Definim funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Aceloraşi expresii le putem asocia funcţia $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, determinată în modul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Se observă că $f(-1) = 0$ şi $g(-1) = 1$, deci $f$ şi $g$ sunt funcţii distincte.

4) Multe aplicaţii importante provin din geometrie. Iată unele exemple.

1° *Simetria în raport cu un punct.* Fie $O$ un punct fixat din planul $P$. Notăm prin $s_O$ aplicaţia definită astfel:
$s_O$: $P \to P$, $s_O(X)$ = simetricul punctului $X$ faţă de $O$.
Aplicaţia $s_O$ se numeşte *simetria faţă de punctul* $O$.

2° *Simetria în raport cu o dreaptă.* Fie $l$ o dreaptă din planul $P$. Definim aplicaţia $s_l$: $P \to P$ astfel: $s_l(X)$ = simetricul punctului $X$ faţă de dreapta $l$. Aplicaţia $s_l$ se numeşte *simetria faţă de dreapta* $l$.

3° Fie $O$ un punct fix în planul $P$, iar $X$ – un punct arbitrar din acest plan. Definim aplicaţia $d$: $P \to \mathbf{R}$ astfel: $d(X)$ = lungimea segmentului $OX$.

## 1.7. Aplicaţii injective, surjective, bijective

### 1.7.1. Aplicaţie injectivă

**Definiţie.** O aplicaţie $f$: $A \to B$ se numeşte aplicaţie *injectivă*, sau simplu *injecţie*, dacă fiecare imagine $f(x)$ are o singură preimagine $x$ (fig. 1.10).

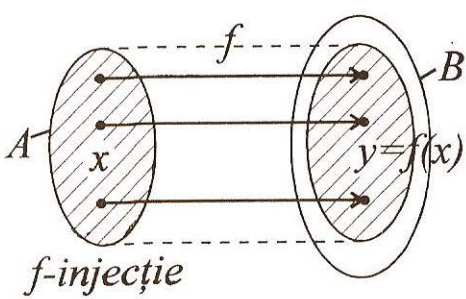



Fig. 1.10

Se observă că aplicaţia (funcţia) $f$: $A \to B$ este *injectivă* atunci şi numai atunci când din condiţia $x \neq x'$ $(x, x' \in A)$ rezultă $f(x) \neq f(x')$, adică diferite elemente din $A$ trec în diferite elemente din $B$.

Condiţia $x \neq x'$ $(x, x' \in A) \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ poate fi considerată ca definiţie a aplicaţiei injective. Faptul că $f$ este o aplicaţie injectivă se mai exprimă şi astfel: dacă $x$ şi $x'$ sunt oricare două elemente din $A$ cu proprietatea $f(x) = f(x')$, atunci rezultă $x = x'$.

Exemple de aplicaţii injective.

1) Aplicaţia $F$: $A \to B$, asociată diagramei din figura 1.10, este o aplicaţie injectivă.

2) Funcţia $g$: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită prin formula $g(x) = x^2$, este injectivă.

▷ Într-adevăr, să presupunem că $g(x) = g(x')$, unde $x, x' \in \mathbf{N}$. Atunci $x^2 = x'^2$, de unde $(x - x')(x + x') = 0$. Din această egalitate, fiindcă $x$ şi $x'$ sunt numere naturale şi deci $x + x' \neq 0$, rezultă că $x - x' = 0$. Din ultima egalitate avem că $x = x'$. Aşadar, din egalitatea $g(x) = g(x')$ rezultă că $x = x'$ şi deci $g$ este o funcţie injectivă. ◁

### 1.7.2. Aplicaţie surjectivă

**Definiţie.** O aplicaţie $f$: $A \to B$ se numeşte aplicaţie *surjectivă*, sau simplu *surjecţie*, sau aplicaţie a lui $A$ **pe** $B$, dacă pentru fiecare element $y \in B$ există (cel puţin) o preimagine $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$.

Cu alte cuvinte, aplicaţia (funcţia) $f$: $A \to B$ este *surjectivă* dacă imaginea $f(A)$ a mulţimii $A$ prin aplicaţia $f$ coincide cu toată mulţimea $B$, adică $f(A) = B$ (fig. 1.11).

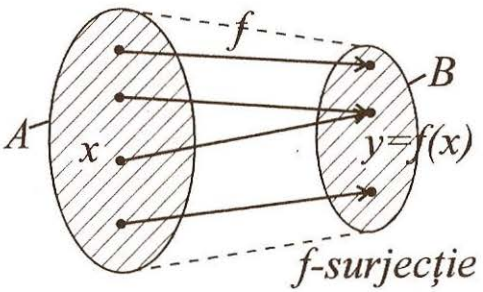



Fig. 1.11

Exemple de aplicații surjective.

1) Aplicaţia asociată diagramei din figura 1.11 este o aplicaţie surjectivă.

2) Funcţia $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin relaţia $f(x) = kx$, $k \neq 0$, este surjectivă.

▷ Într-adevăr, $\forall y \in \mathbf{R}$, punând $y = kx$, obţinem $x = \frac{y}{k} \in \mathbf{R}$ şi avem $f(x) = f\left(\frac{y}{k}\right) = k\frac{y}{k} = y$. Deci orice element $y \in \mathbf{R}$ are o preimagine, adică $f$ este o aplicaţie surjectivă. ◁

### 1.7.3. Aplicaţie bijectivă

**Definiţie.** O aplicaţie $f$: $A \to B$ se numeşte *aplicaţie* (*corespondenţă* sau *funcţie*) *bijectivă*, sau simplu *bijecţie*, **între** mulţimile $A$ şi $B$ dacă ea este simultan injectivă şi surjectivă (fig. 1.12).

Cu alte cuvinte, se spune că **între** mulţimile $A$ şi $B$ (sau între elementele acestor mulţimi) este stabilită o *corespondenţă bijectivă* (sau *biunivocă*) $f$ când sunt îndeplinite condiţiile:

1) fiecare element $x \in A$ are o imagine $y \in B$ şi numai una (corespondenţa este univocă);

2) pentru fiecare element $y \in B$ există (cel puţin) o preimagine $x \in A$ ($f$ este o corespondenţă a lui $A$ pe $B$);

3) două elemente diferite $x_1, x_2$ din $A$ ($x_1 \neq x_2$) au imagini diferite $y_1, y_2$ în $B$ ($y_1 \neq y_2$).

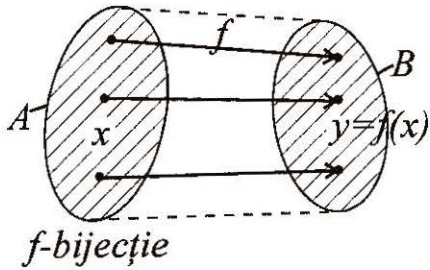



Fig. 1.12

Exemple de aplicații bijective.

1) Aplicaţia $f$: $A \to B$, asociată diagramei din figura 1.12, este bijectivă.

2) Funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = kx + b$, unde $k, b \in \mathbf{R}$ şi $k \neq 0$, este bijectivă.

▷ Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $kx_1 + b = kx_2 + b$, de unde obţinem $kx_1 = kx_2$. Fiindcă $k \neq 0$, rezultă $x_1 = x_2$. Deci $f$ este injectivă.

Să arătăm că $f$ este şi surjectivă. Fie $y \in \mathbf{R}$. Atunci cerând respectarea egalităţii $y = kx + b$, găsim că are sens numărul real $x = \frac{y}{k} - \frac{b}{k}$. Prin urmare, $f(x) = k\left(\frac{y}{k} - \frac{b}{k}\right) + b = y$, ceea ce arată că $f$ este surjectivă.

Aşadar, funcţia $f$, fiind injectivă şi surjectivă, este o funcţie bijectivă. ◁

### 1.7.4. Transformare şi substituţie ale unei mulţimi

În cazul $A = B$, adică dacă domeniul de definiţie şi domeniul valorilor aplicaţiei $f$ coincid, atunci aplicaţia $f\colon A \to A$ a mulţimii $A$ **în** ea însăşi se numeşte *transformare* a mulţimii $A$.

O aplicaţie bijectivă a mulţimii $A$ **pe** ea însăşi se numeşte *substituţie* a mulţimii $A$.

Exemplu. Fie $\mathbf{R}_+$ mulţimea numerelor reale nenegative, $\mathbf{R}_+ = \{a \in \mathbf{R} \mid a \geq 0\}$. Definim după regula $x \mapsto x^2$ următoarele aplicaţii:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+, \quad \varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+.$$

Toate aceste trei aplicaţii sunt distincte: $f$ este o aplicaţie **în** şi nu este nici injectivă şi nici surjectivă. Evident, $f$ este o transformare a mulţimii $\mathbf{R}$ a numerelor reale; $g$ este surjectivă, dar nu este injectivă; $\varphi$ este bijectivă şi deci $\varphi$ este o substituţie a mulţimii $\mathbf{R}_+$.

Fie $A$ o mulţime oarecare. Vom nota cu $\varepsilon\colon A \to A$ aplicaţia care trece fiecare element $x \in A$ în el însuşi, adică $\varepsilon(x) = x$, $\forall x \in A$; $\varepsilon$ se numeşte *substituţia identică* a mulţimii $A$.

## 1.8. Produs de aplicaţii

**Definiţie.** Fie aplicaţiile $f\colon A \to B$ şi $g\colon B \to C$. Se numeşte *produsul* (sau *compunerea*) a două alpicaţii $g$ şi $f$ aplicaţia $F\colon A \to C$

care se obţine în urma efectuării succesive a aplicaţiei $f$ şi apoi a aplicaţiei $g$ (fig. 1.13), adică definită prin formula

$$F(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A. \tag{1.1}$$

Această aplicaţie-produs se notează cu $g \circ f$ (sau $gf$), adică $F = g \circ f$.

În felul acesta, produsul $g \circ f$ de aplicaţii se defineşte de egalitatea

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A. \tag{1.2}$$

Aceasta înseamnă că dacă $f\colon\ x \mapsto y$, $g\colon\ y \mapsto z$, atunci $g \circ f\colon\ x \mapsto z$, unde $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ (fig. 1.13).

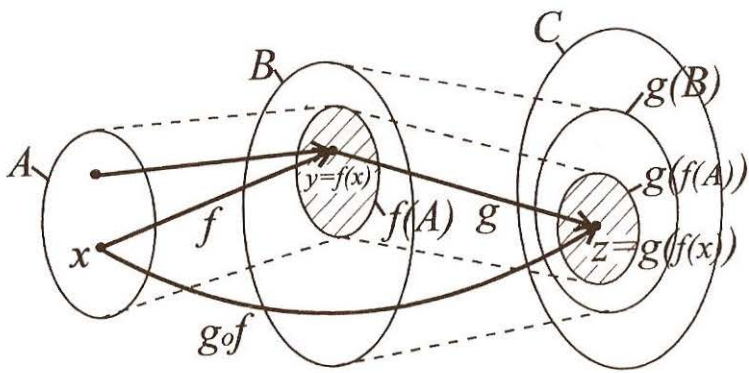



Fig. 1.13

Acelaşi produs de aplicaţii (1.1) sau (1.2) este reprezentat în mod ilustrativ de diagrama triunghiulară din figura 1.14.

Remarcăm că produsul, sau compunerea este definit nu pentru orice aplicaţii $f$ şi $g$.

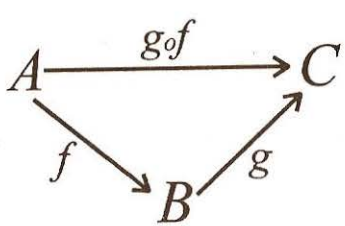



Fig. 1.14

Produsul aplicaţiilor $f\colon A \to B$ şi $g\colon A' \to C$ are sens numai dacă $\forall x \in A$ va avea loc $f(x) \in A'$. Dacă $A' = B$, atunci produsul $g \circ f$ există.

De aici rezultă că *produsul a două substituţii ale mulţimii A totdeauna are sens.*

Produsul de funcţii $g \circ f$ se mai numeşte *compunerea funcţiei g cu funcţia f* sau *funcţia compusă* $F = g \circ f$, $F\colon A \to C$, definită prin $F(x) = g(f(x)), \forall x \in A$.

Exemple de compunere a funcţiilor.

1) Considerăm funcţiile $f\colon A \to B$ şi $g\colon B \to C$, definite respectiv prin diagramele din figura 1.15.

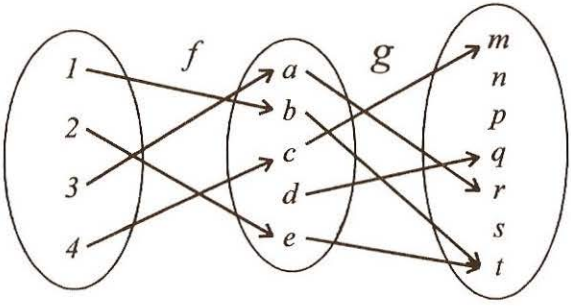



Fig. 1.15

În acest caz, avem

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(b) = t,$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(e) = t,$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = r,$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(c) = m.$$

2) Fie $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţiile definite respectiv prin formulele

$$f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = 1 + x^2.$$

Funcţia $g \circ f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are sens. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem:
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 2.$

Deci funcţia compusă $g \circ f$ este descrisă prin formula

$$(g \circ f)(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Se observă că are sens să vorbim şi de compunerea lui $f$ cu $g$. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = (1 + x^2)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

Deci funcţia $f \circ g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este dată de formula $(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2$.

Dacă $f$: $A \to B$ şi $g$: $B \to A$ sunt funcţii, are sens $g \circ f$: $A \to A$ şi $f \circ g$: $B \to B$.

Din exemplul 2) rezultă că în general $g \circ f \neq f \circ g$, adică *produsul de aplicaţii nu este comutativ.*

**Teorema 1.1.** *Fie $f$: $A \to B$, $g$: $B \to C$, $h$: $C \to D$ trei aplicaţii. Atunci fiecare dintre aplicaţiile $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ are sens şi e justă egalitatea:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

*adică produsul aplicaţiilor este o operaţie asociativă.*

▷ Codomeniul aplicaţiei $g \circ f$ este mulţimea $C$. Fiindcă domeniul de definiţie al lui $h$ este de asemenea $C$, are sens produsul de aplicaţii $h \circ (g \circ f)$. În mod analog, domeniul de definiţie al aplicaţiei $h \circ g$ este $B$. Codomeniul lui $f$ fiind de asemenea $B$, are sens produsul $(h \circ g) \circ f$. Aplicaţiile $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au acelaşi domeniu de definiţie (mulţimea $A$) şi acelaşi codomeniu (mulţimea $D$). Pentru orice $x \in A$, avem:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$

iar

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Comparând, obţinem egalitatea $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ◁

## 1.9. Aplicaţia inversă

### 1.9.1. Inversarea aplicaţiilor

În cazul în care $f$: $A \to B$ este o aplicaţie bijectivă, conform definiţiei, fiecare imagine are o singură preimagine $x \in A$ şi totodată orice element din $B$ este imaginea unui element din $A$ (fig. 1.12). În acest caz, ţinând cont de asocierea $x \mapsto y = f(x)$, putem compune o

nouă asociere:

$$y = f(x) \mapsto x, \quad \forall y = f(x) \in B,$$

adică aplicaţia $f^{-1}$: $B \to A$, numită *aplicaţia inversă* a aplicaţiei $f$, care fiecărei imagini $f(x)$ îi asociază preimaginea sa $x$. Aplicaţia inversă $f^{-1}$ stabileşte o *corespondenţă bijectivă* între mulţimile $B$ şi $A$.

În felul acesta, $f(x) \mapsto f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.

Evident, fiecare dintre aplicaţiile $f^{-1} \circ f$ şi $f \circ f^{-1}$ este o substituţie identică:

$$f^{-1} \circ f = \varepsilon_A, \quad f \circ f^{-1} = \varepsilon_B. \tag{1.1}$$

### 1.9.2. Funcţia inversă

Dacă aplicaţia $f$: $A \to B$ este numită funcţie, atunci aplicaţia inversă $f^{-1}$ (dacă există) se numeşte *funcţia inversă* a funcţiei $f$.

**Definiţie.** O funcţie $f$: $A \to B$ se numeşte *inversabilă*, dacă există o funcţie $f^{-1}$: $B \to A$, astfel încât sunt satisfăcute relaţiile (1.1).

Fuuncţia $f^{-1}$ definită de relaţiile (1.1) este unică.

Într-adevăr, dacă $g$: $B \to A$ este o altă funcţie, astfel încât $g \circ f = \varepsilon_A$ şi $f \circ g = \varepsilon_B$, atunci obţinem:

$$f^{-1} = \varepsilon_A \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ \varepsilon_B = g.$$

Funcţia $f^{-1}$ se mai numeşte şi *inversa* funcţiei $f$.

Exemplu de funcţie inversabilă.

Fie funcţia $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq 0$. Această funcţie este bijectivă, deci putem vorbi de inversa sa. Fie $y \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) = y$ sau $ax + b = y$. Din $ax + b = y$ obţinem că $x = \dfrac{y-b}{a} = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$. Deci $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$. Folosind notaţia cu $x$, funcţia inversă a lui $f$ este:

$$f^{-1}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ unde } f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Uşor putem verifica acum egalităţile (1.1):

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(ax + b) = \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} = x.$$

Deci $f^{-1} \circ f = \varepsilon_A$.

În mod analog verificăm şi cealaltă egalitate.

## 1.10. Graficul unei funcţii

Fie $f\colon A \to B$ o funcţie. Prin *graficul* acestei funcţii înţelegem submulţimea $G_f$ a produsului cartezian $A \times B$, formată din toate perechile $(x, f(x))$ cu $x \in A$. Deci

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B. \tag{1.1}$$

Exemplul 1. Să considerăm funcţia asociată diagramei din fig. 1.8: $f(a) = -1$, $f(b) = 2$, $f(c) = -1$, $f(d) = 4$ .

În acest caz, graficul $G_f$ este mulţimea

$$G_f = \{(a, -1), (b, 2), (c, -1), (d, 4)\}.$$

Reprezentarea geometrică a graficului unei funcţii numerice

Graficul unei funcţii numerice are o particularitate deosebită: el se poate reprezenta ca o submulţime de puncte din plan.

Fie $f\colon A \to B$ o funcţie numerică şi $G_f$ graficul său. Fie $Oxy$ un sistem rectangular de coordonate în plan. Fiecărui element $(a, b)$ din $G_f$ îi corespunde un punct $P(a, b)$ din plan ($a$ este abscisa, iar $b$ – ordonata punctului $P$).

Mulţimea de puncte din plan care au coordonatele $(x, y)$, unde $(x, y)$ este un element arbitrar din mulţimea $G_f$, se numeşte *reprezentarea geometrică a graficului funcţiei* $f$. De obicei, însăşi această reprezentare geometrică este numită "*graficul funcţiei* $f$".

Exemplul 2. Pentru funcţia $y = x^2$, $x \in A = [-1, 2]$, imaginea lui $A$ este mulţimea $B = [0, 4]$. În fig. 1.16 mulţimea $A \times B$ este dreptunghiul haşurat. Graficul $G_f$ al acestei funcţii constă din punctele $(x, x^2)$ ale acestui dreptunghi.

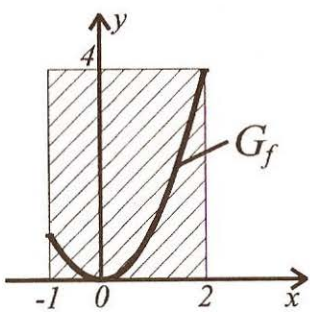



Fig. 1.16

Dacă $f^{-1}$ este inversa funcţiei $f$, atunci graficul ei este

$$G_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y = f(x),\ x \in A\} =$$

$$= \{(f(x), x) \mid x \in A\} \subset B \times A. \tag{1.2}$$

Din relaţiile (1.1) şi (1.2) rezultă că dacă $f$ este o funcţie numerică inversabilă, atunci, schimbând între ele locurile coordonatelor punctului arbitrar $M$ al graficului funcţiei $f$, obţinem coordonatele punctului arbitrar $M'$ al graficului funcţiei $f^{-1}$. Dar în acest caz uşor se poate demonstra, folosind fig. 1.17, că punctele $M(x, f(x))$ şi $M'(f(x), x)$ sunt simetrice faţă de bisectoarea cadranelor I şi III ale sistemului rectangular de coordonate $Oxy$ în plan.

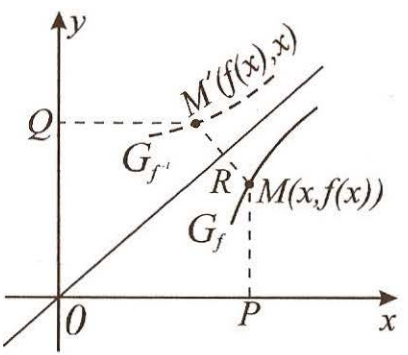



Fig. 1.17

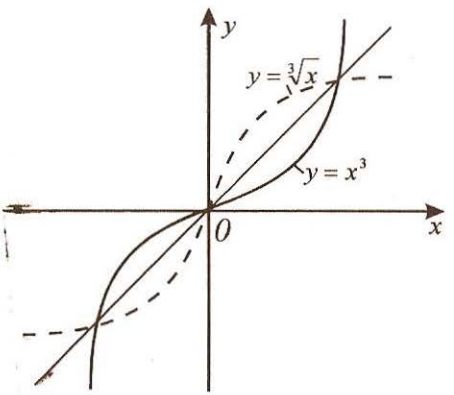



Fig. 1.18

Rezultă că graficele funcţiilor numerice $f$ şi $f^{-1}$ sunt simetrice faţă de bisectoarea cadranelor I şi III ale sistemului rectangular de coordonate în plan.

E x e m p l u l 3. Inversa funcţiei $y = f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$, este $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Cunoscând graficul funcţiei $y = x^3$, construim graficul funcţiei $y = \sqrt[3]{x}$, ca fiind simetric cu primul faţă de bisectoarea cadranelor I şi III ale sistemului rectangular de coordonate $Oxy$ în plan (fig. 1.18).

## 1.11. Clasificarea mulțimilor. Puterea unei mulțimi

### 1.11.1. Mulțimi finite, numărabile, nenumărabile

Mulțimile *finite* sunt cele care au un număr natural $n \in N^*$ de elemente, unde $N^* = N \setminus \{0\}$ sau $N^* = \{1,2,3,...\}$. Elementele unei mulțimi finite $A$ se pot nota cu $a_1, a_2, ..., a_n$ și deci $A$ se poate scrie sub forma:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} .$$

Mulțimea vidă $\varnothing$ de asemenea se consideră finită.

Orice mulțime care nu este finită se numește *infinită.*

De exemplu, mulțimile N, Z, R, respectiv a numerelor naturale, întregi, reale, sunt mulțimi infinite.

Mulțimile *numărabile* sunt mulțimile infinite ale căror elemente se pot enumera (cel puțin teoretic), scriindu-se sub forma (uzuală ca notație):

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}. \tag{1.1}$$

Ca exemplu de mulțime numărabilă poate servi mulțimea Z **a** numerelor întregi.

Intr-adevăr, în mulțimea $Z = \{(), \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$ putem enumera elementele ei ca în (1.1), notând 0 cu $a_1$, $\pm 1$ cu $a_2$ și $a_3$ etc.

In felul acesta, elementele mulțimii Z pot fi enumerate, adică Z este numărabilă.

Mulțimile *nenumărabile* sunt acelea care nu se pot enumera (nici teoretic), deoarece conțin "mai multe" elemente decât ar încăpea într-un șir numărabil de forma (1.1). Existența lor rezultă din următoarea propoziție pe care o formulăm fără demonstrație.

*Familia submulțimilor unei mulțimi numărabile nu este numărabilă.*

### 1.11.2. Echivalența a două mulțimi

Dacă între mulțimile $A$ și $B$ se poate stabili o corespondență bijectivă, atunci se spune că mulțimile $A$ și $B$ sunt *de aceeași putere,* sau sunt *echivalente* (în sensul lui Cantor[4]), și se notează $A \sim B$.

[4] G. Cantor (1845-1918) - matematician german, fondatorul teoriei mulțimilor.

Puterea unei mulțimi finite coincide cu numărul de elemente ale acestei mulțimi.

Exemplu. Asociem fiecărui număr natural $n$ numărul $2n$, atunci se stabilește o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor naturale și mulțimea numerelor naturale pare. In felul acesta, mulțimea numerelor naturale este echivalentă cu mulțimea numerelor naturale pare.

Din acest exemplu se observă că o mulțime poate fi echivalentă cu o submulțime proprie a sa. De menționat că o atare echivalență nu este posibilă în cazul mulțimilor finite.

Expunem mai jos unele afirmații, pe care le formulăm fără demonstrație.

O mulțime $A$ este infinită dacă ea este echivalentă cu o submulțime proprie a sa; în caz contrar, $A$ este finită.

De exemplu, după cum deja am arăta.t, mulțimea, N a. tuturor numerelor naturale este echivalentă cu submulțimea sa proprie $2N = \{2k,\ k \in N\}$ a numerelor naturale pare. Deci N este infinită.

Cu ajutorul noțiunii de echivalență o mulțime numărabilă se definește astfel: fiecare mulțime echivalentă cu mulțimea N* a numerelor; naturale nenule se numește *numărabilă.*

Mulțimile numarabile sunt echivalente între ele.

Din orice mulțime infinita se poate alege (extrage) o submulțime numărabilă.

Mulțimile Z (a numerelor întregi) și Q (a numerelor raționale) sunt mulțimi numarabile.

Mulțimea R (a numerelor reale) este nenumărabilă.

Fiecare mulțime echivalentă cu mulțimea R a. numerelor reale se numește *mulțime de puterea continuumului.*

## 1.12. Legi de compoziție

### 1.12.1. Noțiunea de lege de compoziție

Fie M o mulțime nevidă de elemente, de natură oarecare. Considerăm produsul cartezian $M$ x $M$, adică mulțimea tuturor perechilor ordonate $(x,y)$ de elemente din $M$.

**Definiție.** **O** aplicație $\varphi$ definită pe produsul cartezian M x M cu valori în M,

$$\varphi : M \times M \to M, \ (x,y) \mapsto \varphi \ (x,y)$$

se numește *lege de compoziție* (sau *operație algebrică internă)* pe *M.*

Elementul unic determinat $\varphi\ (x,y) \in$ M care corespunde perechii ordonate $(x,y) \in M$ x *M* prin aplicația $\varphi$ se numește *compusul* lui *x* cu *y* prin operația $\varphi$ (sau *rezultatul* operației considerate).

O lege de compoziție (internă) pe o mulțime *M* poartă încă numele de *operație binară* pe *M* (sau *operație algebrică între elementele din M).* De exemplu, adunarea și înmulțirea numerelor naturale sunt legi de compoziție pe M = N; reuniunea și intersecția sunt legi de compoziție pe mulțimea $M = P(E)$ a tuturor părților unei mulțimi *E.*

Pentru operațiile algebrice (interne) se folosesc diferite notații. Aici specificăm: a) notația *aditivă:* $\varphi(x,y) = x + y$ și în acest caz $x + y$ se numește *suma* lui *x* cu *y,* iar operația $\varphi$ se numește *adunare;* b) notația *multiplicativă:* $\varphi(x,y) = x \cdot y$ sau $\varphi(x, y) = xy$ și în acest caz $x * y$ sau *xy* se numește *produsul* lui *x* cu *y,* iar operația $\varphi$ se numește *înmulțire.*

In unele cazuri, pentru compusul $\varphi(x,y)$ al lui *x* cu *y* se folosesc și alte notații ca $x \circ y$, $x \wedge y$, $x \vee y$, $x * y$, $x \oplus y$ etc.

### 1.12.2. Lege de compoziție externă

**Definiție.** Fie *A* și *M* doua mulțimi nevide. O aplicație

$$\varphi: A \times M \to M, \ (\alpha, x) \mapsto \varphi(\alpha, \ x) \in M$$

se numește *lege de compoziție externă* (sau *operație algebrică externă)* pe *M* cu *operatori* în *A.*

Pentru *compusul* $\varphi(\alpha,x)$ (rezultaul operației considerate) se folosește de regulă notația *multiplicativă* $\varphi(\alpha,x) = \alpha x$, numită *produsul lui a cu x.* Mulțimea *A* poartă numele de *domeniul operatorilor legii d*e compoziție externe $\varphi$. înmulțirea matricelor cu scalari, respectiv înmulțirea vectorilor liberi cu scalari, sunt exemple de operații algebrice externe pe mulțimea matricelor de tip *m* x *n,* respectiv pe mulțimea $V_3$ a vectorilor liberi cu operatori în R (aceste operații vor fi definite ulterior în p. 4.2.3 cap. 4 și în p. 10.6.4 cap. 10, respectiv).

## Exerciţii

**1.** Să se verifice egalităţile:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$;

b) $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\} = \{-1\}$;

c) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\} = \{\frac{1}{3}, -1\}$;

d) $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| \leq 1\} = [1, 3]$.

**2.** Să se determine mulţimea:

$$\{x \in \mathbf{Z} \mid x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}.$$

**3.** Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 2\}$. Să se afle $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

**4.** Fie $A$, $B$, $C$ trei mulţimi oarecare. Să se demonstreze proprietăţile operaţiilor cu mulţimi:

1° $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ şi
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(*asociativitatea* reuniunii şi a intersecţiei).

2° $A \cup B = B \cup A$ şi $A \cap B = B \cap A$
(*comutativitatea* reuniunii şi a intersecţiei).

3° $A \cup A = A$ şi $A \cap A = A$
(*idempotenţa* reuniunii şi a intersecţiei).

4° $A \cup \varnothing = A$ şi $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5° $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(*distributivitatea* reuniunii faţă de intersecţie)
şi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(*distributivitatea* intersecţiei faţă de reuniune).

6° Dacă $A$ şi $B$ sunt submulţimi ale lui $E$, atunci:
a) $E \cap C_E A = E \setminus A$;
b) $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ şi
$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$;
c) $C_E(C_E A) = A$.

7° Dacă $A$ şi $B$ sunt două mulţimi, atunci $A\setminus B = C_A(A\cap B)$.

8° Dacă sunt trei mulţimi, atunci

a) $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\setminus C$;

b) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

c) $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

d) $(A\cap B)\setminus C = A\cap(B\setminus C) = (A\setminus C)\cap B$.

**5.** Să se demonstreze egalităţile:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$;

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

d) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**6.** Fie aplicaţia (funcţia) $f$: $\{1;2,3,4\}\to\{-1,1,3,5\}$, definită astfel: $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$ şi funcţia $g$: $\{1,2,3,4\}\to\{-1,1,3,5\}$, astfel încât $g(x) = 2x-3$. Să se arate că $f = g$ şi să se traseze graficul acestei funcţii.

**7.** Fie funcţia $f$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0,\\ -x^2+2, & \text{dacă } 0<|x|\le 1,\\ |x|, & \text{dacă } |x|>1. \end{cases}$$

a) Să se determine $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$;

b) să se traseze graficul funcţiei date $f(x)$.

**8.** Pentru funcţia $y = tg\,x$, să se afle imaginea mulţimii

$$A = \{x\in\mathbf{R}\mid |x|<\frac{\pi}{2}\}$$

şi preimaginea mulţimii $B = \{y\in\mathbf{R}\mid |y|\le 1\}$.

**9.** Fie funcţiile $f_1$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_1(x) = x^2$, $f_2$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_2(x) = 2^x$, $f_3$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_3(x) = x^3$, $f_4$: $\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$, $f_4(x) = \ln x$. Care din aceste funcţii sunt injective, surjective, bijective?

**10.** Considerăm funcţiile $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$ şi $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ şi $f \circ g$.

**11.** Fie funcţia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x < 0, \\ x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Să se arate că $f$ este o bijecţie şi să se determine inversa sa. Să se traseze graficele funcţiilor $f$ şi $f^{-1}$.

CAPITOLUL 2

# Sisteme de ecuații liniare și rezolvarea lor prin metoda eliminării complete

Deseori rezolvarea multor probleme economice se reduce la sisteme de ecuații de gradul întâi. In acest capitol vom lua cunoștință de unul dintre procedeele de rezolvare a sistemelor de acest fel.

## 2.1. Noțiunea de sistem de ecuații liniare și de soluție a sa

### 2.1.1. Preliminarii

Să examinăm egalitatea $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$. Ea, evident, este adevărată pentru toate valorile reale ale literei *a*.

0 egalitate adevărată pentru toate valorile reale ale literelor ce figurează în ea, precum și orice egalitate numerica adevărată, se numește *identitate în mulțimea numerelor reale,* sau simplu *identitate.* Identități sunt, de exemplu, egalitățile: $7 - 2 = 4 + 1$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

0 egalitate care conține cel puțin o literă (litera înseamnă un număr necunoscut) și nu este identitate se numește *ecuație.*

De exemplu, egalitatea $5 + x = 7$ este ecuație, deoarece este adevărata numai pentru $x = 2$.

Egalitatea $x + y = 3$ este ecuație, deoarece este adevărată numai pentru anumite valori ale simbolurilor sale. De exemplu, pentru $x = 1$, $y = 2$ sau $x = 0$, $y = 3$ etc.

Expresiile literale din ecuație, care nu sunt considerate drept constante, se numesc *necunoscute* sau *variabile.*

Ecuația $\chi + y = 3$ este un exemplu de ecuație cu două necunoscute $\chi$ și $y$. Ecuația $\chi + y + z = 5$ este un exemplu de ecuație cu trei necunoscute $x, y, z$.

Să examinăm ecuația

$$ax + by + c = 0 \qquad (2.1)$$

(sau $ax + by = -c$), unde $x, y$ sunt necunoscutele ecuației, iar a, b, c - numere reale, numite coeficienții acestei ecuații. Observăm că ecuația (2.1) conține necunoscutele $x$ și $y$ la puterea întâi. De aceea ecuația (2.1) se numește *ecuație algebrică de gradul întâi în* raport cu necunoscutele $x$ și $y$. Imaginea geometrică a ecuației (2.1), adică mulțimea tuturor punctelor $M(x,y)$ coordonatele cărora satisfac această ecuație, după cum se știe, reprezintă în sistemul de coordonate din plan $Oxy$ o linie dreaptă. In legătură cu aceasta, ecuația (2.1) se numește, de asemenea, și *ecuație liniară cu două necunoscute (variabile)* $x$ și $y$.

Prin analogie, în caz general, o ecuație de forma

$$a1\ x1 + a2\ x2 + \ldots + an\ xn = b1, \qquad (2.2)$$

unde $a1, a2, \cdots > an$ sunt coeficienți, iar $b1$ - număr numit termenul liber al acestei ecuații, se numește ecuație algebrică de gradul întâi în raport cu necunoscutele $x1, x2, \ldots, xn,$ sau *ecuație liniară cu n necunoscute (variabile).*

Un sistem de valori pentru necunoscute: $x1 = C1$, $x2 = C2, \ldots$, $x_n = C_n$, care verifică ecuația (2.2), adică o transformă într-o identitate, se numește *soluție* a acestei ecuații.

De exemplu, pentru ecuația $2x1 + 3x2 - x3 = 1$ soluții sunt $x1 = 0$, $x2 = 0, x3 = -1$ ; $x1 = 1, x2 = 2, x3 = 7$ etc.

### 2.1.2. Definițiile de bază

Ecuațiile liniare de forma $ax = b$ și sistemele de ecuații de forma:

$$\begin{cases} \alpha_1 x + b_1 y = c_1, \\ \alpha_2 . \tau + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

cu coeficienți reali $\alpha$,b, $\alpha_1$, $b_1$, $c_1$, $\alpha_2$,$b_2$, $c_2$ au fost cercetate în cursul respectiv de matematică în școală.

Scopul nostru este de a învăța sa operăm cu sisteme de ecuații de gradul I de forma generală:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Un astfel de sistem (2.3) se numește *sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute,* sau simplu *sistem de ecuații liniare* (pe scurt - *sistem liniar):* aici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (pe scurt - $x_i$ ) sunt necunoscutele sistemului, care trebuie determinate; numărul necunoscutelor *n* poate fi mai mic, mai mare sau egal cu numărul ecuațiilor *m*;

*aij (i* = 1,2,..., m; *j* = 1,2,...,n) sunt numere date, numite *coeficienții necunoscutelor* (sau *coeficienții sistemului);* se citește *a — i — j,* de exemplu a*12* este α-unu-doi. Primul indice la a*ij* îmseamnă numărul ecuației în sistem, iar al doilea - numărul necunoscutei pe lângă care este situat acest coeficient;

*b1, b2,..., bm* - numere care se numesc *termenii liberi* (ai ecuațiilor sau ai sistemului de ecuații (2.3)).

Așadar, *aij* este coeficientul din ecuația cu numărul de ordine *i,* situat pe lângă necunoscuta cu numărul de ordine *j* a sistemului; *bi* este termenul liber din ecuația *i* a sistemului. Valorile necunoscutelor *xj* precum și coeficienții *aij* și *bi* îi vom considera ca numere reale. Totuși întreg conținutul capitolelor referitor la sistemele de ecuații liniare se extinde asupra cazului numerelor complexe oarecare, deja cunoscute cititorului din cursul preuniversitar.

O ecuație de forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,$$

adică ecuația. în care termenul liber este egal cu zero, se numește *ecuație liniară omogenă.* Sistemul (2.3) se numește *sistem de ecuații liniare omogene,* sau pe scurt *sistem omogen,* dacă toți termenii liberi ai săi *b1,b2,. ..., bm* sunt egali cu zero.

Deci, prin definiție, sistemul omogen are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Dacă în sistemul liniar (2.3) nu toţi termenii liberi sunt egali cu zero, atunci sistemul se numeşte *neomogen.*

Scriem tabelul dreptunghiular compus din coeficienţii necunoscutelor sistemului (2.3):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Acest tabel se numeşte *matricea coeficienţilor sistemului*, sau simplu *matricea sistemului.* El conţine $m$ linii şi $n$ coloane.

Tabelul

$$\overline{A} = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

obţinut din matricea $A$ a sistemului (2.3) prin anexarea la ea a coloanei termenilor liberi, se numeşte *matricea extinsă* a sistemului.

Dacă $A$ constă din $m$ linii şi $n$ coloane, atunci spunem că $A$ este matrice de tipul $m \times n$ şi scriem $A_{m\times n}$. În cazul particular $m = n$, matricea $A$ se numeşte *matrice pătratică de ordinul* $n$.

E firesc, de asemenea, să se amintească despre linia cu numărul de ordine $i$: $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ şi despre coloana cu numărul de ordine $j$:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

ale matricei (2.4).

Un sistem (ansamblu) ordonat de numere (valori) $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ se numeşte *soluţie* a sistemului de ecuaţii liniare (2.3) dacă, înlocuind în sistemul (2.3) necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectiv, prin aceste numere, toate ecuaţiile sistemului sunt transformate în identităţi.

Se zice, de asemenea, că acest ansamblu de numere $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ satisface (verifică) ecuaţiile sistemului (2.3). Soluţia sistemului de regulă o vom scrie ca linie $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$.

Nu fiecare sistem de forma (2.3) are soluţie. Astfel, de exemplu, sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

nu are nici o soluţie, deoarece dacă ar exista soluţia $x_1^\circ, x_2^\circ$ a acestui sistem, atunci, substituind această soluţie în sistem, vom avea în membrii stângi ai ambelor egalităţi acelaşi număr $x_1^\circ + x_2^\circ$ şi, deci, am obţine $1 = 0$ (ceea ce nu este adevărat).

Dacă sistemul de ecuaţii (2.3) admite (are) cel puţin o soluţie, atunci se spune că sistemul este *compatibil*; contrar, sistemul este *incompatibil*. Sistemul se numeşte *compatibil determinat* dacă el are o singură soluţie (caz de *unicitate*) şi se numeşte *compatibil nedeterminat* dacă el admite mai mult decât o singură soluţie (caz de *nedeterminare*).

În ultimul caz, după cum va fi arătat în cele ce urmează, sistemul are o mulţime infinită de soluţii.

Exemple.

1. Sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases}$$

are o singură soluţie: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Deci acest sistem este compatibil determinat.

2. Sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 = 8 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

Într-adevăr, ecuaţia a doua rezultă din prima ecuaţie prin înmulţirea ambilor membri ai acesteia cu 2. De aceea sistemul se reduce la o singură ecuaţie cu două necunoscute. Considerând, de exemplu, prima ecuaţie şi rezolvând-o în raport cu $x_1$, căpătăm $x_1 = 2 + \frac{3}{2}x_2$. Atribuind variabilei $x_2$ valori arbitrare şi calculând din ultima egalitate valorile respective ale necunoscutei $x_1$, obţinem, în aşa fel, o mulţime infinită de soluţii ale sistemului dat. De exemplu, $x_2 = 0$, $x_1 = 2$; $x_2 = 2$, $x_1 = 5$; $x_2 = -2$, $x_1 = -1$ etc.

3. Sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

după cum a fost arătat, este incompatibil.

Problema principală a teoriei sistemelor de ecuaţii liniare constă în aflarea tuturor soluţiilor sistemului, dacă ele există, sau în stabilirea că sistemul este incompatibil.

## 2.2. Echivalenţa sistemelor liniare

Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

şi un sistem liniar cu acelaşi complet de necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{k1}x_1 + a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k. \end{cases} \tag{2.2}$$

**Definiţie.** Două sisteme de ecuaţii liniare (2.1) şi (2.2) cu acelaşi complet de necunoscute se numesc *echivalente* în următoarele cazuri:

a) dacă fiecare soluţie a primului sistem este soluţie şi pentru al doilea şi reciproc;

b) dacă ambele sisteme sunt incompatibile.

Sistemele echivalente trebuie să aibă aceleaşi complete de necunoscute, însă numărul de ecuaţii în ele poate şi să nu coincidă. Trecerea de la sistemul (2.1) la sistemul (2.2), echivalent cu primul, şi invers o vom nota prin simbolul "$\sim$" şi vom scrie (2.1)$\sim$ (2.2). Observăm că noţiunea de echivalenţă a sistemelor liniare posedă *proprietatea de tranzitivitate*, adică din (2.1) $\sim$(2.2), (2.2)$\sim$(2.2)$'$ rezultă (2.1)$\sim$(2.2)$'$, unde (2.2)$'$ este un alt sistem liniar, echivalent sistemului (2.2).

Pentru a rezolva sistemul de ecuaţii (2.1), el este, de obicei, transformat într-un alt sistem, mai simplu. În acest scop pot fi aplicate numai transformări care trec sistemul liniar într-un sistem echivalent cu el. Din acestea fac parte, printre altele:

1) permutarea (schimbarea locurilor între ele) a două ecuaţii din sistem;

2) înmulţirea ambilor membri ai unei ecuaţii a sistemului cu un număr arbitrar $\alpha \neq 0$ (pe scurt: *înmulţirea unei ecuaţii cu un număr* $\alpha \neq 0$);

3) adăugarea (sau adunarea) la ambii membri ai unei ecuaţii a membrilor corespunzători ai altei ecuaţii a sistemului, înmulţite în prealabil cu un număr arbitrar $\alpha$ (pe scurt: *adăugarea la o ecuaţie a altei ecuaţii înmulţite cu un număr* $\alpha$).

Transformările 1), 2), 3) se numesc *transformări elementare* (asupra unui sistem liniar).

Criteriul suficient de echivalenţă a sistemelor se conţine în următoarea afirmaţie.

**Teorema 2.1.** *Dacă un sistem liniar este obţinut din altul prin aplicarea unei consecutivităţi finite de transformări elementare, atunci aceste sisteme sunt echivalente.*

▷ Vom demonstra mai întâi echivalenţa a două sisteme liniare (2.3) şi (2.4), unde (2.4) este obţinut din (2.3) ca rezultat al aplicării unei singure transformări elementare. Pentru aceasta, transcriem sistemul dat (2.3), evidenţiind în el două ecuaţii – cu numerele de ordine $i$ şi $l$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dacă schimbăm locul ecuaţiilor cu numerele de ordine $i$ şi $l$ în sistemul (2.3), atunci, evident, obţinem un alt sistem (2.3)′, în care înseşi ecuaţiile, ca atare, nu se modifică, dar se schimbă numai ordinea lor de înscriere în sistem (sistemul (2.3)′ nu este arătat). De aceea, dacă numerele $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ satisfac sistemul (2.3), atunci ele vor satisface şi sistemul (2.3)′ şi reciproc. Rămâne de observat că dacă unul dintre sistemele (2.3) şi (2.3)′ este incompatibil, atunci va fi incompatibil de

asemenea şi celălalt sistem (raţionamentul – de la contrariu). Aceasta înseamnă că la transformarea de tipul 1) sistemele (2.3) şi (2.3)′ sunt echivalente: (2.3) ∼(2.3)′.

Dacă asupra sistemului (2.3) este efectuată o transformare de tipul 2), atunci vom avea sistemul (2.4), în care toate ecuaţiile, în afară de una, de exemplu ecuaţia "$i$", vor rămâne aceleaşi, iar ecuaţia $i$ se înmulţeşte cu numărul $\alpha \neq 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \ldots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

În acest caz, e evident că dacă ansamblul de numere $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ este soluţie a sistemului (2.3), atunci acest ansamblu va fi soluţie şi a sistemului (2.4) şi reciproc. Observăm, de asemenea, că incompatibilitatea unuia dintre sistemele (2.3) sau (2.4) implică incompatibilitatea celuilalt.

Prin urmare, la transformarea de tipul 2) avem (2.3)∼ (2.4).

Să arătăm acum că transformarea de tipul 3) transformă sistemul într-un sistem echivalent cu el. Pentru aceasta, toate ecuaţiile sistemului (2.3), în afară de cea cu numărul de ordine $l$, le lăsăm aceleaşi, iar la ecuaţia a $l$-a a sistemului adăugăm ecuaţia $i$ a acestui sistem, înmulţită cu numărul $\alpha$. Obţinem următorul sistem nou:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ (a_{l1} + \alpha a_{i1})x_1 + (a_{l2} + \alpha a_{i2})x_2 + \ldots + (a_{ln} + \alpha a_{in})x_n = b_l + \alpha b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Vom arăta că sistemele (2.3) şi (2.5) sunt echivalente. Fie $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ soluţie a sistemului (2.3), adică o astfel de totalitate ordonată de valori numerice ale necunoscutelor care transformă toate ecuaţiile sistemului (2.3) în identităţi. Adăugând la identitatea $l$ identitatea $i$ înmulţită cu $\alpha$, obţinem identitatea $l$ din (2.5). Prin urmare, soluţia sistemului (2.3) satisface toate ecuaţiile sistemului (2.5).

Reciproc. Dacă $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ este soluţie a sistemului (2.5), atunci, substituind-o în ecuaţiile acestui sistem, vom avea un sistem de identităţi (2.5). Adăugăm la identitatea $l$ a sistemului (2.5) identitatea $i$ a acestui sistem, înmulţită cu $(-\alpha)$. Ca rezultat, obţinem identitatea $l$ din sistemul (2.3).

Deci soluţia sistemului (2.5) satisface toate ecuaţiile sistemului (2.3).

În felul acesta, dacă sistemele (2.3) şi (2.5) au soluţii, atunci fiecare soluţie a sistemului (2.3) este soluţie şi a sistemului (2.5) şi reciproc.

Este evident, de asemenea, că dacă unul dintre sistemele (2.3) sau (2.5) e incompatibil, atunci e incompatibil şi celălalt sistem. Prin urmare, sistemele (2.3) şi (2.5) sunt echivalente.

Aşadar, dacă sistemul liniar (2.4) sau (2.5) este obţinut din sistemul (2.3) prin aplicarea unei transformări elementare, atunci sistemele (2.3) şi (2.4) sau (2.5) sunt echivalente.

În virtutea proprietăţii de tranzitivitate a noţiunii de echivalenţă a sistemelor liniare, teorema este adevărată dacă sistemul liniar este obţinut din sistemul (2.3) ca rezultat al aplicării unei consecutivităţi finite de transformări elementare. ◁

*Transformare elementară* asupra unui sistem liniar vom numi de asemenea următoarea transformare:

4) suprimarea ecuaţiei la care toţi coeficienţii necunoscutelor şi termenul liber sunt egali cu zero (pe scurt: înlăturarea ecuaţiei de forma $0 = 0$);

Uşor se poate arăta că transformarea 4) de asemenea nu schimbă soluţiile sistemului, adică dacă asupra sistemului liniar se aplică transformarea de tipul 4), atunci se obţine un sistem nou, echivalent cu cel iniţial.

E x e m p l u l 1. Considerăm sistemele de ecuaţii liniare:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -2, \\ 7x_1 - 7x_2 - 7x_3 = 21; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

Aceste sisteme sunt echivalente.

Într-adevăr, sistemul 2) e obţinut din sistemul 1) prin permutarea ecuaţiilor sale a 2-a şi a 3-a, sistemul 3) rezultă din sistemul 1) prin înmulţirea cu 7 a ecuaţiei a 3-a a sa, iar sistemul 4) e obţinut din 1) prin adăugarea la ecuaţia a 2-a a sa a ecuaţiei 1, înmulţită cu $(-3)$. Prin urmare, sistemele 2), 3), 4) sunt echivalente cu sistemul iniţial 1).

Exemplul 2. Următoarele sisteme de ecuaţii liniare, evident, sunt echivalente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_2, \\ x_3 = 8 - 2x_2. \end{cases}$$

## 2.3. Sisteme liniare explicitate

Fie sistemul de ecuaţii liniare (2.3) din p. 2.1. Vom spune că necunoscuta $x_i$ este *explicitată* dacă una dintre ecuaţiile sistemului conţine această necunoscută cu coeficientul 1, iar în toate celelalte ecuaţii ale sistemului necunoscuta $x_i$ lipseşte.

Exemplul 1. Sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 - 3x_5 = 3, \\ -2x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \end{cases} \tag{2.1}$$

conţine necunoscutele explicitate $x_1$, $x_2$, $x_4$.

Necunoscutele $x_3$ şi $x_5$ nu sunt explicitate.

Dacă fiecare ecuaţie a sistemului de ecuaţii liniare conţine o necunoscută explicitată, atunci astfel de sistem îl vom numi *sistem liniar explicitat.*

Sistemul liniar (2.1), evident, este explicitat (în raport cu necunoscutele $x_1$, $x_2$, $x_4$).

Un ansamblu de necunoscute $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ îl vom numi *complet de necunoscute explicitate* ale unui sistem de ecuaţii liniare dacă fiecare necunoscută $x_{i_k}$, $1 \leq k \leq r$, este explicitată şi fiecare ecuaţie a sistemului liniar dat conţine o singură necunoscută din acest ansamblu.

Sistemul liniar explicitat, evident, posedă complet de necunoscute explicitate.

Necunoscutele $x_{i_k}$ ce constituie completul de necunoscute explicitate ale unui sistem de ecuaţii liniare reprezintă *necunoscutele principale* (*bazice*), iar celelalte necunoscute se numesc *necunoscutele secundare* ale sistemului liniar dat.

Păstrând în membrul stâng (al fiecăreia dintre ecuaţiile sistemului explicitat) numai necunoscutele principale, iar termenii ce conţin necunoscutele secundare trecându-i în membrul drept, obţinem sistemul final de ecuaţii în care necunoscutele principale $x_{i_k}$, $1 \leq k \leq r$, depind astfel de celelalte $n - r$ necunoscute secundare, cărora li se pot da valori arbitrare.

Uşor se poate demonstra că în acest sistem, atribuind necunoscutelor secundare $x_{i_k}$, $r+1 \leq k \leq n$, valori arbitrare din $\mathbf{R}$, vom obţine toate soluţiile sistemului liniar dat. Consuiderând deci că necunoscutele secundare $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_n}$ pot lua valori arbitrare, obţinem (prin ecuaţiile acestui sistem) soluţia (parametrică) $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_n}$ ce poartă numele de *soluţia generală* a sistemului liniar dat, adică soluţia ce reprezintă mulţimea tuturor soluţiilor sistemului.

Despre atare sistem liniar final în care ecuaţiile sale sunt rezolvate în raport cu necunoscutele principale se spune că ecuaţiile (egalităţile, formulele) lui dau (reprezintă) *soluţia generală* (sau simplu *soluţia*) a sistemului liniar considerat.

Exemplul 2. În sistemul liniar explicitat (2.1) $x_1, x_2, x_4$ sunt necunoscutele principale, iar $x_3, x_5$ – necunoscutele secundare. Păstrând în ecuaţiile sistemului (2.1) necunoscutele principale în membrul stâng, iar termenii ce conţin necunoscutele secundare trecându-i în membrul drept, găsim sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 5x_3 + 3x_5, \\ x_4 = 5 + 2x_3 - x_5, \\ x_2 = 7 + x_3 - 2x_5. \end{cases} \tag{2.2}$$

Sistemul (2.2) reprezintă soluţia generală a sistemului (2.1). Evident, (2.2)~(2.1).

Necunoscutelor secundare $x_3$ şi $x_5$ li se pot atribui valori arbitrare, iar valorile necunoscutelor principale $x_1, x_2, x_4$ se vor determina în mod unic prin formulele (2.2) în funcţie de aceste valori. De exemplu, considerând $x_3 = x_5 = 0$, obţinem soluţia: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, $x_3 = 0$,

$x_4 = 5$, $x_5 = 0$; considerând valorile $x_3 = 1$, $x_5 — 2$, căpătăm o altă soluție:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 4,\ x_3 = 1,\ x_4 = 5,\ x_5 = 2 \text{ etc.}$$

Orice soluție a sistemului liniar explicitat poate fi obținută în acest mod.

Sistemul liniar explicitat, evident, întotdeauna este compatibil. Dacă ansamblul tuturor necunoscutelor sistemului liniar explicitat formează complet de necunoscute explicitate, atunci acest sistem de ecuații are o singură soluție. In caz contrar, sistemul are o mulțime infinită de soluții.

## 2.4. Metoda eliminării complete (metoda Jordan-Gauss)[1]

Problema de bază a teoriei ecuațiilor liniare constă, în primul rând, în următorul studiu: la care dintre cele trei cazuri indicate mai sus (unicitate, nedeterminare, incompatibilitate) se referă sistemul și, în primele două cazuri, să se afle soluțiile lui. Prima parte a problemei poartă denumirea de *cercetarea sistemului,* iar a doua - *rezolvarea lui.*

Se poate, de asemenea, de cercetat și de aflat soluțiile sistemului simultan.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații liniare cu coeficienți numerici e comod de folosit *metoda eliminării* necunoscutelor, numită de asemenea *metoda lui Gauss,* care are câteva scheme de calcul. Una dintre ele este *metoda eliminării succesive complete.* Această metodă numită și *metoda Jordan-Gauss,* constă în transformarea sistemului de ecuații liniare cu ajutorul unei consecutivități finite de transformări elementare într-un sistem liniar explicitat, echivalent" cu cel inițial. La rândul său, sistemul liniar explicitat ușor poate fi cercetat și soluționat. Operația necesară transformărilor corespunzătoare formează algoritmul[2] acestei metode.

Să ilustrăm această metodă mai întâi printr-un exemplu.

[1] *C* Jordan (1838-1922) - matematician francez;
K.F. Gauss (1777-1855) - matematician german.

[2] Prin *algoritm* se înțelege orice operație matematică executată conform anumitor reguli, precis determinate, care conduce după un număr finit de etape (trepte, pași), la rezolvarea problemei date.

Exemplu. Fie că trebuie rezolvat sistemul:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + \ 3x_3 + \ 3x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + \boxed{2}x_3 - 16x_4 = \ 3 \quad \text{ec. pivot}, \\ 5x_1 - 2x_2 + \ 4x_3 \qquad = 15. \end{cases} \tag{2.1}$$

Alegem un coeficient $a_{lk} \neq 0$, oarecare, pe care îl numim *pivot*. Fie, de exemplu, ales $a_{23} = 2$. Ecuaţia în care este ales pivotul vom numi-o *ecuaţia pivotului*. Împărţim ecuaţia pivotului la pivot, obţinându-se o ecuaţie în care $a'_{lk} = 1$ ($a'_{23} = 1$):

$$1,5x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 1,5. \tag{2.2}$$

Cu ajutorul acestei ecuaţii vom elimina $x_3$ din toate celelalte ecuaţii. Pentru aceasta înmulţim ecuaţia (2.2) cu coeficientul luat cu semnul opus al lui $x_3$ din prima ecuaţie, adică cu $(-3)$, şi adunăm membru cu membru ecuaţia obţinută la ecuaţia întâi a sistemului (2.1). Apoi înmulţim ecuaţia (2.2) cu $(-4)$ şi adunăm ecuaţia găsită la ecuaţia a treia.

Ca rezultat al acestor transformări, sistemul (2.1) se transformă în sistemul echivalent:

$$\begin{cases} -1,5x_1 - \ 8x_2 \qquad + 27x_4 = 6,5, \\ -1,5x_1 + \ 2x_2 + x_3 - \ 8x_4 = 1,5 - \text{I ec. pivot}, \\ \quad -x_1 - 10x_2 \qquad + 32x_4 = 9 - \text{II ec. pivot}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Deci (2.1)$\sim$(2.3). Cu aceasta se termină primul *pivotaj*, sau *iteraţie* (iteraţie se numeşte o consecutivitate de etape de calcul care se repetă în mod ciclic).

Realizăm un al doilea pivotaj. Pentru aceasta alegem un nou pivot $a'_{l_1k_1} \neq 0$ (unde $l_1 \neq l$). Fie că e ales $a'_{31} = -1$.

Evidenţiem respectiv a doua ecuaţie a pivotului (aceasta e ecuaţia a 3-a din sistemul (2.3)). Împărţim ecuaţia pivotului nou la acest pivot, adică la coeficientul $(-1)$ al necunoscutei $x_1$ din această ecuaţie, iar apoi eliminăm $x_1$ din toate celelalte ecuaţii. Obţinem:

$$\begin{cases} \qquad 7x_2 \qquad - 21x_4 = -7 - \text{III ec. pivot}, \\ -13x_2 + x_3 + 40x_4 = 15 \ - \text{I ec. pivot}, \\ x_1 + 10x_2 \qquad - 32x_4 = -9 \ - \text{II ec. pivot}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Efectuăm un al treilea pivotaj. Alegând $a''_{12} = 7$ în calitate de al III-lea pivot, evidenţiem a III-a ecuaţie a pivotului. Soluţionăm această ecuaţie în raport cu $x_2$ şi apoi eliminăm $x_2$ din toate celelalte ecuaţii.

Obţinem

$$\begin{cases} x_2 - 3x_4 = -1, \\ x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_4 = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Cu aceasta procesul eliminărilor necunoscutelor se termină, întrucât toate ecuaţiile sistemului au fost folosite ca ecuaţii ale pivotului, adică am redus sistemul iniţial (2.1) la sistemul liniar explicitat (2.5). În sistemul liniar explicitat (2.5) necunoscutele $x_1, x_2, x_3$ alcătuiesc complet de necunoscute explicitate ale acestui sistem, iar $x_4$ este necunoscuta secundară. Trecând în (2.5) termenii ce conţin necunoscuta secundară $x_4$ în membrul drept al fiecăreia dintre ecuaţiile sale, găsim

$$\begin{cases} x_2 = -1 + 3x_4, \\ x_3 = 2 - x_4, \\ x_1 = 1 + 2x_4. \end{cases} \tag{2.6}$$

Sistemul (2.5) este echivalent cu cel iniţial (2.1), deoarece el este obţinut din (2.1) îndeplinind câteva transformări elementare. În sistemul (2.6) necunoscutele principale $x_1, x_2, x_3$ sunt exprimate prin necunoscuta secundară $x_4$. Ultimul sistem liniar (2.6) este *soluţia generală* a sistemului iniţial (2.1).

Atribuind necunoscutei secundare valori numerice concrete, obţinem soluţii care poartă numele de *soluţii particulare* ale sistemului (2.1). De exemplu, dând valoarea $x_4 = 0$, avem soluţia particulară $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$; atribuind valoarea $x_4 = 1$, capătăm altă soluţie particulară: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ a sistemului (2.1). Aceste soluţii pot fi scrise de asemenea sub formă de "linie de numere":

$$\overline{X}_0 = (1, -1, 2, 0), \qquad \overline{X}_1 = (3, 2, 1, 1).$$

Sistemul (2.1), evident, are o mulţime infinită de soluţii particulare şi toate aceste soluţii se conţin în soluţia generală (2.6).

Acea soluţie particulară care se capătă din soluţia generală dând tuturor necunoscutelor secundare valoarea zero se numeşte *soluţia de bază* corespunzătoare completului dat de necunoscute explicitate.

În felul acesta, soluţia particulară a sistemului (2.1) obţinută dând valoarea $x_4 = 0$, adică $\overline{X}_0 = (1, -1, 2, 0)$, este soluţia de bază corespunzătoare completului de necunoscute explicitate $x_1, x_2, x_3$.

Menţionăm că dacă sistemul (2.1) va fi rezolvat nu în raport cu $x_1, x_2, x_3$, dar de exemplu în raport cu $x_2, x_3, x_4$, exprimându-le prin $x_1$, vom avea un alt triplet de necunoscute principale $x_2, x_3, x_4$. Dând

necunoscutei secundare valoarea $x_1 = 0$, vom obţine o altă soluţie de bază. Menţionăm, de asemenea, că în alte cazuri, după cum am constatat în p .2.3, soluţia generală a sistemului poate să conţină mai mult de o singură necunoscută secundară.

În cele ce urmează vom expune metoda eliminării complete în cazul general.

Fie sistemul de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n &=& b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1}x_1 + \ldots + a_{lj}x_j + \ldots + a_{lk}x_k + \ldots + a_{ln}x_n &=& b_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n &=& b_m. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Aici $a_{ij}$ sunt coeficienţii necunoscutelor $x_j$, iar $b_i$ – termenii liberi $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Alegem în matricea sistemului (2.7) un element $a_{lk} \neq 0$, oarecare, pe care îl numim *pivotul transformării*, sau simplu *pivot*. Respectiv, ecuaţia $l$ în care este situat pivotul vom numi-o *ecuaţia pivotului*, iar coloana $k$ în care se află pivotul – *coloana pivotului*. Împărţim ecuaţia pivotului $a_{lk}$ la acest pivot şi o reprezentăm astfel:

$$a'_{l1}x_1 + \ldots + a'_{lj}x_j + \ldots + 1 \cdot x_k + \ldots + a'_{ln}x_n = b'_l, \tag{2.8}$$

unde

$$a'_{lj} = a_{lj}/a_{lk} \text{ (pentru } j = 1, 2, \ldots, n), \quad b'_l = b_l/a_{lk}. \tag{2.9}$$

Cu ajutorul acestei ecuaţii eliminăm necunoscuta $x_k$ din toate celelalte ecuaţii. Pentru aceasta se adună, membru cu membru, la ecuaţia $i$ $(i = 1, 2, \ldots, m$, în afară de $i = l$, adică $i \neq l)$ ecuaţia (2.8) înmulţită cu $(-a_{ik})$. Rezultă pentru numerele $i$, în afară de $i = l$, ecuaţiile:

$$a'_{i1}x_1 + \ldots + a'_{ij}x_j + \ldots + 0 \cdot x_k + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i, \tag{2.10}$$

unde $a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik} \cdot a'_{lj}$, $b'_i = b_i - a_{ik} \cdot b'_l$, care, în virtutea formulelor (2.9), se pot scrie şi sub forma

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{lk}}, \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

(pentru $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq l$).

Obţinem un sistem nou compus din ecuaţiile (2.8) şi (2.10), care poate fi transcris în felul următor:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1j}x_j + \ldots + 0 \cdot x_k + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ \ldots \\ a'_{i1}x_1 + \ldots + a'_{ij}x_j + \ldots + 0 \cdot x_k + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ \ldots \\ a'_{l1}x_1 + \ldots + a'_{lj}x_j + \ldots + 1 \cdot x_k + \ldots + a'_{ln}x_n = b'_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ \ldots \\ a'_{m1}x_1 + \ldots + a'_{mj}x_j + \ldots + 0 \cdot x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{2.12}$$

Cu aceasta se termină primul pivotaj (I-a iteraţie a metodei eliminării). Sistemul obţinut (2.12), spre deosebire de cel iniţial, conţine coloana unitară de coeficienţi ai necunoscutei $x_k$ (coloană unitară se numeşte coloana de numere în care numai un element este egal cu 1, iar toate celelalte sunt egale cu 0), adică conţine necunoscuta explicitată $x_k$.

Efectuăm un al doilea pivotaj (a II-a iteraţie), considerând deja sistemul (2.12) ca iniţial. Pentru aceasta alegem un nou, adică al doilea pivot, $a'_{l_1 k_1} \neq 0$ (unde $l_1 \neq l$). După transformarea tuturor coeficienţilor sistemului (2.12), iarăşi după formulele (2.9) şi (2.11), vom avea un sistem nou în care deja vor fi două coloane unitare pe lângă necunoscutele $x_k$ şi $x_{k_1}$ etc.

Dacă în procesul transformărilor elementare la un anumit pas o ecuaţie devine contradictorie, adică are forma

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b'_i \neq 0,$$

atunci această înseamnă că sistemul (2.7) este *incompatibil*. În acest caz, procesul eliminărilor din sistem a luat sfârşit. Dacă ecuaţii contradictorii nu sunt, atunci procesul eliminărilor continuă. Înainte de a efectua următorul pivotaj (iteraţie), trebuie suprimate în sistemul de ecuaţii toate ecuaţiile triviale (dacă sunt), adică ecuaţiile de forma:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Sistemul obţinut după aceasta poate fi transformat din nou.

Procesul de eliminări continuă până atunci când nu mai există nici o necunoscută încă neeliminată, care să mai apară efectiv (explicitat) în vreuna din ecuaţiile rămase (adică nefolosite ca ecuaţie a vreunui pivot, dacă asemenea ecuaţii mai există). Acest proces deja terminat constă din îndeplinirea unui număr finit de $r$ iteraţii, în urma cărora

se obține un sistem liniar explicitat ce consta din $r$ ecuații. In acest caz, sistemul (2.7) este *compatibil.*

Deosebim două sub cazuri:

a) daca $r = n$, sistemul este *compatibil determinat,* adică are unica soluție;

b) daca $\tau < n$, sistemul este *compatibil nedeterminat,* adică sistemul admite mai multe soluții distincte. Ultimul dintre sistemele transformate, fiind un sistem liniar explicitat, va determina *soluția generală a sistemului* inițial. Pentru a căpăta această soluție generală, trebuie ultimul sistem transformat (sistemul liniar explicitat) să-l rezolvăm în raport cu $r$ necunoscute principale (bazice) ale sale, care depind astfel de celelalte $n - r$ necunoscute secundare.

Metoda Jordan-Gauss permite nu numai de a rezolva, dar și de a da răspuns la întrebarea despre compatibilitatea sistemului, adică de a rezolva și cerceta sistemul liniar concomitent.

## 2.5. Tabelele lui Gauss (de sistematizare a calculelor după metoda Jordan-Gauss)

Calculele arătate mai sus la îndeplinirea primului (sau următorului) pivotaj al metodei eliminării complete e comod să fie sistematizate în așa-numitele tabele ale lui Gauss (a se vedea tabelul 1, subtabelele I și II). Iu loc să transformăm însuși sistemul de ecuații liniare (2.7) din p. 2.4, vom transforma de fiecare dată numai coeficienții acestor tabele. Tabelul inițial I al lui Gauss este alcătuit în felul următor. In linia de titlu sunt arătate (se scriu) necunoscutele, iar mai jos - elementele corespunzătoare ale matricei extinse a sistemului (a se vedea tabelul I), care și vor fi transformate conform formulelor (2.9) și (2.11) din p. 2.4.

In afară de acestea, în partea dreaptă a tabelului se mai adaugă așa-numita coloană de control $\sum$. Elementele ei reprezintă sumele după linii ale elementelor respective ale tabelului:

$$\sigma_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in} + b_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad (2.1)$$

unde $i = 1,2,\ldots$ ,.m.

Elementele $\sigma_i$ se transformă conform formulelor:

$$\sigma_i' = \sigma_i - \frac{a_{ik} \cdot \sigma_l}{a_{lk}}, \quad \sigma_l' = \sigma_l / a_{lk} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq l). \tag{2.2}$$

Într-adevăr, pornind de la formulele (2.9), (2.11) din p. 2.4 şi de la (2.1), rezultă:

$$\sigma_i' = b_i' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}' = (b_i - \frac{a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}}) + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{lk}}) =$$

$$= (b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}) - (\frac{a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{lk}}) =$$

$$= \sigma_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} (b_l + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}) = \sigma_i - \frac{a_{ik} \cdot \sigma_l}{a_{lk}};$$

$$\sigma_l' = b_l' + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}' = b_l / a_{lk} + \sum_{j=1}^{n} (a_{lj} / a_{lk}) =$$

$$= (b_l + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}) / a_{lk} = \sigma_l / a_{lk}, \ (i \neq l).$$

De aceea, calculând elementele de control prin două metode, adică aplicând formulele (2.2) şi (2.1) şi comparând rezultatele, putem, în aşa fel, găsi greşeala comisă.

În tabelul 1 se reprezintă, respectiv, tabelul iniţial şi cel transformat al lui Gauss în caz general.

Tabelul iniţial I exprimă sistemul dat de ecuaţii (2.7) din p. 2.4, iar tabelul transformat II – sistemul nou de ecuaţii (2.12) din p. 2.4, echivalent cu cel dat.

Pentru calcularea elementului $a_{ij}'$, conform formulelor (2.11) din p. 2.4, putem să ne conducem de o regulă mnemotehnică, aşa-numita "*regulă a dreptunghiului*", care constă în următoarele:

alegem în tabelul dat (în matricea sistemului) un element $a_{lk} \neq 0$, pe care îl numim *pivot*. Acest element în tabel îl evidenţiem, trasând în jurul lui un pătrat mic sau un dreptunghi;

distingem în acest tabel aşa-numitele *linia pivotului* (sau *linie-pivot*) şi *coloana pivotului* (sau *coloană-pivot*), la intersecţia cărora se află pivotul.

Tabelul 1

| | $x_1 \dots x_j \dots x_k \dots x_n$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| I | $a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1k} \dots a_{1n}$ | $b_1$ | $\sigma_1$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ik} \dots a_{in}$ | $b_i$ | $\sigma_i$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a_{l1} \dots a_{lj} \dots \boxed{a_{lk}} \dots a_{ln}$ | $b_l$ | $\sigma_l$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a_{m1} \dots a_{mj} \dots a_{mk} \dots a_{mn}$ | $b_m$ | $\sigma_m$ |
| II | $a'_{11} \dots a'_{1j} \dots 0 \dots a'_{1n}$ | $b'_1$ | $\sigma'_1$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a'_{i1} \dots a'_{ij} \dots 0 \dots a'_{in}$ | $b'_i$ | $\sigma'_i$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a'_{l1} \dots a'_{lj} \dots 1 \dots a'_{ln}$ | $b'_l$ | $\sigma'_l$ |
| | $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| | $a'_{m1} \dots a'_{mj} \dots 0 \dots a'_{mn}$ | $b'_m$ | $\sigma'_m$ |

Pentru transformarea elementului $a_{ij}$ $(i \neq l)$ proiectăm imaginar acest element pe linia pivotului şi coloana pivotului. Ca rezultat, se obţine un dreptunghi în vârfurile căruia se află elementele $a_{ij}$, $a_{lj}$, $a_{ik}$, $a_{lk}$.

Tabelul 2

Acum formulele (2.11) din p. 2.4 şi (2.2), adică

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{lj}}{a_{lk}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}},$$

$$\sigma'_i = \sigma_i - \frac{a_{ik} \cdot \sigma_l}{a_{lk}} \text{ (pentru } i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n;\ i \neq l)$$

pot fi exprimate verbal în felul următor:

*Pentru calcularea elementului transformat $a'_{ij}$ (în care se transformă $a_{ij}$) trebuie din elementul $a_{ij}$, situat în unul dintre vârfurile dreptunghiului, de scăzut produsul elementelor $a_{ik}$ şi $a_{lj}$, situate în*

*celelalte două vârfuri opuse ale dreptunghiului, împărţit la pivotul $a_{lk}$, situat în vârful al 4-lea al dreptunghiului.*

Conform acestei reguli, se calculează în mod analog şi elementele $b'_i$ şi $\sigma'_i$.

Această regulă pentru transformarea elementului ce nu aparţine liniei sau coloanei pivotului se numeşte *regula dreptunghiului.*

Se poate introduce acum următoarea noţiune:

Fie un sistem liniar, scris sub forma de tabelul I, în care este ales pivotul $a_{lk}$. Se numeşte *transformare Jordan* a unui sistem liniar cu pivotul $a_{lk} \neq 0$ ansamblul următoarelor transformări:

a) elementele liniei pivotului $a_{lk}$ din tabelul I se împart la acest pivot;

b) în coloana pivotului elementul $a_{lk}$ este transformat în 1, restul elementelor acesteia se înlocuiesc cu zero;

c) toate celelalte elemente se recalculează conform regulii dreptunghiului.

Ca rezultat al acestor transformări tabelul I trece în tabelul II; transformarea Jordan reprezintă o iteraţie a metodei Jordan-Gauss.

Procesul rezolvării unui sistem de ecuaţii liniare prin metoda eliminării complete cu aplicarea tabelelor lui Gauss include următoarele etape (puncte):

1) În linia de titlu scriem necunoscutele sistemului şi notarea coloanei termenilor liberi şi a celei de control (a se vedea tabelul 1).

   Mai jos, în tabelul iniţial I al lui Gauss, corespunzător, scriem matricea extinsă a sistemului (2.7) din p. 2.4 şi coloana de control din elementele $\sigma_i$, calculate după formula (2.1).

   Mai departe se începe îndeplinirea I-lui (sau următorului) pivotaj conform următorului algoritm (algoritmul de explicitare a unui sistem liniar).

2) Se alege pivotul $a_{lk} \neq 0$ şi *se distinge* în tabel *linia pivotului* şi *coloana pivotului* la intersecţia cărora se află pivotul $a_{lk}$. Pentru simplificarea calculelor este comod de ales pivotul egal cu 1, iar dacă acesta lipseşte, atunci alegem pe cel mai potrivit.

3) Se calculează elementele $a'_{lj}$ ale liniei transformate a pivotului conform formulei (2.9) din p. 2.4, inclusiv $b'_l$ şi $\sigma'_l$, adică prin împărţirea elementelor liniei pivotului la pivotul dat $a_{lk}$ şi linia obţinută se înscrie pe locul respectiv al tabelului următor (transformat) al lui Gauss.

4) Se însumează toate elementele $a'_{lj}$ şi $b'_l$ ale liniei transformate a pivotului (cu excepţia $\sigma'_l$) şi rezultatul obţinut se compară cu $\sigma'_l$. Dacă nu este divergenţă, atunci trecem la punctul 5).

5) În coloana transformată a pivotului din tabelul următor al lui Gauss se înscriu elementele zero (în afară de $a'_{lk} = 1$).

6) Se calculează elementele $a'_{ij}$ a celorlalte linii din tabelul următor conform formulei (2.11) din p. 2.4 (regula dreptunghiului), inclusiv $b'_i$ şi $\sigma'_i$. Pentru aceasta calculul se realizează după linii.

7) După calcularea elementelor fiecărei linii se efectuează însumarea tuturor elementelor $a'_{ij}$ şi $b'_i$ (cu excepţia $\sigma'_i$) şi rezultatele obţinute se compară cu elementele corespunzătoare $\sigma'_i$ ale coloanei de control, la fel ca în punctul 4).

Cu aceasta se termină îndeplinirea unui pivotaj (iteraţie), după care tot calculul se repetă începând iarăşi de la punctul 2). Deci alegem un nou pivot $a'_{l_1k_1} \neq 0$ cu condiţia $l_1 \neq l$, adică linia pivotului nou trebuie să aibă alt număr de ordine faţă de cea precedentă etc.

În orice etapă a transformării tabelelor lui Gauss, pentru fiecare linie $i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) a tabelului în curs de transformare, are loc unul dintre următoarele trei cazuri, ce se exclud reciproc:

1. Toţi coeficienţii $a'_{ij} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), iar termenul liber respectiv $b'_i \neq 0$. În acest caz, ecuaţia reprezentată de această linie are forma $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b'_i \neq 0$. În cazul dat, sistemul (2.7) din p. 2.4 este incompatibil. La apariţia în tabelul lui Gauss a unei astfel de linii calculul se opreşte.

2. Toate elementele $a'_{ij} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) şi termenul liber $b'_i = 0$. Astfel de linie poate fi exclusă din procesul transformărilor de mai departe (şi chiar din tabel), deoarece ecuaţia corespunzătoare acestei linii nule are forma $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots +$

$+0*x_n = 0$ și deci este satisfăcută pentru orice valori ale necunoscutelor. In așa caz, ecuația sistemului inițial (2.7) din p. 2.4, corespunzătoare după numărul de ordine ecestei linii nule, este consecință a celorlalte ecuații ale sistemului și de aceea reiese că ea este de prisos.

3. Cel puțin unul dintre elementele $a'_{ij}$ ($j = 1,2,\ldots, n$) ale liniei date $i$ este diferit de zero. Astfel de linie participă la transformările de mai departe.
   Procesul de pivotaje (iterații) continuă până atunci când. constatăm că: sau liniile tabelului sunt toate "folosite" ca linii ale pivoturilor respective, sau în toate liniile rămase (care nu au fost luate ca linie a vreunui pivot) nu se află nici un pivot nou diferit de zero. Ca rezultat, sistemul se dovedește a fi compatibil sau incompatibil.

Sistemul compatibil se consideră rezolvat îndată ce tabelul transformat al lui Gauss capătă așa formă încât conține atâtea coloane unitare câte linii nenule sunt în el (adică linii care constau nu numai din zerouri) și totodată toate unitățile acestor coloane aparțin unor linii diferite. Aceste *coloane unitare* le vom numi *de bază,* iar unitățile lor - *unități bazice.* Vom spune că *sistemul de coloane* al tabelului lui Gauss (precum și sistemul de ecuații corespunzător acestui tabel) *este adus la baza unitară.*

Sistemul liniar adus la baza unitară este, evident, un sistem liniar explicitat.

Necunoscutele care corespund coloanelor unitare de bază ale ultimului tabel (de altfel, care se află în linia de titlu a tabelului lui Gauss în dreptul acestor coloane unitare), adică necunoscutele în raport cu care este rezolvat sistemul liniar dat, sunt *necunoscutele principale (bazice),* celelalte - *necunoscutele secundare.*

Să demonstrăm metoda de calcul expusă mai sus la rezolvarea unor sisteme de ecuații.

Exemplul 1. Folosind tabelele lui Gauss, să se rezolve sistemul de ecuații liniare (2.1) din p. 2.4.

In tabelul 3 este reprezentată schema rezolvării sistemului (2.1) din p. 2.4.

In tabelul inițial ai lui Gîauss, corespunzător sistemului (2.1) din p. 2.4, alegem în calitate de pivot elementul $a_{23} = 2$ (adică $a_{ij}$ pentru

$l = 2$, $k = 3$) şi distingem linia pivotului şi coloana pivotului ce conţin pivotul $a_{23} = 2$.

Al doilea tabel il începem cu calcularea elementelor şi completarea liniei transformate a pivotului. Pentru aceasta, toate elementele liniei pivotului (de asemenea şi $\sigma_2 = -4$) le împărţim la pivotul $a_{23} = 2$.

Tabelul 3

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sistemul | 3 | −2 | 3 | 3 | 11 | 18 |
| iniţial | 3 | 4 | [2] | −16 | 3 | −4 |
| | 5 | −2 | 4 | 0 | 15 | 22 |
| I | −1,5 | −8 | 0 | 27 | 6,5 | 24 |
| pivotaj | 1,5 | 2 | 1 | −8 | 1,5 | −2 |
| | [−1] | −10 | 0 | 32 | 9 | 30 |
| II | 0 | [7] | 0 | −21 | −7 | −21 |
| pivotaj | 0 | −13 | 1 | 40 | 15 | 43 |
| | 1 | 10 | 0 | −32 | −9 | −30 |
| III | 0 | 1 | 0 | −3 | −1 | −3 |
| pivotaj | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| | 1 | 0 | 0 | −2 | 1 | 0 |

În coloana transformată a pivotului din tabelul al doilea înscriem peste tot zerouri (în afară de $a'_{23} = 1$).

Elementele celorlalte linii se calculează conform regulii dreptunghiului, adică aplicând formulele (2.11) din p. 2.4 şi (2.2). De exemplu, pentru elementul $a_{12} = -2$ din tabelul iniţial, avem în cel nou:

$$a'_{12} = -2 - \frac{4 \cdot 3}{2} = -8; \; b'_1 = 11 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 6,5;$$

$$\sigma'_1 = 18 - \frac{3(-4)}{2} = 24 \text{ etc.}$$

După terminarea primului pivotaj obţinem o coloană unitară (cu 1 pe locul doi în această coloană) pe care o notăm astfel: $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $= (0, 1, 0)'$.

Pentru îndeplinirea unui al doilea pivotaj, alegem în calitate de pivot $a'_{31} = -1$. Mai departe calculul se realizează în mod analog celui

precedent. De exemplu,

$$a''_{12} = -8 - \frac{(-10)(-1,5)}{-1} = 7;$$

$$\sigma''_1 = 24 - \frac{30(-1,5)}{-1} = -21 \text{ etc.}$$

Un al treilea pivotaj îl începem cu alegerea pivotului $a''_{12} = 7$. După îndeplinirea celui de-al treilea pivotaj obţinem tabelul lui Gauss al cărui sistem de coloane este adus la baza unitară. Acestui tabel (mai exact ultimului subtabel din tabelul 3) îi corespunde sistemul de ecuaţii adus la baza unitară (sistemul liniar explicitat):

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 = -1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 1, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x_2 = -1 + 3x_4, \\ x_3 = 2 - x_4, \\ x_1 = 1 + 2x_4. \end{cases} \tag{2.3}$$

Primele trei necunoscute $x_1, x_2, x_3$ în raport cu care este rezolvat sistemul (2.1) din p. 2.4 sunt *necunoscutele principale*, iar $x_4$ – *necunoscuta secundară*. Sistemul (2.3) reprezintă *soluţia generală* a sistemului iniţial (2.1) din p. 2.4. Dând necunoscutei secundare valoarea 0, obţinem *soluţia de bază* $\overline{X}_0 = (1, -1, 2, 0)$ a sistemului.

Din ultimul subtabel al tabelului 3 imediat rezultă soluţia de bază. Pentru aceasta este suficient, evident, de a da necunoscutei secundare $x_4$ valoarea 0, adică $x_4 = 0$. Atunci se obţine soluţia de bază $\overline{X}_0 = (1, -1, 2, 0)$. Coloana termenilor liberi ai ultimului tabel transformat al lui Gauss determină valorile necunoscutelor principale, iar unităţile bazice arată concret anume căror necunoscute principale li se înscriu aceste valori. Pentru aceasta este suficient ca în dreptul fiecărei unităţi bazice să citim în linia de titlu a tabelului lui Gauss necunoscuta principală corespunzătoare, iar în dreapta acestei unităţi (în coloana termenilor liberi) – valoarea acestei necunoscute principale.

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 10. \end{cases} \tag{2.4}$$

În tabelul 4 este reprezentată schema rezolvării sistemului (2.4).

În tabelul inițial alegem pivotul $a_{21} = 1$ și evidențiem linia și coloana pivotului ce conțin pivotul dat. Tabelul al doilea îl începem cu completarea liniei transformate a pivotului (în cazul de față ea se transcrie fără schimbări, deoarece $a_{21} = 1$).

Tabelul 4

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sistemul | 3 | −1 | 2 | 13 | 17 |
| inițial | [1] | 3 | −1 | −4 | −1 |
| | 1 | −5 | 1 | 10 | 7 |
| | 0 | −10 | 5 | 25 | 20 |
| I | 1 | 3 | −1 | −4 | −1 |
| | 0 | −8 | [2] | 14 | 8 |
| | 0 | [10] | 0 | −10 | 0 |
| II | 1 | −1 | 0 | 3 | 3 |
| | 0 | −4 | 1 | 7 | 4 |
| | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |
| III | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 |

În coloana transformată a pivotului din tabelul al doilea înșriem zerouri (în afară de $a_{21} = 1$). Celelalte elemente se calculează după regula dreptunghiului, adică conform formulelor (2.11) din p. 2.4 și (2.2). De exemplu, $a'_{12} = -1 - \frac{3 \cdot 3}{1} = -10$; $b'_1 = 13 - \frac{(-4) \cdot 3}{1} = 25$; $\sigma'_1 = 17 - \frac{(-1) \cdot 3}{1} = 20$ etc.

După terminarea I pivotaj, obținem o coloană unitară: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)'$.

Pentru îndeplinirea unui al II-lea pivotaj, alegem în calitate de pivot $a'_{33} = 2$. Mai departe calculul se efectuează în mod analog celui precedent.

Cel de-al III-lea pivotaj se începe cu alegerea pivotului $a''_{12} = 10$. După îndeplinirea iterației a treia, obținem tabelul lui Gauss, sistemul de coloane al căruia este adus la baza unitară.

Ultimului subtabel din tabelul 4 îi corespunde următorul sistem de

ecuaţii, echivalent cu sistemul iniţial (2.4):

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3, \end{cases} \tag{2.5}$$

sau

$$\begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

În sistemul (2.5) numărul $r$ de ecuaţii transformate ale pivoturilor respective este egal cu numărul $n$ de necunoscute ($r = n = 3$). De aceea sistemul (2.5), deci şi sistemul iniţial (2.4) echivalent cu el, este compatibil determinat. Unica soluţie a sa este

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3, \text{ adică } (2, -1, 3).$$

Prin metoda eliminării complete a necunoscutelor, după cum este arătat în cazul general, poate fi rezolvat şi orice sistem de ecuaţii liniare cu o matrice arbitrară a sistemului, adică pentru oricare $m$ şi $n$, unde $m > n$ sau $m < n$, sau $m = n$.

Exemplul 3. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -3, \\ 4x_1 - 5x_2 = 16, \\ 7x_1 - 1,5x_2 = 13,5. \end{cases} \tag{2.6}$$

În tabelul 5 este redată schema rezolvării sistemului (2.6).

Tabelul 5

| | $x_1$ | $x_2$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| sistemul iniţial | [2] | 3 | −3 | 2 |
| | 4 | −5 | 16 | 15 |
| | 7 | −1,5 | 13,5 | 19 |
| I | 1 | 1,5 | −1,5 | 1 |
| | 0 | −11 | 22 | 11 |
| | 0 | [−12] | 24 | 12 |
| II | 1 | 0 | 1,5 | 2,5 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | −2 | −1 |

Din tabelul 5 se observă că după îndeplinirea celui de-al doilea pivotaj obţinem în el un subtabel căruia îi corespunde sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1,5, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = -2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Sistemul (2.7) este echivalent cu sistemul (2.6). În sistemul (2.7) ecuaţia a doua este satisfăcută de oricare valori ale necunoscutelor $x_1$ şi $x_2$. Aceasta înseamnă că în sistemul (2.6) una dintre ecuaţii (a doua) este de prisos, deoarece este consecinţă a celorlalte două. Soluţia sistemului (2.7), deci şi a sistemului iniţial (2.6), este $x_1 = 1,5$, $x_2 = -2$, sau $(3/2, -2)$.

Exemplul 4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 6x_1 - 5x_2 - 11x_3 = -22. \end{cases} \tag{2.8}$$

În tabelul 6 este prezentată schematic rezolvarea sistemului (2.8).

Tabelul 6

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | [1] | 2 | 8 |
| | 6 | −5 | −11 | −22 | −32 |
| I | 2 | 3 | 1 | 2 | 8 |
| pivotaj | 28 | [28] | 0 | 0 | 56 |
| II | −1 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| pivotaj | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Din tabelul 6 rezultă că după un al doilea pivotaj obţinem în el tabelul căruia îi corespunde sistemul

$$\begin{cases} -1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2, \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Sistemele (2.8) şi (2.9) sunt echivalente. Una dintre necunoscute va fi necunoscuta secundară. Trecând în (2.9) termenii ce conţin necunoscuta $x_1$ în membrul drept al fiecăreia dintre ecuaţiile sale, găsim soluţia generală a sistemului (2.8):

$$\begin{cases} x_3 = 2 + x_1, \\ x_2 = -x_1, \end{cases}$$

unde $x_2, x_3$ sunt necunoscutele bazice, iar $x_1$ – necunoscuta secundară. Această soluţie generală poate fi scrisă sub forma $X = (x_1, -x_1, 2+x_1)$, unde $x_1$ – număr arbitrar. Soluţia de bază a sistemului este $(0, 0, 2)$.

Exemplul 5. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Scriem tabelul lui Gauss, corespunzător sistemului (2.10):

Tabelul 7

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sistemul | 1 | 2 | −1 | 3 | 5 |
| iniţial | 5 | 0 | 3 | 2 | 10 |
| | 2 | −1 | 2 | 1 | 4 |
| | 1 | 2 | −1 | 3 | 5 |
| I | 0 | −10 | 8 | −13 | −15 |
| | 0 | −5 | 4 | −5 | −6 |
| | 1 | 0 | 3/2 | 1 | 13/5 |
| II | 0 | 1 | −4/5 | 13/10 | 3/2 |
| | 0 | 0 | 0 | 3/2 | 3/2 |

Sistemul obţinut după iteraţia a II-a conţine o ecuaţie contradictorie – a treia, şi anume

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3/2.$$

În astfel de caz tragem concluzia că sistemul (2.10) este *incompatibil*, adică nu are soluţii.

Metoda eliminării complete a necunoscutelor este destul de eficientă în cazul în care avem de rezolvat câteva sisteme de ecuaţii liniare cu aceeaşi matrice a sistemului şi cu diferite coloane de termeni liberi.

În aşa caz, transformarea tuturor sistemelor poate fi efectuată paralel (concomitent) în acelaşi tabel, completându-l doar cu câteva coloane de termeni liberi.

Exemplul 6. Să se rezolve două sisteme cu una şi aceeaşi matrice a sistemului:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 1,5x_2 - 1,5x_3 = 9, \\ 5x_1 - 2,5x_2 - 0,5x_3 = 17, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 1,5x_2 - 1,5x_3 = 4,5, \\ 5x_1 - 2,5x_2 - 0,5x_3 = 7,5. \end{cases} \tag{2.12}$$

Rezolvarea simultană a ambelor sisteme este redată schematic în tabelul 8.

Tabelul 8

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ | $\widetilde{b}$ | $\sum$ | $\widetilde{\sum}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | [2] | −3 | −5 | 2 | 1 | −4 | −5 |
| | 3 | −1,5 | −1,5 | 9 | 4,5 | 9 | 4,5 |
| | 5 | −2,5 | −0,5 | 17 | 7,5 | 19 | 9,5 |
| I | 1 | −1,5 | −2,5 | 1 | 0,5 | −2 | −2,5 |
| pivotaj | 0 | [3] | 6 | 6 | 3 | 15 | 12 |
| | 0 | 5 | 12 | 12 | 5 | 29 | 22 |
| II | 1 | 0 | 0,5 | 4 | 2 | 5,5 | 3,5 |
| pivotaj | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| | 0 | 0 | [2] | 2 | 0 | 4 | 2 |
| III | 1 | 0 | 0 | 3,5 | 2 | 4,5 | 3 |
| pivotaj | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |

Din tabelul 8 rezultă că soluţia sistemului (2.11) este: $x_1 = 3,5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, adică $(7/2, 0, 1)$, iar a sistemului (2.12) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, sau $(2, 1, 0)$.

Când $m = n$, sistemul nu totdeauna este determinat, după cum arată următoarele exemple.

Exemplul 7. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Sistemului (2.13) îi corespund următoarele tabele ale lui Gauss (subtabelele din tabelul 9).

După îndeplinirea pivotajului al IV-lea, obţinem sistemul adus la baza unitară. Sistemul este compatibil determinat (deoarece $r = n = 4$) şi soluţia sa este: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_4 = 2$, $x_3 = 0$, adică $(1, -1, 0, 2)$.

Tabelul 9

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\boxed{1}$ | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 4 |
| sistemul | 2 | 3 | 2 | $-1$ | $-3$ | 3 |
| iniţial | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 9 |
| | 1 | $-3$ | 2 | $-2$ | 0 | $-2$ |
| | 1 | 2 | $-1$ | 1 | 1 | 4 |
| I | 0 | $-1$ | 4 | $-3$ | $-5$ | $-5$ |
| | 0 | $-1$ | 2 | $\boxed{1}$ | 3 | 5 |
| | 0 | $-5$ | 3 | $-3$ | $-1$ | $-6$ |
| | 1 | 3 | $-3$ | 0 | $-2$ | $-1$ |
| II | 0 | $\boxed{-4}$ | 10 | 0 | 4 | 10 |
| | 0 | $-1$ | 2 | 1 | 3 | 5 |
| | 0 | $-8$ | 9 | 0 | 8 | 9 |
| | 1 | 0 | 4,5 | 0 | 1 | 6,5 |
| III | 0 | 1 | $-2,5$ | 0 | $-1$ | $-2,5$ |
| | 0 | 0 | $-0,5$ | 1 | 2 | 2,5 |
| | 0 | 0 | $\boxed{-11}$ | 0 | 0 | $-11$ |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| IV | 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Exemplul 8. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases} \tag{2.14}$$

După I pivotaj în tabelul 10 căpătăm trei linii coincidente (identice), de unde rezultă că două ecuaţii din ultimele trei sunt "de prisos".

Ca rezultat al unui al II-lea pivotaj, obţinem două ecuaţii transformate ale pivoturilor respective ($r = 2$), pe care le putem rezolva îndată în raport cu necunoscutele $x_1$ şi $x_2$. În felul acesta, sistemul s-a dovedit a fi compatibil nedeterminat. Soluţia generală a sa este

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4, \\ x_2 = 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4, \end{cases}$$

Tabelul 10

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\boxed{1}$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $-3$ | $-3$ |
| | $3$ | $-1$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| | $2$ | $1$ | $-2$ | $-1$ | $4$ | $4$ |
| | $1$ | $3$ | $-2$ | $-2$ | $7$ | $7$ |
| | $1$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $-3$ | $-3$ |
| I | $0$ | $\boxed{5}$ | $-2$ | $-3$ | $10$ | $10$ |
| pivotaj | $0$ | $5$ | $-2$ | $-3$ | $10$ | $10$ |
| | $0$ | $5$ | $-2$ | $-3$ | $10$ | $10$ |
| | $1$ | $0$ | $-4/5$ | $-1/5$ | $1$ | $1$ |
| II | $0$ | $1$ | $-2/5$ | $-3/5$ | $2$ | $2$ |
| pivotaj | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

unde $x_1$, $x_2$ sunt necunoscutele principale, iar $x_3$, $x_4$ – necunoscutele secundare. Soluţia generală a sistemului (2.14) poate fi scrisă sub forma:

$$\overline{X} = (1 + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4,\ 2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4,\ x_3, x_4), \tag{2.15}$$

unde $x_3, x_4$ – necunoscutele secundare.

Dând necunoscutelor secundare valori nule, adică $x_3 = x_4 = 0$, găsim soluţia de bază a sistemului, corespunzătoare completului de necunoscute explicitate $x_1$, $x_2$:

$$\overline{X}_0 = (1, 2, 0, 0).$$

## 2.6. Sisteme de ecuaţii omogene liniare

Să cercetăm sistemul de ecuaţii omogene liniare (pe scurt sistemul omogen):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Sistemul omogen totdeauna este compatibil, deoarece, evident, admite soluţia nulă: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Să arătăm condiţiile în care sistemul omogen (2.1) poate avea şi alte soluţii, nenule.

Rezolvând sistemul (2.1) prin metoda Jordan-Gauss, după îndeplinirea a $r$ iteraţii vom căpăta un sistem liniar explicitat, echivalent cu sistemul (2.1) şi care conţine $r$ ecuaţii transformate ale pivoturilor respective, unde $r \leq \min(m, n)$ (prin $\min(m, n)$ înţelegem cel mai mic dintre numerele $m$ şi $n$).

Acest sistem explicitat (după renumerotarea corespunzătoare a necunoscutelor şi ecuaţiilor) va deveni:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

unde $r \leq n$; $r$ necunoscute se separă ca necunoscute principale, iar celelalte $n - r$ necunoscute vor fi secundare.

Dacă $r = n$, necunoscute secundare nu vor fi şi de aceea în acest caz *soluţia nulă va fi unica soluţie a sistemului.*

*Dacă însă $r < n$, atunci în afară de soluţia nulă sistemul omogen are de asemenea şi alte soluţii nenule.*

▷ Într-adevăr, în cazul $r < n$, sistemul explicitat (2.2) conţine necunoscute secundare. Atribuind necunoscutelor secundare valori diferite de zero, căpătăm valorile corespunzătoare ale necunoscutelor principale, adică sistemul (2.2), deci şi sistemul (2.1) echivalent cu el au soluţii nenule. ◁

Observăm că dacă în sistemul de ecuaţii (2.1) $m < n$, atunci, deoarece $r \leq m$, avem $r < n$. Aceasta înseamnă că sistemul omogen (2.1), în cazul $m < n$, are soluţii nenule. Aşadar, am demonstrat următoarea teoremă.

**Teorema 2.2.** *Orice sistem de ecuaţii omogene liniare la care numărul de ecuaţii este mai mic ca numărul necunoscutelor posedă soluţie nenulă.*

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii omogene liniare

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Conform teoremei 2.2, acest sistem omogen are soluţii nenule.

Rezolvarea schematică a sistemului (2.3) este redată de următorul tabel.

Tabelul 11

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | −3 | −2 | −1 | 2 | 0 | 2 |
| sistemul | 0 | 3 | 2 | −3 | 0 | 0 | 2 |
| iniţial | 3 | 0 | 0 | −2 | [1] | 0 | 2 |
| | 9 | −3 | −2 | −3 | 3 | 0 | 4 |
| | 0 | −3 | −2 | 3 | 0 | 0 | −2 |
| I | 0 | 3 | [2] | −3 | 0 | 0 | 2 |
| | 3 | 0 | 0 | −2 | 1 | 0 | 2 |
| | 0 | −3 | −2 | 3 | 0 | 0 | −2 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | 0 | 1,5 | 1 | −1,5 | 0 | 0 | 1 |
| | 3 | 0 | 0 | −2 | 1 | 0 | 2 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Ultimului tabel transformat al lui Gauss îi corespunde următorul sistem explicitat de ecuaţii:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 1,5x_2 + x_3 - 1,5x_4 + 0 \cdot x_5 = 0, \\ 3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Soluţia generală a sistemului este

$$\begin{cases} x_3 = -1,5x_2 + 1,5x_4, \\ x_5 = -3x_1 + 2x_4. \end{cases}$$

Atribuind necunoscutelor secundare $x_1$, $x_2$, $x_4$ valori nenule, de exemplu $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_4 = 4$, obţinem valorile corespunzătoare ale necunoscutelor bazice $x_3 = 3$ şi $x_5 = 5$, deci am găsit o soluţie nenulă: $(1, 2, 3, 4, 5)$ a sistemului omogen dat. La fel putem afla şi multe alte soluţii nenule ale acestui sistem.

## 2.7. Soluţii de bază admisibile ale sistemului de ecuaţii liniare

La rezolvarea problemelor de programare liniară, însemnătate practică au numai valorile nenegative ale variabilelor $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, care

sunt supuse anumitor condiții. De aceea este important de a putea afla nu orice soluții, ci numai *soluții nenegative* ale sistemului de ecuații liniare, adică soluții în care valorile tuturor necunoscutelor sunt numere nenegative. Astfel de soluții se numesc *soluții admisibile* (sau *posibile),* iar mulțimea tuturor soluțiilor admisibile - *domeniul soluțiilor admisibile.* · De fapt, toate metodele matematice ale programării liniare se bazează pe aflarea soluțiilor de bază nenegative, adică a *soluțiilor de bază admisibile.* Vom expune în cele ce urmează o metodă de determinare a soluțiilor de acest gen.

Fie un sistem liniar adus la baza unitară (printr-o anumită metoda, de exemplu Jordan-Gauss) și fie că termenii liberi $b_i$ ai sistemului sunt numere nenegative ($b_i \geq 0$). Acest sistem determină o soluție de bază admisibilă inițială, de exemplu $X_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_r, 0, \cdots, 0)$. Ne vom ocupa de următoarea problemă: dându-se o soluție de bază admisibilă, să precizăm regula de alegere a pivotului, încât să se poată trece de la soluția dată la următoarea, tot o soluție de bază admisibilă. Această problemă, după cum va fi demonstrat mai jos, poate fi rezolvată dacă se îndeplinesc următoarele condiții:

1) In tabelul inițial al lui Gauss, corespunzător sistemului liniar adus la baza unitară (în care toți $l \geq 0$), în calitate de coloană a pivotului alegem o astfel de coloană în care este cel puțin un element pozitiv.

2) Fie că în coloana pivotului sunt câteva elemente pozitive. Aflăm raporturile termenilor liberi corespunzători către aceste elemente §i în calitate de pivot îl alegem pe acela dintre ele pentru care raportul respectiv este minim (dacă în coloană este numai un singur element pozitiv, atunci el și va fi pivotul).

Mai departe, aplicând transformarea Jordan a sistemului cu acest, pivot, calcululăm elementele tabelului nou, transformat, al lui Gauss.

Condițiile 1) și 2) alcătuiesc *regula de alegere a pivotului.* într-un sistem liniar adus la baza unitara, transformările Jordan, la care elementul pivot corespunzător se alege conform acestei reguli, sunt numite *transformări simplex.* Așadar, o transformare simplex reprezintă, transformarea Jordan a unui sistem adus la. baza unitară, în care asupra termenilor liberi $b_i$ , asupra alegerii pivotului $a_{lk}$ (respectiv asupra coloanei și asupra liniei pivotului) se pun condiții suplimentare:

$b_i \geq 0$ (pentru toţi $b_i$), $a_{lk} > 0$ şi $b_l/a_{lk} = \min\limits_{a_{ik}>0}\{b_i/a_{ik}\}$[3] (unde $i$ sunt acele dintre numerele $1, 2, \ldots, m$ pentru care $a_{ik} > 0$).

Orice transformare simplex constituie o iteraţie.

**Teorema 2.3.** *Dacă toţi termenii liberi ai ecuaţiilor sistemului liniar sunt nenegativi, atunci după transformarea simplex a sistemului ei vor rămâne nenegativi.*

▷ Fie că în coloana $k$ a tabelului iniţial I al lui Gauss, corespunzător sistemului adus la baza unitară, sunt elemente pozitive. Şi fie $a_{lk} > 0$ un astfel de element, încât $b_l/a_{lk}$ este raportul minim dintre raporturile termenilor liberi nenegativi $b_i \geq 0$ către elementele pozitive corespunzătoare $a_{lk} > 0$ ale acestei coloane, adică $b_l/a_{lk} \leq b_i/a_{ik}$ pentru toţi $a_{ik}$ pozitivi, adică $a_{ik} > 0$. Considerăm elementul $a_{lk}$ în calitate de pivot. Îndeplinim primul pivotaj în urma căruia tabelul I al lui Gauss trece în tabelul transformat II (a se vedea tabelul 1). Elementul transformat $b'_l$ se calculează conform formulei (2.9) din p. 2.4, adică $b'_l = b_l/a_{lk}$. Dar $b_l \geq 0$, $a_{lk} > 0$. De aceea $b'_l \geq 0$. Cercetăm în continuare un oarecare alt element $b'_i$. Acest element se calculează conform formulei (2.11) din p. 2.4 (regula dreptunghiului), adică

$$b'_i = b_i - \frac{a_{ik} \cdot b_l}{a_{lk}} \text{ (pentru } i = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq l).$$

Dacă $a_{ik} \leq 0$, atunci evident $b'_i \geq 0$. Dacă $a_{ik} > 0$, atunci pe $b'_i$ îl reprezentăm astfel

$$b'_i = a_{ik}\left(\frac{b_i}{a_{ik}} - \frac{b_l}{a_{lk}}\right).$$

Dar conform condiţiei teoremei, $b_l/a_{lk} \leq b_i/a_{ik}$. Deci $\dfrac{b_i}{a_{ik}} - \dfrac{b_l}{a_{lk}} \geq$ $\geq 0$ şi prin urmare $b'_i \geq 0$. ◁

Consecinţă. *Dacă sistemul de ecuaţii liniare ai căror termeni liberi sunt nenegativi va fi rezolvat cu ajutorul transformărilor simplex, atunci soluţia de bază care se va obţine va fi nenegativă, adică o soluţie de bază admisibilă (dacă numai pentru acest sistem astfel de soluţii există).*

[3] minimum (lat.) – cel mai mic.

▷ Într-adevăr, ca rezultat al îndeplinirii succesive a transformărilor simplex, obţinem sistemul de forma

$$\begin{cases} x_1 = a^\circ_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^\circ_{1n}x_n + b^\circ_1, \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = a^\circ_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^\circ_{rn}x_n + b^\circ_r. \end{cases}$$

De aici rezultă că punând $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, obţinem soluţia de bază $(b^\circ_1, \ldots, b^\circ_r, 0, \ldots, 0)$. Dar deoarece după teorema demonstrată $b^\circ_1 \geq 0, \ldots, b^\circ_r \geq 0$, această soluţie de bază este nenegativă, adică este o soluţie de bază admisibilă a sistemului liniar dat. ◁

În cazul în care sistemul este adus la baza unitară, iar termenii liberi ai ecuaţiilor acestui sistem sunt nenegativi, cu ajutorul transformărilor simplex se poate trece de la o soluţie de bază admisibilă la alta (dacă o astfel de soluţie există). Pentru aceasta una dintre necunoscutele secundare o includem în cele bazice, considerând coloana din dreptul acestei necunoscute în calitate de coloană a pivotului şi îndeplinim I iteraţie a transformărilor simplex. Ca rezultat al acestei iteraţii, tabelul dat al lui Gauss se transformă într-un tabel nou, în care una dintre necunoscutele bazice vechi este trecută în mod firesc în numărul necunoscutelor secundare. Acest tabel transformat al lui Gauss indică o soluţie de bază admisibilă nouă. Continuând acest proces, adică efectuând o consecutivitate de iteraţii ale transformărilor simplex, putem afla toate soluţiile de bază admisibile ale sistemului dat.

Pentru a efectua trecerea de la o soluţie de bază admisibilă la altă soluţie de bază admisibilă, ne putem conduce de următorul algoritm.

1) În tabelul lui Gauss (corespunzător sistemului care determină soluţia de bază admisibilă iniţială) se alege necunoscuta secundară $x_k$ pentru a fi inclusă în numărul necunoscutelor bazice, însă în aşa fel, încât coloana din dreptul acestei necunoscute să conţină cel puţin un element pozitiv $a_{lk} > 0$.

2) Pentru toate elementele pozitive $a_{ik} > 0$ ale coloanei din dreptul necunoscutei alese $x_k$ se calculează raporturile $b_i/a_{ik}$ (adică raporturile termenilor liberi corespunzători către aceste elemente) şi în calitate de pivot $a_{lk}$ se alege acela dintre ele pentru care acest raport este minim:

$$b_l/a_{lk} = \min_{a_{ik}>0}\{b_i/a_{ik}\}.$$

3) Se aplică transformarea Jordan a sistemului cu pivotul $a_{lk}$ (formulele (2.9), (2.11) din p. 2.4 şi (2.2) din p. 2.5) şi astfel se trece de la tabelul iniţial la cel nou – tabel transformat al lui Gauss, care determină o soluţie de bază admisibilă nouă a sistemului. Se reia apoi aplicarea algoritmului începând cu pasul 1), considerând ca iniţială soluţia de bază admisibilă nouă etc.

Paşii 1) – 3) constituie o iteraţie a acestui algoritm.

Să urmărim cum se aplică algoritmul trecerii de la o soluţie de bază admisibilă la alta după următorul exemplu.

Exemplul 1. Fie sistemul de ecuaţii care este adus la baza unitară şi ai cărui termeni liberi sunt nenegativi

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{5}{2}x_5 = 9, \\ \dfrac{1}{2}x_2 + x_4 - \dfrac{3}{2}x_5 = 4, \\ x_2 + x_3 - 8x_5 = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Să se afle toate soluţiile de bază admisibile ale acestui sistem.

În tabelul 12 sunt arătate două iteraţii ale algoritmului formulat mai sus, realizate pentru aflarea tuturor soluţiilor de bază admisibile ale sistemului (2.1).

Tabelul 12

| Necunoscutele bazice | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ | $\sum$ | Soluţiile de bază admisibile |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | 1 | 3/2 | 0 | 0 | −5/2 | 9 | 9 | |
| | $x_4$ | 0 | 1/2 | 0 | 1 | −3/2 | 4 | 4 | (9,0,1,4,0) |
| | $x_3$ | 0 | [1] | 1 | 0 | −8 | 1 | −5 | |
| I | $x_1$ | 1 | 0 | −3/2 | 0 | [19/2] | 15/2 | 33/2 | |
| itera- | $x_4$ | 0 | 0 | −1/2 | 1 | 5/2 | 7/2 | 13/2 | (15/2,1,0, |
| ţie | $x_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | −8 | 1 | −5 | 7/2,0) |
| II | $x_5$ | 2/19 | 0 | −3/19 | 0 | 1 | 15/19 | 33/19 | (0,139/19, |
| itera- | $x_4$ | −5/19 | 0 | −2/19 | 1 | 0 | 29/19 | 41/19 | 0,29/19, |
| ţie | $x_2$ | 16/19 | 1 | −5/19 | 0 | 0 | 139/19 | 169/19 | 15/19) |

Analiza subtabelelor din tabelul 12 arată că alte soluţii de bază admisibile ale sistemului dat nu mai sunt. Într-adevăr, în ultimul subtabel se poate lua în calitate de pivot nou al transformării simplex numai singurul element $a''_{11} = 2/19$. Însă prin aceasta revenim la

tabelul precedent. În subtabelul al doilea poate fi luat în calitate de pivot de asemenea şi elementul $a'_{33} = 1$, iar acesta conduce la tabelul iniţial. Însă în tabelul iniţial în calitate de pivot al transformării simplex poate fi considerat numai $a_{32} = 1$, cu care, de fapt, am început rezolvarea.

Totalitatea soluţiilor de bază admisibile ale sistemului (2.1) este:

$$(9, 0, 1, 4, 0),\ (15/2, 1, 0, 7/2, 0),\ (0, 139/19, 0, 29/19, 15/19).$$

Aşadar, dacă sistemul este adus la baza unitară şi toţi termenii liberi ai ecuaţiilor sunt nenegativi, atunci consecutivitatea respectivă de iteraţii ale algorimului considerat dă posibilitate de a determina toate soluţiile de bază admisibile.

Vom expune mai jos modul în care se poate determina o soluţie de bază admisibilă iniţială de la care apoi să se treacă la o altă soluţie de bază admisibilă.

Fie că în sistemul de ecuaţii liniare (2.7) din p. 2.4 termenii liberi $b_i$ ai tuturor ecuaţiilor sunt numere nenegative, adică $b_i \geq 0$ (în caz contrar, prin înmulţirea cu $(-1)$ a ambilor membri ai ecuaţiei, termenul liber poate fi transformat în număr pozitiv). Pentru a afla o soluţie de bază admisibilă a unui astfel de sistem, putem folosi metoda Jordan-Gauss, completată cu aceeaşi regulă de alegere a pivotului ca şi la transformarea simplex (regulă care în cazul dat se admite pentru orice sistem ai cărui termeni liberi sunt pozitivi).

Exemplul 2. Să se afle toate soluţiile de bază admisibile ale sistemului de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_2 + x_3 - 8x_5 = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Aflăm mai întâi una dintre soluţiile de bază admisibile (iniţială) a sistemului (2.2).

În acest sistem termenii liberi ai tuturor ecuaţiilor lui sunt, evident, numere nenegative. Ne punem problema: să aducem sistemul (2.2) la baza unitară păstrând nenegativitatea termenilor liberi. Pentru aceasta este suficient ca sistemul să fie rezolvat prin metoda Jordan-Gauss, completată cu regula indicată de alegere a pivotului, adică să scriem tabelul lui Gauss corespunzător sistemului (2.2) (a se vedea

tab. 13) şi apoi să folosim o consecutivitate de iteraţii ale metodei considerate, pornind da la acest tabel.

În calitate de coloană a pivotului considerăm coloana a patra, care evident conţine elemente pozitive, iar în ea pivotul este $a_{24} = 2$.

În acest caz, ca rezultat al îndeplinirii primei iteraţii, imediat obţinem tabelul lui Gauss al cărui sistem de coloane este adus la baza unitară şi totodată toate elementele coloanei termenilor liberi sunt pozitive. Acest tabel transformat al lui Gauss, evident, determină soluţia de bază admisibilă $(9, 0, 1, 4, 0)$, corespunzătoare completului de necunoscute explicitate $x_1, x_4, x_3$.

Tabelul 13

| Necunoscutele bazice | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ | $\sum$ | Soluţiile de bază admisibile |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | −1 | −1 | 5 | 5 | |
| | | 0 | 1 | 0 | $\boxed{2}$ | −3 | 8 | 8 | |
| | | 0 | 1 | 1 | 0 | −8 | 1 | −5 | |
| I | $x_1$ | 1 | 3/2 | 0 | 0 | −5/2 | 9 | 9 | |
| itera- | $x_4$ | 0 | 1/2 | 0 | 1 | −3/2 | 4 | 4 | (9,0,1, |
| ţie | $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | −8 | 1 | −5 | 4,0) |

Trecerea de la o soluţie de bază admisibilă la alta, adică aflarea tuturor soluţiilor de bază admisibile ale sistemului (2.2), este prezentată în tabelul 12.

E x e m p l u l 3. Să se afle toate soluţiile de bază admisibile ale sistemului

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ 9x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases} \tag{2.3}$$

Din acest sistem obţinem sistemul echivalent cu el şi care are termenii liberi nenegativi:

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4, \\ -9x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8. \end{cases} \tag{2.4}$$

Rezolvăm sistemul (2.4) prin metoda Jordan-Gauss, completată cu regula de alegere a pivotului. Scriem succesiv mai întâi tabelele lui Gauss, corespunzătoare sistemelor (2.3) şi (2.4) (a se vedea tab. 14, subtabelele 1) şi 2)). In subtabelul 2) în calitate de coloană a pivotului considerăm coloana a. doua, care, evident, conţine elemente pozitive, iar în ea ca pivot alegem elementul $a_{12} = 1$, deoarece

$$b_1 / a_{12} = 5/1 = \min\{5/1, 8/1\}.$$

Îndeplinim prima iteraţie, în urma căreia tabelul 2) trece într-un tabel nou - tabelul transformat al lui Gauss 3). Pentru a efectua a doua iteraţie, în calitate de coloană pivot luăm coloana a patra, iar în ea în calitate de pivot - elementul $a_{34} = 3$, întrucât

$$b'_4 / a'_4 = \min\{3/1, 9/3, 3/1\}.$$

După realizarea celei de a doua iteraţii, obţinem tabelul lui Gauss 4), sistemul de coloane al căruia este adus la baza unitară. Totodată două linii ale lui sunt nule. Excluzându-le pe acestea, obţinem tabelul lui Gauss 5), de asemenea adus la baza unitară.

In tabelul 14 este prezentată schema aflării tuturor soluţiilor de baza admisibile ale sistemului (2.3).

Tabelul 14 este alcătuit din tabelele 1) - 6). Tabelul 1) (mai precis siibtabeUil 1) al tabelului 14) este tabelul iniţial al lui Gauss, corespunzător sistemului (2.3). Tabelul 2) corespunde sistemului (2.4) echivalent cu cel iniţial, dar care are termenii liberi pozitivi. Tabelele 3) şi 4) sunt tabele obţinute, respectiv, după îndeplinirea iteraţiilor indicate I şi a II-a ale metodei considerate. Totodată, sistemul coloanelor tabelului 4) este adus deja la baza unitară. Tabelul 5) rezultă din tabelul 4) prin suprimarea liniilor nule. Acest tabel determină, evident, soluţia de bază admisibilă (0,11,0,3) a sistemului (2.3). Tabelul 6) este obţinut din 5) după algoritmul de trecere de la o soluţie de baza admisibilă la alta, descris mai sus. Tabelul 6) determină o altă soluţie de bază admisibilă (0,2,3,0). Analiza tabelelor 5) şi 6) arată că alte soluţii de bază admisibile nu sunt.

Tabelul 14

| | Necunoscutele bazice | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ | $\sum$ | Soluţiile de bază admisibile |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | | | 7 | −1 | −1 | 2 | −5 | | |
| | | | 2 | 0 | −1 | −1 | −3 | | |
| | | | 1 | −1 | 2 | 5 | 4 | | |
| | | | 9 | −1 | −2 | 1 | −8 | | |
| 2) | | | −7 | [1] | 1 | −2 | 5 | −2 | |
| | | | −2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | |
| | | | 1 | −1 | 2 | 5 | 4 | 11 | |
| | | | −9 | 1 | 2 | −1 | 8 | 1 | |
| 3) | I iteraţie | | −7 | 1 | 1 | −2 | 5 | −2 | |
| | | | −2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | |
| | | | −6 | 0 | 3 | [3] | 9 | 9 | |
| | | | −2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | |
| 4) | | | −11 | 1 | 3 | 0 | 11 | 4 | |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | −2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | |
| | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 5) | II iteraţie | $x_2$ | −11 | 1 | 3 | 0 | 11 | 4 | |
| | | $x_4$ | −2 | 0 | [1] | 1 | 3 | 3 | (0,11,0,3) |
| 6) | III iteraţie | $x_2$ | −5 | 1 | 0 | −3 | 2 | −5 | |
| | | $x_3$ | −2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | (0,2,3,0) |

Exemplul 4. Să se afle soluţiile de bază admisibile ale sistemului liniar

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 - x_4 - 2x_5 = -14. \end{cases} \tag{2.5}$$

De la acest sistem de ecuaţii liniare trecem la sistemul echivalent cu el, dar în care termenii liberi sunt nenegativi, şi scriem tabelul lui Gauss corespunzător ultimului sistem (tab. 15).

Uşor se observă că în calitate de coloană a pivotului poate fi considerată numai coloana a patra sau a cincea. O luăm pe a cincea, iar în ea pivotul va fi $a_{15} = 3$, deoarece

$$b_1/a_{15} = 6/3 = \min\{6/3, 6/2, 14/2\}.$$

Tabelul 15

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $b$ | $\sum$ | Soluţiile de bază admisibile |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 2 | $\boxed{3}$ | 6 | 12 | |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 6 | 10 | |
| | −1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 14 | 16 | |
| I | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | 2 | 4 | Soluţii de bază |
| iteraţie | 0 | 1 | −2/3 | −1/3 | 0 | 2 | 2 | admisibile |
| | −1 | 0 | −2/3 | −1/3 | 0 | 10 | 8 | nu sunt |

După îndeplinirea unei iteraţii a metodei Jordan-Gauss, completată cu regula de alegere a pivotului, obţinem tabelul care arată că în sistemul corespunzător de ecuaţii echivalent cu cel iniţial una dintre ecuaţii are toţi coeficienţii necunoscutelor nepozitivi, iar termenul liber pozitiv. Aceasta înseamnă că sistemul nu are soluţii în domeniul soluţiilor nenegative şi deci sistemul (2.5) nu are nici soluţii de bază admisibile. Menţionăm că dacă în tabelul 15 în calitate de coloană a pivotului am fi luat coloana a patra, atunci am fi ajuns la acelaşi rezultat, numai că după realizarea a două pivotaje ale metodei simplex.

Concomitent facem următoarea observaţie importantă: întrucât raportul minim

$$b_l/a_{lk} = \min_{a_{ik}>0}\{b_i/a_{ik}\}$$

dictează alegerea liniei pivot, rezultă că la aplicarea regulii de alegere a pivotului o linie, de exemplu prima, poate să se repete eventual ca linie a pivotului de câteva ori.

Exemplul 5. Să se afle toate soluţiile de bază admisibile ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5, \\ x_3 - 3x_5 + x_6 = -7, \\ x_3 - x_4 - 4x_5 + 4x_6 = -3. \end{cases} \tag{2.6}$$

În tabelul 16 este prezentată schema rezolvării şi aflării tuturor soluţiilor de bază admisibile ale sistemului (2.6).

Tabelul 16

| | Necunoscutele bazice | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ | $\sum$ | Soluţiile de bază admisibile |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 0 | −1 | 0 | −2 | 1 | 4 | | |
| 1) | | 0 | 1 | 0 | 0 | −2 | −1 | 5 | | |
| | | 0 | 0 | 1 | 0 | −3 | 1 | −7 | | |
| | | 0 | 0 | 1 | −1 | −4 | 4 | −3 | | |
| | | 1 | 0 | −1 | 0 | −2 | 1 | 4 | 3 | |
| 2) | | 0 | 1 | 0 | 0 | −2 | −1 | 5 | 3 | |
| | | 0 | 0 | −1 | 0 | 3 | −1 | 7 | 8 | |
| | | 0 | 0 | −1 | 1 | [4] | −4 | 3 | 3 | |
| | | 1 | 0 | −3/2 | 1/2 | 0 | −1 | 11/2 | 9/2 | |
| 3) | I | 0 | 1 | −1/2 | 1/2 | 0 | −3 | 13/2 | 9/2 | |
| | ite- | 0 | 0 | −1/4 | −3/4 | 0 | [2] | 19/4 | 23/4 | |
| | raţie | 0 | 0 | −1/4 | 1/4 | 1 | −1 | 3/4 | 3/4 | |
| | $x_1$ | 1 | 0 | −13/8 | [1/8] | 0 | 0 | 63/8 | 59/8 | (63/8, |
| 4) | II $x_2$ | 0 | 1 | −7/8 | −5/8 | 0 | 0 | 109/8 | 105/8 | (109/8,0, |
| | ite- $x_6$ | 0 | 0 | −1/8 | −3/8 | 0 | 1 | 19/8 | 23/8 | 0,25/8, |
| | raţie $x_5$ | 0 | 0 | −3/8 | −1/8 | 1 | 0 | 25/8 | 29/8 | 19/8) |
| | $x_4$ | 8 | 0 | −13 | 1 | 0 | 0 | 63 | 59 | |
| 5) | III $x_2$ | 5 | 1 | −9 | 0 | 0 | 0 | 53 | 50 | (0,53, |
| | ite- $x_6$ | 3 | 0 | −5 | 0 | 0 | 1 | 26 | 25 | 0,63, |
| | raţie $x_5$ | 1 | 0 | −2 | 0 | 1 | 0 | 11 | 11 | 11,26) |

Din subtabelele 4), 5) ale tabelului 16 rezultă că soluţiile de bază admisibile ale sistemului (2.6) sunt: (63/8, 109/8, 0, 0, 25/8, 19/8) şi (0, 53, 0, 63, 11, 26). Analiza acestor tabele arată că sistemul (2.6) alte soluţii de bază admisibile nu are.

## Exerciţii

Să se rezolve sistemele de ecuaţii liniare prin metoda Jordan-Gauss.

**1.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4,5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 3,5, \\ 5x_1 + 5,5x_2 + 11,5x_3 - 8x_4 = 6. \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2,5x_3 + x_4 = 2,75, \\ 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 9,25, \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 4,5. \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Să se găsească toate soluţiile de bază şi să se indice care dintre ele sunt soluţii admisibile ale sistemului de ecuaţii liniare.

**6.** $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 10, \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 25. \end{cases}$

Să se afle toate soluţiile de bază admisibile ale sistemului de ecuaţii liniare.

**9.** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

**11.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23. \end{cases}$

CAPITOLUL 3

# Spațiul vectorial $n$-dimensional $R^n$

## 3.1. Noțiunea de punct $n$-dimensional și de vector $n$-dimensionai

Multe probleme, atât practice, cât și teoretice, conduc la cercetarea, sistemelor (complexelor) ordonate de $n$ numere (mărimi) de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Un astfel de sistem formează, de exemplu, variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în ecuația

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

precum și coeficienții aceleiași ecuații. Contractul colectiv (de muncă), incheiat de o instituție ori de o întreprindere cu muncitorii și funcționarii respectivi, sau realizările în muncă ale oricărei întreprinderi se caracterizează de anumiți indici, adică, de asemenea, de un sistem ordonat de numere etc.

Din cursul preuniversitar de matematică se știe că perechea sau tripletul de numere pot fi interpretate geometric drept coordonatele unui punct $A$ sau ale unui vector (segment orientat) $\bar{a} = \overline{OA}$ respectiv din plan sau spațiu. De aceea, însăși perechea $(x,y)$ sau tripletul $(x,y,z)$ de numere poate fi numit punctul $A$ sau vectorul $\bar{a}$, ce are aceste numere drept coordonate ale sale.

Insă pentru $n > 3$, imaginile geometrice ale sistemului de numere $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ devin imposibile, de aceea o adresare nemijlocită la geometrie e de asemenea imposibilă.

Totodată, multe fapte care se referă la sistemul de numere menționat mai sus poartă un caracter general, ce nu depinde de $n$.

De exemplu, proprietățile soluțiilor sistemelor de ecuații liniare și metodele de cercetare a lor nu depind de numărul de necunoscute. Din această cauză, este rațional ca și în cazul general să se păstreze imaginile geometrice, să se folosească terminologia geometrică.

Generalizând noțiunea de punct și vector din spațiul de trei dimensiuni, ajungem la noțiunea de punct aritmetic și de vector aritmetic $n$-dimensionali, pe care o exprimăm în felul următor.

**Definiție.** Un sistem (complex) ordonat de $n$ numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *punct n-dimensional* sau *vector n-dimensionat* sau simplu, *punct* sau *vector, si* se notează printr-o singură literă, de exemplu $\bar{x}$:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* punctului (vectorului) , sau *componentele* vectorului ; $x_i$ se numește *componenta* (sau *coordonata) de rang i* a vectorului $\bar{x}$, $1 \leq i \leq n$. Numărul $n$ de componente ale vectorului $\bar{x}$ se numește *dimensiunea* acestui vector.

De exemplu, (2,5) - vector de dimensiunea doi, (2, - 1 , 0) - vector de dimensiunea trei, (1, 3, - 2 , 4) - vector de dimensiunea patru etc.

Este posibilă și o altă notare a vectorului - sub formă de coloană de componente (sau coordonate):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vectorul $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care este un vector $n$- dimensional, îl vom numi de asemenea și *vector-linie,* sau simplu *linie,* de "lungimea" $n$. La fel

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

este denumit *vector-coloană,* sau. *coloană* de înălțimea $n$.

Vectorul $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ ale cărui componente sunt toate egale cu zero se numește *vector nul.* Uneori vectorul nul sau $(0, \ldots, 0)$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ îl vom nota cu simbolul obișnuit 0 al lui zero.

Vectorul $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \ldots -x_n)$ se numește *vectorul opus* vectorului $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Menționăm că mărimile economice sunt, de regulă, multidimensionale, iar vectorii $n$-dimensionali servesc ca o formă comodă pentru reprezentarea lor. De exemplu, un lot de produse (sau un volum de producție) poate fi caracterizat prin vectorul $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, iar prețurile respective - prin vectorul $\bar{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n)$. La concret, dacă un oarecare magazin a vândut într-un schimb 3 paltoane, 7 pardesiuri, 5 costume, 2 vestoane și 18 m de stofă, atunci marfa comercializată de magazin într-un schimb se poate scrie sub formă de următorul vector: (3,7,5,2,18), care are cinci componente.

Vectorii îi vom nota de obicei cu litere mici cursive ale alfabetului latin, trasând deasupra literei o linișță: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots$; numerele le vom nota cu caractere cursive ale alfabetului latin sau grec și fără liniuță: $x$, y, $\alpha$, $\delta$, $\alpha$, ,...

## 3.2. Operații liniare cu vectori n-dimensionali. Spațiul vectorial $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$

Fie $n$ un număr natural nenul *(n* fiind oarecare, dar o dată ales, este fix). Se notează cu $R^n$ mulțimea tuturor sistemelor ordonate de $\eta$ numere reale

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \ (x_i \in \mathbf{R}, \ i = 1,2,\ldots, n).$$

Elementele lui $R^n$ se numesc *vectori-linie n-dimensionali.*

Asupra elementelor din $R^n$ (ca sisteme ordonate de $n$ numere reale) pot fi definite noțiunea de egalitate și operațiile de *adunare* și *înmulțire cu un număr,* analog ca. în cazul în care vectorii sunt determinați prin coordonatele lor în plan și în spațiu:

**I. Egalitatea vectorilor.** Doi vectori $n$-dimensionali $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ si $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ sunt *egali* atunci și numai atunci când sunt egale componentele corespunzătoare ale lor:

$$\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x_i = \quad y_i \quad i = 1,2,\ldots,n$$

($\Leftrightarrow$ - simbolul de echivalență, a doua afirmații).

II. **Adunarea vectorilor.** Se numește *suma* a doi vectori n-dimensionali $\bar{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ si $\bar{y} = (y_1, y_2 \ldots y_n)$ vectorul *n*-dimensional

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \cdot$$

Aplicația

$$R^n \times R^n \longrightarrow R^n, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \bar{x} + \bar{y}$$

se numește *adunarea vectorilor din* $R^n$.

**III. înmulțirea unui vector cu un scalar.** Se numește *produsul* dintre vectorul *n*-dimensional $\bar{x} = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ *si* un scalar (un număr real) $\alpha$ vectorul n-dimensional

$$a\bar{x} = \bar{x}a = \quad (ax_1, a \quad x_2 \quad \ldots \quad ax_n).$$

Se spune, de asemenea, ca $a\bar{x}$ este produsul vectorului $\bar{x}$ prin scalarul *a* (sau cu numărul *a).* Corespondența

$$R \times R^n \quad \longrightarrow R^n, \quad (\alpha, \bar{x}) \quad \longrightarrow \bar{x},$$

se numește *înmulțirea vectorilor din* $R^n$ *cu scalari,* sau simplu *înmulțirea prin scalar.*

Operațiile de adunare a vectorilor și de înmulțire a vectorilor cu scalari se numesc *operații liniare* cu vectori.

Ele posedă următoarele proprietăți de ba.ză ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vectori n-dimensionali, $a, \beta$ - numere reale):

1° $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} - \bar{x}$ (comutativitatea adunării vectorilor);

2° $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (asociativitatea adunării vectorilor);

3° $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ ($\bar{0}$ este elementul neutru la adunarea vectorilor);

4° $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ (proprietatea vectorului opus);

5° $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ (rolul deosebit al înmulțitorului numeric **1);**

6° $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$ (asociativitatea înmulţirii prin scalari a vectorului);

7° $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ (distributivitatea înmulţirii prin scalar a sumei vectorilor);

8° $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ (distributivitatea înmulţirii prin vector a sumei scalarilor).

Vom introduce noţiunea de spaţiu aritmetic în modul următor:

**Definiţie.** Mulţimea $\mathbf{R}^n$ a tuturor sistemelor (complexelor) ordonate $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $n$ numere reale, echipată cu operaţiile de adunare a sistemelor (vectorilor) şi de înmulţire a acestora cu scalari, se numeşte *spaţiul vectorial n-dimensional real*, sau *spaţiul aritmetic real de dimensiune n*, sau simplu *spaţiul aritmetic*:

$$\mathbf{R}^n = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Spaţiul $\mathbf{R}^n$ se mai numeşte de asemenea şi *spaţiul vectorilor-linie n-dimensionali* sau *spaţiul liniilor de lungimea n*.

În unele aplicaţii este comod a reprezenta vectorii lui $\mathbf{R}^n$ sub formă de coloane de înălţimea $n$. În acest caz, $\mathbf{R}^n$ va fi numit *spaţiul vectorilor-coloană n-dimensionali*.

Operaţia de *scădere* a vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ în $\mathbf{R}^n$ o definim prin formula:

$$\overline{x} - \overline{y} = \overline{x} + (-\overline{y}).$$

În afară de proprietăţile 1°–8°, operaţiile liniare ale spaţiului $\mathbf{R}^n$ posedă, de asemenea, următoarele proprietăţi simple:

1) dacă $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, atunci $\overline{x} - \overline{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$;

2) $(-1)\overline{x} = -\overline{x}$;

3) $-\overline{0} = \overline{0}$;

4) $-(-\overline{x}) = \overline{x}$;

5) $-(\overline{x} + \overline{y}) = (-\overline{x}) + (-\overline{y}) = -\overline{x} - \overline{y}$;

6) $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$;

7) $-(\alpha\overline{x}) = (-\alpha)\overline{x} = \alpha(-\overline{x})$;

8) $(\alpha - \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} - \beta\overline{x}$ şi $\alpha(\overline{x} - \overline{y}) = \alpha\overline{x} - \alpha\overline{y}$;

9) $\alpha\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow$ sau $\alpha = 0$, sau $\overline{x} = \overline{0}$
($\Rightarrow$ - simbolul de implicaţie);

10) $\alpha\overline{x} = \beta\overline{x} \Rightarrow \alpha = \beta$ $(\overline{x} \neq \overline{0})$ şi $\alpha\overline{x} = \alpha\overline{y} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$ $(\alpha \neq 0)$.

R e m a r c ă. Enumerarea formală a proprietăţilor 1°–8° creează o idee precisă despre ceea ce va trebui să subînţelegem prin noţiunea de spaţiu vectorial abstract pe care îl vom studia în capitolul 16.

## 3.3. Produsul scalar a doi vectori

### 3.3.1. Definiţia şi proprietăţile produsului scalar

**Definiţie.** Se numeşte *produsul scalar* a doi vectori $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ din spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ numărul notat prin $(\overline{x}, \overline{y})$ sau $\overline{x}\,\overline{y}$ şi care este egal cu suma produselor componentelor corespunzătoare ale vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}\,\overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \qquad (3.1)$$

Numărul $(\overline{x}, \overline{y})$ îl vom numi uneori *produsul scalar* dintre $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ (sau al lui $\overline{x}$ cu $\overline{y}$).

Spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ în care s-a definit produsul scalar a doi vectori arbitrari prin formula (3.1) se numeşte *spaţiu euclidian* şi se notează cu $\mathcal{E}^n$ (sau $E^n$).

Produsul scalar posedă proprietăţile ($\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$):

1° $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$ (comutativitatea factorilor);

2° $(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$ (distributivitatea faţă de adunarea vectorilor);

3° $(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, \alpha\overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$ (asociativitatea faţă de înmulţirea cu un număr, sau omogenitate);

4° $(\overline{x}, \overline{x}) \geq 0$, în plus $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$ (pozitivitate).

▷ Aceste proprietăţi se verifică nemijlocit folosind formula (3.1). ◁

Produsul scalar $(\overline{x}, \overline{x})$ se numeşte *pătratul scalar* al vectorului $\overline{x}$ şi se notează $\overline{x}^2$, adică $(\overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}^2$.

În problemele economice poate fi considerat produsul scalar al vectorului preţurilor $\overline{p}$ la vectorul volumului de producţie $\overline{x}$. Produsul scalar $(\overline{p}, \overline{x})$ în acest caz reprezintă preţul sumar al producţiei $\overline{x}$ cu preţurile $\overline{p}$, respectiv.

E x e m p l u. Dacă volumul întregii producţii fabricate de o întreprindere se exprimă prin vectorul $\overline{x} = (500, 650, 100, 200)$, componentele căruia înseamnă, respectiv, cantitatea de produse finite de calitatea superioară, întâi, a doua şi a treia, iar preţurile în aceleaşi unităţi monetare sunt arătate în ordinea corespunzătoare de vectorul $\overline{p} = (7; 4,1; 3,2; 1,5)$, atunci produsul scalar $(\overline{p}, \overline{x}) = 7 \cdot 500 + 4,1 \cdot 650 + 3,2 \cdot 100 + 1,5 \cdot 200 = 6785$ exprimă costul sumar al întregii producţii.

### 3.3.2. Lungimea vectorului

**Definiţie.** Se numeşte *lungimea* (sau *norma*) vectorului $n$-dimensional $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ numărul $|\overline{x}|$ egal cu rădăcina pătrată din pătratul scalar al vectorului $\overline{x}$:

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{3.2}$$

E x e m p l u. Să se afle lungimea vectorului $\overline{x} = (-3, 5, -2, 1)$. Conform formulei (3.2), căpătăm

$$|\overline{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{39}.$$

**Proprietăţile normei vectorului**

1) Pătratul lungimii este egal cu pătratul scalar al vectorului:

$$|\overline{x}|^2 = \overline{x}^2. \tag{3.3}$$

2) $|\overline{x}| \geq 0$, în plus $|\overline{x}| = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

3) $|\alpha\overline{x}| = |\alpha| \cdot |\overline{x}|$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$.

▷ Proprietăţile 1)–3) rezultă direct din definiţia lungimii vectorului. ◁

4) Dacă $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ – vectori arbitrari $n$-dimensionali, atunci lungimile lor $|\overline{x}|$ şi $|\overline{y}|$ sunt legate de produsul scalar $(\overline{x}, \overline{y})$ prin relaţia:

$$|(\overline{x}, \overline{y})| \leq |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|, \tag{3.4}$$

care se numeşte *inegalitatea Cauchy – Buniakovski*[1].

Această inegalitate în coordonate are forma

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leq$$

$$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

unde: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

▷ Într-adevăr, dacă $\overline{x} = \overline{0}$ sau $\overline{y} = \overline{0}$, atunci (3.4) este evidentă, de aceea vom considera $\overline{x} \neq \overline{0}, \overline{y} \neq \overline{0}$. Analizăm vectorul $\overline{z} = \overline{x} + \lambda\overline{y}$, unde $\lambda$ – orice număr real. Deoarece $(\overline{z}, \overline{z}) \geq 0$, ţinând cont de proprietăţile produsului scalar 1°–4°, avem:

$$(\overline{z}, \overline{z}) = (\overline{x} + \lambda\overline{y}, \overline{x} + \lambda\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{x}) + 2\lambda(\overline{x}, \overline{y}) +$$

$$+\lambda^2(\overline{y}, \overline{y}) \geq 0. \tag{3.5}$$

Pentru $\lambda = -(\overline{x}, \overline{y})/(\overline{y}, \overline{y})$, din (3.5) obţinem:

$$(\overline{x}, \overline{x}) - 2\frac{(\overline{x}, \overline{y})}{(\overline{y}, \overline{y})} \cdot (\overline{x}, \overline{y}) + \frac{(\overline{x}, \overline{y})^2}{(\overline{y}, \overline{y})^2} \cdot (\overline{y}, \overline{y}) \geq 0,$$

sau

$$(\overline{x}, \overline{x}) - \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{(\overline{y}, \overline{y})} \cdot (\overline{x}, \overline{y}) \geq 0 \Rightarrow (\overline{x}, \overline{y})^2 \leq (\overline{x}, \overline{x}) \cdot (\overline{y}, \overline{y}),$$

de unde rezultă (3.4). ◁

5) Pentru fiecare pereche de vectori $n$-dimensionali $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ este adevărată relaţia

$$|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|, \tag{3.6}$$

care se numeşte *inegalitatea triunghiului* (sau *inegalitatea lui Minkowski*[2]).

---

[1] A. Cauchy (1789–1857) – matematician francez;
V. Buniakovski (1804-1889) – matematician rus.

[2] J. Minkowski (1864–1909) – matematician german.

Această inegalitate înseamnă că lungimea sumei a doi vectori nu întrece suma lungimilor acestor vectori. Pentru vectorii geometrici (segmente orientate) relaţia (3.6) este evidentă din fig. 3.1.

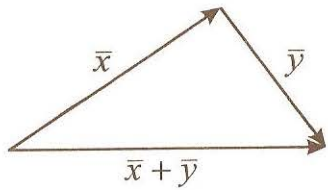



Fig. 3.1

▷ Într-adevăr, folosind formulele 1°–4°, (3.3) şi (3.4), obţinem $|\overline{x}+\overline{y}|^2 = (\overline{x}+\overline{y})^2 = (\overline{x}+\overline{y}, \overline{x}+\overline{y}) = (\overline{x},\overline{x}) + 2(\overline{x},\overline{y}) + (\overline{y},\overline{y}) \leq$ $\leq |\overline{x}|^2 + 2|(\overline{x},\overline{y})| + |\overline{y}|^2 \leq |\overline{x}|^2 + 2|\overline{x}|\cdot|\overline{y}| + |\overline{y}|^2$, de unde rezultă (3.6). ◁

### 3.3.3. Unghiul dintre doi vectori

**Definiţie.** Se numeşte *unghiul dintre doi vectori* nenuli $n$-dimensionali $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ unghiul $\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ cosinusul căruia se determină prin formula

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{x},\overline{y})}{|\overline{x}|\cdot|\overline{y}|}. \tag{3.7}$$

Din (3.7) imediat rezultă formula

$$(\overline{x},\overline{y}) = |\overline{x}|\cdot|\overline{y}|\cos\varphi,$$

adică produsul scalar a doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ este egal cu produsul lungimilor acestor vectori la cosinusul unghiului dintre ei.

## 3.4. Spaţiul afin $\mathbf{R}^n$. Distanţa dintre două puncte

### 3.4.1. Noţiune de spaţiu afin $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$

Până acum am considerat spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ ca spaţiu vectorial. Însă în multe probleme, operaţiile adunării vectorilor şi a înmulţirii

vectorului cu un număr joacă un rol mai puțin esențial. Mai important este studierea diferitelor submulțimi ale lui $R^n$ (structura fiecăreia dintre aceste submulțimi, așezarea lor reciprocă etc.) In astfel de cazuri, elementele spațiului $R^n$ sunt numite nu vectori, ci *puncte,* iar însuși $R^n$ - *spațiul punctual n-dimensional* $R^n$ sau *spațiul n-dimensional* $R^n$.

Punctele din $R^n$ se notează, de regulă, cu majuscule și se scrie, de exemplu, $A(2,3,5,-1)$, $M(x_1,x_2,....,x_n)$ (sau $A = (2,3,5,-1)$, $M = (x_1,x_1,....,x_n)$) etc. înseși numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* punctului $M(x_1,x_1,....,x_n)$· Punctul $0(0,0,\ldots,0)$ îl vom numi *originea de coordonate.*

In cazul în care complexele ordonate de $\eta$ numere reale vor fi numite puncte aritmetice, vom vorbi despre egalitatea și despre operațiile liniare asupra punctelor ca și în cazul în care aceste complexe de numere sunt numite vectori aritmetici.

Spațiul aritmetic $R^1$ se identifică cu mulțimea numerelor reale R.

Elementele spațiilor aritmetice R, $R^2$ și $R^3$ pot fi interpretate geometric drept complexe de coordonate carteziene, respectiv ale punctelor dreptei, planului și spațiului; de aceea, se obișnuiește ca R să fie numit *dreaptă numerica,* $R^2$ *-plan numeric si* $R^3$ - *spațiu numeric.*

Se poate spune că spațiul aritmetic $R^n$ posedă proprietățile care, într-un anumit sens, sunt asemănătoare cu proprietățile geometrice ale spațiilor R, $R^2$, $R^3$.

Fie spațiul vectorial *n*-dimensional $R^n$ și fie, pe de alta parte, că $R^n$ este considerat ca o mulțime de puncte *U*, astfel încât fiecărei perechi ordonate de puncte $M,N \in U$ îi este pus în corespondența un unic vector $\bar{x} \in R^n$ Vom scrie $\bar{x} = \overrightarrow{MN}$, unde *M* este numit *originea,* iar *N* - *extremitatea* acestui vector $\overrightarrow{MN}$. Se presupune că corespondența dintre puncte și vectori posedă următoarele proprietăți:

1° pentru fiecare punct *M* și orice vector $\bar{x}$ există un singur punct *N,* astfel încât $\overrightarrow{MN} = \bar{x}$ *(M,N,* $\bar{x} \in R^n$);

2° pentru oricare trei puncte M, *N, P* $\in R^n$ este adevărată relația. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$;

3° pentru punctele *M, N* $\in R^n$ este adevărată relația $\overrightarrow{MN} = \bar{0} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (M = *N)* (punctele coincid).

Mulțimea. $R^n$ de puncte ce posedă proprietățile 1°-3° se numește *spațiu afin*[3] *n-dimensional* $R^n$ (peste spațiul vectorial $R^n$), sau simplu

affinus (lat.) - înrudit, corespunzător.

*spațiu afin* $R^n$

De exemplu, spațiul punctual $R^n$ poate fi transformat în spațiu afin în modul următor.

Dacă $A = (\alpha_1, \alpha_2, ...., \alpha_n)$ și $B = (b_1, b_2, ...., b_n)$ sunt două puncte ale spațiului punctual $R^n$, atunci perechii ordonate de aceste puncte îi punem în corespondență vectorul $\overline{AB} \in R^n$, definit în modul următor:

$$\overline{AB} = (b_1 - \alpha_1 , b_2 - \alpha_2 , ...., b_n - \alpha_n ),$$

adică componentele vectorului $\overline{AB}$ sunt egale cu diferențele coordonatelor corespunzătoare ale extremității $B$ și originii $A$ ale sale. Acest fapt îl vom scrie sub forma

$$\overline{AB} = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

unde $x_1 = b_1 - \alpha_1$, $x_2 = b_1 - \alpha_1 \cdots x_n = b_n - a_n$ se numesc *coordonatele* acestui vector.

In spațiul de trei dimensiuni $R^3$, vectorul $\overline{AB}$ poate fi reprezentat geometric printr-un *segment orientat* $\overline{AB}$ cu originea. în punctul $A$ și extremitatea în punctul $B$. Pe desen extremitatea vectorului se arată cu săgeată (fig. 3.2).

Fig. 3.2

Așadar, în spațiul punctual $R^n$ noțiunea de vector poate fi introdusă ca o pereche ordonată de puncte oarecare ale lui $R^n$, coordonatele căruia se determină în modul indicat mai sus.

Observăm că dacă elementele spațiului aritmetic $R^n$ sunt numite puncte și fiecărei perechi ordonate de puncte $A$ și $B$ din $R^n$ i se pune în corespondență vectorul $\overline{AB}$ determinat de aceste puncte în modul indicat, atunci $R^n$ poate fi considerat ca spațiul afin corespunzător (peste spațiul vectorial $R^n$).

Asupra vectorilor definiți ca perechi ordonate de puncte din $R^n$ și exprimați prin coordonatele lor se trec toate noțiunile și relațiile care

au loc în spaţiul de trei dimensiuni pentru vectorii determinaţi prin coordonatele lor.

De exemplu, e g a l i t a t e a  v e c t o r i l o r.

Doi vectori $\overline{AB} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{CD} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt *egali* atunci şi numai atunci când sunt egale coordonatele corespunzătoare ale lor:

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

În virtutea unei atare definiri a egalităţii vectorilor, este indiferent care punct al spaţiului $\mathbf{R}^n$ este considerat ca origine a vectorului şi de aceea astfel de vectori n-dimensionali sunt numiţi *vectori liberi* ai spaţiului afin $\mathbf{R}^n$ şi pot fi notaţi printr-o singură literă $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ etc.

Dacă vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{AB}$ sunt egali ($\overline{x} = \overline{AB}$), atunci punctul $A$ este numit *punctul de aplicaţie* al vectorului $\overline{x}$. Nu se exclude de asemenea şi cazul în care extremitatea vectorului coincide cu originea sa. Astfel de vector se numeşte *vector-nul* şi se notează prin $\overline{AA}$ sau $\overline{0}$. Coordonatele vectorului-nul, evident, sunt egale cu zero.

$$\overline{AA} = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

Vectorul $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ este numit *vectorul opus* vectorului $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dacă $\overline{x} = \overline{AB}$, atunci observăm că $-\overline{x} = \overline{BA}$.

Vectorul $\overline{OM}$, unde $O(0, 0, \ldots, 0)$ – originea de coordonate, se numeşte *rază-vectoare* a punctului $M$. Dacă $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, atunci, evident, $\overline{OM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Fig. 3.3

Pentru a fi intuitiv, uneori vectorul $\overline{OM}$ se reprezintă geometric pentru $n = 2$ sau $n = 3$ (fig. 3.3).

### 3.4.2. Distanţa dintre două puncte (sau doi vectori) în $\mathbf{R}^n$

Din cursul preuniversitar se ştie că distanţa dintre două puncte $M(x_1, y_1)$ şi $N(x_2, y_2)$ din plan se determină de formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Evident, $d = |\overline{MN}| = |\overline{NM}| = |\overline{OM} - \overline{ON}|$, unde $O$ – originea de coordonate (fig. 3.4).

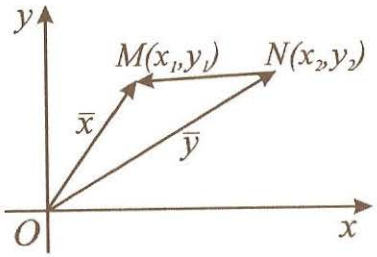



Fig. 3.4

Dacă punctele din $\mathbf{R}^2$ le vom nota, respectiv, cu aceleaşi litere mici ca şi razele-vectoare ale acestor puncte, atunci distanţa $d$ dintre punctele $\overline{x} = (x_1, y_1)$ şi $\overline{y} = (x_2, y_2)$, evident, coincide cu modulul vectorului $\overline{x} - \overline{y} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$, adică $d = |\overline{x} - \overline{y}|$.

În mod analog se exprimă distanţa dintre două puncte şi în spaţiul $\mathbf{R}^3$.

Introducem noţiunea de distanţă în cazul general al spaţiului euclidian $\mathbf{R}^n$.

**Definiţie.** Se *numeşte distanţa dintre punctele* (sau *vectorii*) $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în spaţiul euclidian $\mathbf{R}^n$ mărimea

$$\rho(\overline{x}, \overline{y}) = |\overline{x} - \overline{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{3.8}$$

Ea posedă proprietăţile ($\forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{R}^n$):

1) $\rho(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$ şi $\rho(\overline{x},\overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$,

2) $\rho(\overline{x},\overline{y}) = \rho(\overline{y},\overline{x})$,

3) $\rho(\overline{x},\overline{y}) \leq \rho(\overline{x},\overline{z}) + \rho(\overline{z},\overline{y})$.

▷ Demonstraţiile proprităţilor 1) şi 2) sunt evidente; pentru ultima, ţinând cont de (3.8), avem

$$\rho(\overline{x},\overline{y}) = |(\overline{x}-\overline{z})+(\overline{z}-\overline{y})| \leq |\overline{x}-\overline{z}| + |(\overline{z}-\overline{y})| = \rho(\overline{x},\overline{z}) + \rho(\overline{z},\overline{y}). \triangleleft$$

Dacă punctele din $\mathbf{R}^n$ le notam cu majuscule, atunci această definiţie o formulăm astfel.

Se numeşte *distanţa dintre două puncte* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *şi* $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ numărul

$$\rho(M,N) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}. \qquad (3.9)$$

Exemplu. În $\mathbf{R}^4$ să se afle distanţa dintre punctele $M(2,3,-1,0)$ şi $N(0,2,-1,1)$.

$$\rho(M,N) = \sqrt{(2-0)^2 + (3-2)^2 + (-1+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Pentru $n = 2, 3$, formula (3.9) reprezintă distanţa obişnuită în plan sau în spaţiu.

Distanţa $\rho(M,N)$ dintre punctele $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, evident, coincide cu distanţa $\rho(\overline{x},\overline{y})$ dintre vectorii $\overline{x} = \overline{OM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = \overline{ON} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, determinată de formula (3.8) ($O(0,0,\ldots,0)$ – originea de coordonate); totodată, $\rho(M,N)$ coincide şi cu lungimea vectorului $\overline{MN}$, adică $\rho(M,N) = |\overline{MN}|$.

În cazul în care distanţa este notată prin $\rho(M,N)$, proprietăţile distanţei dintre puncte în $\mathbf{R}^n$ se scriu sub forma:

1° $\rho(M,N) \geq 0$ şi $\rho(M,N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,

2° $\rho(M,N) = \rho(N,M)$,

3° $\rho(M,N) \leq \rho(M,L) + \rho(L,N), \quad \forall M, N, L \in \mathbf{R}^n$.

## 3.5. Sisteme de vectori. Combinaţii liniare de vectori şi forma vectorială a sistemelor de ecuaţii liniare

Fie dată în spaţiul vectorial $\mathbf{R}^n$ o mulţime finită de vectori arbitrari (nu numaidecât diferiţi) $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, pe care o vom numi *sistem de vectori.*

Un sistem de vectori se numeşte *subsistem* al altui sistem de vectori dacă el constă în întregime din vectorii unei părţi a sistemului al doilea. În particular, subsistemul poate să coincidă şi cu întreg sistemul de vectori.

Expresia

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k, \tag{3.1}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt numere reale (scalari), oarecare, se numeşte *combinaţie liniară* de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$. Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se numesc *coeficienţii* combinaţiei liniare. Orice combinaţie liniară (3.1) de vectorii sistemului dat reprezintă un anumit vector nou $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k, \tag{3.2}$$

care se obţine din sistemul $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ ca rezultat al realizării câtorva operaţii liniare. Despre vectorul $\overline{x}$ din (3.2) se spune că $\overline{x}$ *este o combinaţie liniară* de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ (sau a sistemului de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$), sau că $\overline{x}$ *se exprimă* (*se reprezintă*) *liniar* prin aceşti vectori.

E x e m p l u l 1. Considerăm sistemul de vectori $\overline{a}_1 = (1, -2, 3, -9)$, $\overline{a}_2 = (-1, 0, 1, 5)$, $\overline{a}_3 = (0, 0, -2, 4)$, $\overline{a}_4 = (7, -2, -2, -3)$. Să se afle componentele combinaţiei liniare $2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3 + 0\overline{a}_4$.

$$2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3 + 0\overline{a}_4 = (2, -4, 6, -18) + (-3, 0, 3, 15) + (0, 0, 2, -4) +$$

$$+(0, 0, 0, 0) = (-1, -4, 11, -7).$$

Folosind operaţiile liniare asupra vectorilor, se poate scrie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.3}$$

sub formă vectorială. Pentru aceasta notăm prin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coloanele de coeficienţi ai necunoscutelor respective $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar prin $B$ – coloana termenilor liberi ai acestui sistem de ecuaţii:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Considerăm aceste coloane ca vectori de înălţimea $m$ ai spaţiului $\mathbf{R}^m$.

Acum sistemul liniar (3.3) se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

sau

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B. \tag{3.4}$$

(3.3) $\sim$ (3.4). Egalitatea (3.4) exprimă sistemul de ecuaţii liniare (3.3) scris sub *formă vectorială*. Egalitatea (3.4) se numeşte *ecuaţie vectorială*.

Pentru a exprima vectorul $B$ ca o combinaţie liniară de vectorii $A_1, A_2, \ldots, A_n$, este suficient de a găsi o soluţie a ecuaţiei vectoriale (3.4) şi deci a sistemului liniar (3.3) echivalent cu ecuaţia (3.4).

Exemplul 2. Se dă sistemul de vectori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Să se clarifice dacă vectorul $B$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de vectorii $A_1, A_2, A_3$.

Fie că vectorul $B$ se exprimă liniar prin vectorii $A_1, A_2, A_3$:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = B.$$

Această ecuaţie vectorială este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Aflăm soluţia generală a acestui sistem liniar prin metoda lui Jordan-Gauss (p. 2.5, cap. 2).

Avem

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \ldots \rightarrow \quad \begin{array}{|ccc|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array},$$

de unde rezultă că sistemul de ecuaţii iniţial are soluţia $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Prin urmare, $B = 2A_1 + A_2 + A_3$, adică vectorul $B$ este o combinaţie liniară de vectorii $A_1, A_2, A_3$.

**Lema 3.1.** *Dacă un vector $\overline{x}$ se exprimă liniar prin vectorii unui sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$, atunci acest vector $\overline{x}$ se va exprima liniar şi prin vectorii oricărui sistem completat de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_k$ care conţine toţi vectorii sistemului iniţial de vectori.*

▷ Într-adevăr, dacă $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{x}_n$, atunci, de asemenea,

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{x}_n + 0 \cdot \overline{y}_1 + 0 \cdot \overline{y}_2 + \ldots + 0 \cdot \overline{y}_k. \triangleleft$$

Această lemă mai poate fi exprimată şi astfel: *dacă un vector $\overline{x}$ se exprimă liniar prin vectorii unui subsistem al sistemului dat de vectori, atunci acest vector se exprimă liniar şi prin vectorii întregului acest sistem de vectori.*

**Teorema 3.1** (proprietatea de tranzitivitate). *Dacă un vector $\overline{z}$ este o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r$, iar fiecare dintre aceşti vectori, la rândul său, este o combinaţie liniară de vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s$, atunci şi vectorul $\overline{z}$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s$.*

▷ Fie

$$\overline{z} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{x}_i \tag{3.5}$$

şi, în plus, pentru toate numerele $i$,

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \overline{y}_j,$$

unde $\alpha_i$ şi $\beta_{ij}$ – numere reale.

Înlocuind expresia pentru $\overline{x}_i$ în membrul drept (3.5) şi folosind proprietăţile respective ale sumelor finite, obţinem

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left( \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \overline{y}_j \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_{ij} \overline{y}_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_{ij} \overline{y}_j = \\
&= \sum_{j=1}^{s} \left( \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_{ij} \right) \overline{y}_j = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \overline{y}_j,
\end{aligned}$$

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_{ij}.$$

Aşadar, tranzitivitatea noţiunii de combinaţie liniară într-adevăr are loc. ◁

## 3.6. Dependenţă şi independenţă liniară a vectorilor

**Definiţia 1.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar dependent* dacă cel puţin unul dintre aceşti vectori ai sistemului poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de ceilalţi $k-1$ vectori, de exemplu,

$$\overline{x}_k = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{x}_{k-1}, \tag{3.1}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ – numere reale.

Exemplul 1. Vectorii $\overline{x}_1 = (1,2,0)$, $\overline{x}_2 = (1,-1,1)$ şi $\overline{x}_3 = (5,1,3)$ sunt liniar dependenţi, deoarece se îndeplineşte $\overline{x}_3 = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2$.

Definiţia introdusă a dependenţei liniare a sistemului de vectori separă de toţi ceilalţi un anumit vector al sistemului. Spre a evita această separare, deseori se foloseşte o altă definiţie a dependenţei liniare.

**Definiţia 2.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar dependent* dacă există aşa numere reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, nu toate nule ($|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$), încât

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}. \qquad (3.2)$$

Pentru cazul în care toţi coeficienţii sunt nuli, evident, această egalitate este îndeplinită trivial. O egalitate de forma (3.2) se numeşte *relaţie de dependenţă liniară* a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$.

Definiţia 2 este echivalentă cu definiţia 1 iniţială, adică (3.1) $\sim$ $\sim$ (3.2).

▷ Într-adevăr, dacă avem, de exemplu, egalitatea (3.1), atunci trecându-l pe $\overline{x}_k$ în membrul drept al egalităţii, obţinem

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\overline{x}_{k-1} + (-1)\overline{x}_k = \overline{0}$$

şi, prin urmare, avem egalitatea (3.2), pentru care $\alpha_k = -1 \neq 0$.

Invers, dacă are loc egalitatea (3.2) şi, de exemplu, $\alpha_k \neq 0$, atunci

$$\overline{x}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\overline{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\overline{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\overline{x}_{k-1}$$

şi deci se indeplineşte egalitatea (3.1). ◁

Exemplul 2. Vectorii $\overline{x}_1 = (1,2,0)$, $\overline{x}_2 = (1,-1,1)$ şi $\overline{x}_3 = (5,1,3)$ sunt liniar dependenţi în conformitate cu definiţia 2.

Într-adevăr, egalitatea (3.2) este satisfăcută nu numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, dar şi pentru mulţi alţi coeficienţi, nu toţi egali cu zero, de exemplu $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = -1$, adică are loc egalitatea

$$2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 - \overline{x}_3 = \overline{0}.$$

Definiţia independenţei liniare a sistemului de vectori se introduce ca negarea dependenţei liniare.

**Definiţia 3.** Un sistem de vectori se numeşte *liniar independent* dacă nici unul dintre vectorii sistemului nu poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori.

Mai des însă se foloseşte o altă definiţie a independenţei liniare, echivalentă cu această definiţie.

**Definiţia 4.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar independent* dacă egalitatea $\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$ ($\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$) este posibilă numai în cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, adică dacă din egalitatea (3.2) rezultă că toţi coeficienţii combinaţiei liniare sunt egali cu zero:

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Dependenţa şi independenţa liniară sunt proprietăţi ale sistemului de vectori. Cu toate acestea, foarte des aceste proprietăţi se atribuie însişi vectorilor. De aceea, în loc de "sistem de vectori, liniar independent" vom spune câteodată "sistem de vectori liniar independenţi" şi "vectorii liniar dependenţi $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$" în loc de "sistemul de vectori, liniar dependent $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$".

E x e m p l u l 3. Să se clarifice dacă sistemul de vectori

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

este liniar dependent sau liniar independent.

Cerem respectarea egalităţii $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$. Rezolvăm acest sistem de ecuaţii liniare prin metoda Jordan-Gauss:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $-3$ | $5$ | $1$ | $0$ |
| $1$ | $-5$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $-25$ | $2$ | $0$ |
| $-2$ | $0$ | $1$ | $0$ |

$\rightarrow \ldots \rightarrow$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $-10$ | $1$ | $0$ |
| $1$ | $-5$ | $0$ | $0$ . |

Soluţia generală a sistemului liniar iniţial are forma

$$\begin{cases} x_3 = 10x_2, \\ x_1 = 5x_2. \end{cases}$$

Acest sistem are soluţia nenulă $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 10$. Prin urmare, vectorii $A_1, A_2, A_3$ sunt liniar dependenţi.

Exemplul 4. Să se explice dacă sistemul de vectori

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

este liniar dependent sau liniar independent.

Cerem respectarea egalităţii $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0$. Transformăm acest sistem de ecuaţii liniare prin metoda Jordan-Gauss:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $-4$ | 1 | 3 | 0 |
| $-5$ | 2 | 1 | 0 |
| $-7$ | 3 | 2 | 0 |

$\rightarrow \ldots \rightarrow$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

.

Rezultă că sistemul de ecuaţii, iniţial, are o singură soluţie: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Deci sistemul de ecuaţii nu are alte soluţii decât cea nulă. În aşa fel, sistemul de vectori $A_1, A_2, A_3$ este liniar independent.

Noţiunea de dependenţă liniară şi de independenţă liniară a vectorilor are o mare importanţă în reprezentarea vectorului ca o combinaţie liniară a unui sistem de vectori.

Aceasta rezultă din următoarea teoremă.

**Teorema 3.2.** *Dacă vectorul $\overline{x}$ se poate reprezenta (scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, atunci, în cazul în care sistemul $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar independent, această reprezentare (scriere) este unică, iar în cazul în care acest sistem este liniar dependent – nu este unică.*

▷ Într-adevăr, dacă $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k$ şi $\overline{x} = \alpha_1'\overline{x}_1 + \alpha_2'\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k'\overline{x}_k$ – două reprezentări liniare ale vectorului $\overline{x}$ prin vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, atunci, scăzând prima egalitate din a doua, obţinem

$$(\alpha_1' - \alpha_1)\overline{x}_1 + (\alpha_2' - \alpha_2)\overline{x}_2 + \ldots + (\alpha_k' - \alpha_k)\overline{x}_k = \overline{0}.$$

Din această egalitate rezultă

1) $\alpha_i' - \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$, sau $\alpha_i' = \alpha_i$, dacă vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ sunt liniar independenţi, şi

2) egalitatea $\alpha_i' - \alpha_i = 0$ se respectă nu pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, k$ dacă aceşti vectori sunt liniar dependenţi. ◁

Noţiunile de dependenţă liniară şi de independenţă liniară a sistemului de vectori sunt generalizarea noţiunilor de coliniaritate şi necoliniaritate a doi vectori geometrici în plan şi de coplanaritate şi necoplanaritate a trei vectori în spaţiul de trei dimensiuni. Dependenţa liniară a doi vectori înseamnă coliniaritatea lor, iar dependenţa liniară a trei vectori – coplanaritatea lor.

În următoarele teoreme sunt adunate cele mai elementare şi importante concluzii despre dependenţa liniară.

**Teorema 3.3.** *Un sistem de vectori care constă numai dintr-un singur vector $\overline{x}_1$ este liniar independent dacă $\overline{x}_1 \neq \overline{0}$ şi liniar dependent dacă $\overline{x}_1 = \overline{0}$.*

▷ Demonstrarea teoremei rezultă din definiţia dependenţei liniare şi a independenţei liniare. Într-adevăr, din egalitatea $\alpha_1 \overline{x}_1 = \overline{0}$, în cazul $\overline{x}_1 \neq \overline{0}$, rezultă $\alpha_1 = 0$, iar în cazul $\overline{x}_1 = \overline{0}$, se admite $\alpha_1 \neq 0$. ◁

**Teorema 3.4.** *Dacă un subsistem oarecare (adică o parte) a unui sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar dependent, atunci şi întreg sistemul este liniar dependent.*

▷ Să admitem, ceea ce nu restrânge generalitatea, că subsistemul din primii vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q$ ai sistemului dat este liniar dependent. Atunci, conform definiţiei dependenţei liniare, există astfel de numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, nu toate nule, încât

$$\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_q \overline{x}_q = \overline{0}.$$

De aici rezultă respectarea egalităţii

$$\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_q \overline{x}_q + 0 \cdot \overline{x}_{q+1} + \ldots + 0 \cdot \overline{x}_k = \overline{0}.$$

Dar această egalitate înseamnă dependenţa liniară a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, deoarece între numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, 0, \ldots, 0$ sunt unele diferite de zero. ◁

Teorema 3.4 mai poate fi formulată astfel: *dacă sistemul de vectori este liniar dependent, atunci orice sistem completat care conţine în întregime sistemul dat de vectori de asemenea este liniar dependent.*

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă sistemul de vectori este liniar independent, atunci şi orice subsistem al său de asemenea este liniar independent.*

▷ Rezultă din teorema 3.4 prin metoda de la contrar. ◁

**T e o r e m a 3.5.** *Dacă vectorul nul* $\overline{0}$ *se întâlneşte în sistemul de vectori* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, *atunci acest sistem de vectori ecte liniar dependent.*

▷ Într-adevăr, dacă de exemplu $\overline{x}_k = \overline{0}$, atunci totdeauna se poate scrie $\overline{x}_k = \overline{0} = 0 \cdot \overline{x}_1 + 0 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \overline{x}_{k-1}$, adică vectorul nul poate fi exprimat ca o combinaţie liniară (cu coeficienţi nuli) de ceilalţi vectori ai sistemului. ◁

**T e o r e m a 3.6.** *Dacă printre vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *se află astfel de vectori* $\overline{x}_p$ *şi* $\overline{x}_q$, *încât* $\overline{x}_p = \lambda \overline{x}_q$, *unde* $\lambda$ *– un număr real, atunci acest sistem de vectori este liniar dependent.*

▷ Într-adevăr, din egalitatea $\overline{x}_p = \lambda \overline{x}_q$, unde $\lambda$ – un număr real, rezultă că subsistemul de vectori $\overline{x}_p, \overline{x}_q$ ai sistemului $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar dependent.

Deci, conform teoremei 3.4, sistemul $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ în întregime este liniar dependent. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă un vector* $\overline{x}$ *se repetă în sistemul de vectori mai mult decât o singură dată, atunci acest sistem este liniar dependent.*

Teorema următoare constituie procedeul principal de demonstrare a multor teoreme.

**T e o r e m a 3.7.** *Vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *sunt liniar dependenţi atunci şi numai atunci când sau* $\overline{x}_1 = \overline{0}$, *sau un vector* $\overline{x}_q$, $2 \leq q \leq k$, *este o combinaţie liniară de vectorii precedenţi.*

▷ Presupunem că vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ sunt liniar dependenţi. Atunci există numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, între care cel puţin unul este diferit de zero, încât $\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_b \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k = \overline{0}$. Fie că ultimul coeficient nenul în această egalitate este $\alpha_q$. Dacă $q = 1$, atunci aceasta

înseamnă că $\overline{x}_1 = \overline{0}$. Fie acum $q > 1$. Atunci aflăm că

$$\overline{x}_q = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_q}\right)\overline{x}_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_q}\right)\overline{x}_2 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{q-1}}{\alpha_q}\right)\overline{x}_{q-1}.$$

Prin aceasta este demonstrată necesitatea teoremei.

Suficienţa este evidentă, deoarece şi cazul în care $\overline{x}_1 = \overline{0}$, şi cazul că vectorul $\overline{x}_q$ se exprimă liniar prin vectorii precedenţi înseamnă dependenţa liniară a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q$. Dar din aceasta rezultă dependenţa liniară şi a sistemului de vectori în întregime. ◁

C o n s e c i n ţ a 1. *Dacă vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *sunt liniar independenţi, iar vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \overline{x}$ *– liniar dependenţi, atunci* $\overline{x}$ *este o combinaţie liniară a sistemului de vectori* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$.

▷ Într-adevăr, deoarece $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ sunt liniar independenţi, rezultă că $\overline{x}_1 \neq \overline{0}$ şi nici unul dintre aceşti vectori nu se exprimă liniar prin cei precedenţi. Din faptul că vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \overline{x}$ sunt liniar dependenţi, conform teoremei 3.7, rezultă că vectorul $\overline{x}$ se exprimă liniar prin $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$. ◁

C o n s e c i n ţ a 2. *Dacă vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *sunt liniar independenţi, iar vectorul* $\overline{x}$ *nu poate fi exprimat liniar prin aceşti vectori, atunci sistemul* $\overline{x}_q, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \overline{x}$ *este liniar independent.*

▷ Într-adevăr, dacă presupunem, prin absurd, că vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \overline{x}$ sunt liniar dependenţi, atunci, conform consecinţei 1, $\overline{x}$ se exprimă liniar prin $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, ceea ce contrazice condiţia teoremei. Aşadar, avem că $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k, \overline{x}$ sunt liniar independenţi. ◁

## 3.7. Sisteme echivalente de vectori

### 3.7.1. Noţiunea de echivalenţă a sistemelor de vectori

Considerăm două sisteme de vectori:

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k \tag{3.1}$$

şi

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m. \tag{3.2}$$

**Definiţie.** Două sisteme de vectori (3.1) şi (3.2) se numesc *echivalente* dacă orice vector al fiecăruia dintre aceste sisteme se exprimă liniar prin vectorii celuilalt sistem.

Cu alte cuvinte, două sisteme (3.1) şi (3.2) sunt echivalente dacă fiecare vector al primului sistem se exprimă liniar prin vectorii sistemului al doilea şi reciproc. Vom nota acest fapt (3.1)~(3.2) ("~" – semnul echlvalenţei).

Noţiunea de echivalenţă a două sisteme posedă proprietatea de tranzitivitate, adică dacă sistemul $A$ este echivalent cu sistemul $B$, iar sistemul $B$, la rândul său, este echivalent cu sistemul $C$, atunci sistemul $A$ este echivalent cu sistemul $C$. Aceasta rezultă nemijlocit din tranzitivitatea noţiunii de combinaţie liniară a vectorilor.

Despre relaţia numărului de vectori ai sistemelor echivalente, în cazul general, nu se poate spune nimic determinat. Însă dacă cel puţin unul dintre două sisteme este liniar independent, atunci putem spune următoarele.

**T e o r e m a 3.8.** *Dacă fiecare dintre vectorii unui sistem liniar independent* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *se exprimă liniar prin vectorii* $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$, *atunci* $n \leq m$.

▷ Conform condiţiei teoremei, vectorul $\overline{e}_n$ se exprimă liniar prin vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$, prin urmare, sistemul de vectori

$$\overline{e}_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m \tag{3.3}$$

este liniar dependent. Vectorul $\overline{e}_n$ nu este nul, de aceea, conform teoremei 3.7, un vector $\overline{y}_i$ din (3.3) este o combinaţie liniară a celor precedenţi. Fie, pentru determinare, că acesta este $\overline{y}_m$. Excluzând acest vector, obţinem sistemul

$$\overline{e}_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{m-1}. \tag{3.4}$$

Deoarece, după condiţia teoremei, vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ se exprimă liniar prin $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$, *fiecare dintre vectorii* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *se exprimă liniar şi prin vectorii sistemului* (3.3). De exemplu, dacă $\overline{e}_1 = \alpha_1 \overline{y}_1 + \ldots + \alpha_m \overline{y}_m$, atunci $\overline{e}_1 = 0 \cdot \overline{e}_n + \alpha_1 \overline{y}_1 + \ldots + \alpha_m \overline{y}_m$, adică vectorul $\overline{e}_1$ se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.3) etc.

La rândul său, *fiecare dintre vectorii sistemului* (3.3) *se exprimă liniar prin vectorii sistemului* (3.4).

Într-adevăr, prin admiterea teoremei 3.7, $\overline{y}_m$ se exprimă prin cei precedenţi, adică prin vectorii sistemului (3.4). Toţi ceilalţi vectori ai sistemului (3.3), evident, de asemenea se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.4), de exemplu, $\overline{e}_n = 1 \cdot \overline{e}_n + 0 \cdot \overline{y}_1 + \ldots + 0 \cdot \overline{y}_{m-1}$ etc.

Acum, folosind tranzitivitatea noţiunii de combinaţie liniară, conchidem că *fiecare dintre vectorii* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *se exprimă liniar prin vectorii sistemului* (3.4).

Anexăm la vectorii sistemului (3.4) din stânga vectorul $\overline{e}_{n-1}$. Din nou ajungem la concluzia că sistemul

$$\overline{e}_{n-1}, \overline{e}_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{m-1} \tag{3.5}$$

este liniar dependent. Vectorul $\overline{e}_{n-1}$ nu este nul, de aceea, conform teoremei 3.7, unul dintre vectorii sistemului (3.5) este o combinaţie liniară a vectorilor precedenţi. Acest vector nu poate să fie $\overline{e}_n$, deoarece atunci ar fi liniar dependent sistemul din doi vectori $\overline{e}_{n-1}, \overline{e}_n$, iar prin urmare, şi întregul sistem $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. În aşa fel, un vector $\overline{y}_j$ din (3.5) se exprimă liniar prin cei precedenţi. Pentru determinare, fie că acesta este vectorul $\overline{y}_{m-1}$. Dacă îl excludem, obţinem sistemul

$$\overline{e}_{n-1}, \overline{e}_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{m-2}. \tag{3.6}$$

Din nou conchidem că vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.6).

Continuând acest proces, observăm că vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$ nu pot fi epuizaţi mai înainte de a fi uniţi toţi vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. În caz contrar, ar reieşi că fiecare dintre vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ se exprimă liniar printr-o parte de vectori ai sistemului însuşi, adică sistemul în întregime ar fi liniar dependent. Deoarece aceasta contrazice condiţia teoremei, rezultă că $n \leq m$. ◁

C o n s e c i n ţ a 1. *Sistemele echivalente liniar independente constau din unul şi acelaşi număr de vectori.*

▷ Într-adevăr, conform teoremei 3.8, fiecare dintre aceste sisteme conţine nu mai mulţi vectori decât celălalt sistem, adică $n \leq m$ şi $m \leq n$, de unde rezultă $m = n$. ◁

C o n s e c i n ţ a 2. *Dacă fiecare dintre vectorii* $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$ *este o combinaţie liniară a sistemului de vectori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ *şi* $n > m$, *atunci sistemul de vectori* $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$ *este liniar dependent.*

▷ Într-adevăr, dacă sistemul $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$ ar fi liniar independent, atunci am avea $n \leq m$, ceea ce contrazice condiţia $n > m$. ◁

E x e m p l u. Sistemele de vectori

$$\overline{a}_1 = (4, 8), \quad \overline{a}_2 = (-5, -4) \tag{3.7}$$

şi

$$\bar{b}_1 = (1,2), \quad \bar{b}_2 = (3,0), \quad \bar{b}_3 = (11,4) \tag{3.8}$$

sunt echivalente.

▷ Într-adevăr, uşor putem verifica, că au loc egalităţile: $\bar{a}_1 = 2\bar{b}_1 - 3\bar{b}_2 + \bar{b}_3$, $\bar{a}_2 = 0\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 - \bar{b}_3$ şi reciproc $\bar{b}_1 = \frac{1}{4}\bar{a}_1 + 0\bar{a}_2$, $\bar{b}_2 = -\frac{1}{2}\bar{a}_1 - \bar{a}_2$, $\bar{b}_3 = -\bar{a}_1 - 3\bar{a}_2$.

Deci sistemele (3.7) şi (3.8) sunt echivalente. Mai mult ca atât, conform consecinţei 2, putem afirma că sistemul de vectori (3.8) este liniar dependent. ◁

Menţionăm că un sistem oarecare de vectori poate să fie echivalent cu un subsistem al său de vectori. Aşa, de exemplu, în virtutea egalităţii $\bar{b}_3 = 2\bar{b}_1 + 3\bar{b}_2$, sistemul (3.8) este echivalent subsistemului ce constă din vectorii $\bar{b}_1, \bar{b}_2$.

### 3.7.2. Transformări elementare asupra unui sistem de vectori

**Definiţie.** Se numesc *transformări elementare* ale unui sistem de vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ următoarele transformări:

1) permutarea a doi vectori ai sistemului între ei;

2) înmulţirea unui vector al sistemului cu un număr real $\alpha \neq 0$;

3) adăugarea la un vector al sistemului a unei combinaţii liniare a celorlalţi vectori;

4) excluderea din sistem a unui vector, care este o combinaţie liniară a celorlalţi vectori;

5) anexarea la sistemul de vectori a unei combinaţii liniare a acestor vectori.

**T e o r e m a 3.9.** *Transformările elementare ale unui sistem de vectori conduc la un sistem echivalent cu cel iniţial.*

Demonstraţia acestei teoreme se pune pe seama cititorului în calitate de exerciţiu.

## 3.8. Bază a unui sistem de vectori. Rangul sistemului

Fie un sistem arbitrar de vectori

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k \tag{3.1}$$

ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ astfel, încât nu toţi vectorii săi sunt egali cu vectorul nul $\overline{0}$. Dintre toate subsistemele sistemului dat de vectori unele sunt liniar independente (de exemplu acele ce constau dintr-un singur vector nenul). Printre toate subsistemele liniar independente există un astfel de subsistem care conţine numărul maxim de vectori liniar independenţi.

Aşadar, fie că subsistemul

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r \tag{3.2}$$

al sistemului de vectori (3.1) constă din numărul maxim $r$ ($r \leq k$) de vectori liniar independenţi. În particular, subsistemul (3.2) poate şi să coincidă cu sistemul (3.1). Fiecare dintre vectorii $\overline{e}_i$ este unul dintre vectorii $\overline{x}_j$ ai sistemului (3.1).

Fie acum $\overline{x}$ un vector arbitrar al sistemului (3.1).

Atunci sistemul de vectori

$$\overline{x}, \overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_r$$

este liniar dependent (deoarece, în caz contrar, subsistemul (3.2) nu ar consta din numărul maxim de vectori liniar independenţi). Aceasta înseamnă că există aşa numere $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, nu toate egale cu zero, încât are loc egalitatea

$$\alpha\overline{x} + \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_r\overline{e}_r = \overline{0}.$$

Rezultă $\alpha \neq 0$, deoarece în caz contrar subsistemul (3.2) ar fi liniar dependent, ceea ce contrazice alegerii vectorilor $\overline{e}_i$. Împărţind această egalitate la numărul $\alpha \neq 0$, obţinem

$$\overline{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\overline{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\overline{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_r}{\alpha}\overline{e}_r. \tag{3.3}$$

Egalitatea obţinută înseamnă că *orice vector* $\overline{x}$ *al sistemului* (3.1) *se exprimă liniar prin vectorii subsistemului său* (3.2), *care constă din numărul maxim de vectori liniar independenţi.*

Am ajuns la următoarea definiţie.

**Definiţia 1.** Un subsistem liniar independent (3.2) al sistemului de vectori (3.1) se numeşte *bază* a acestui sistem de vectori (3.1) dacă fiecare vector $\overline{x}$ al sistemului (3.1) se poate reprezenta (scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului (3.2):

$$\overline{x} = \lambda_1 \overline{e}_1 + \lambda_2 \overline{e}_2 + \ldots + \lambda_r \overline{e}_r, \tag{3.4}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sunt numere reale (coeficienţi), iar $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ – vectorii subsistemului (3.2).

Conform teoremei 3.2, scrierea (3.4) este unică.

În genere, sistemul de vectori (3.1) poate avea mai mult decât o singură bază. De exemplu, după cum se poate uşor de verificat, sistemul din doi vectori nenuli liniar dependenţi $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ are două baze: una constă din vectorul $\overline{x}_1$, alta – din vectorul $\overline{x}_2$. Menţionăm că sistemul în care toţi vectorii sunt nuli nu are bază, deoarece el nu are subsisteme liniar independente.

În termenii sistemelor echivalente, definiţia bazei poate fi formulată în felul următor.

Se numeşte *bază* a sistemului de vectori

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$$

un subsistem echivalent al său de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$, liniar independent.

**T e o r e m a 3.10.** 1) *Orice subsistem format din numărul maxim $r$ de vectori liniar independenţi ai sistemului* (3.1) *este o bază a acestui sistem de vectori* (3.1).

2) *Toate bazele sistemului de vectori* (3.1) *şi cele ale sistemelor echivalente cu el constau din unul şi acelaşi număr maxim $r$ de vectori liniar independenţi.*

▷ 1) Mai sus am arătat că dacă un subsistem de vectori (3.2) al sistemului de vectori (3.1) constă din numărul maxim $r$ de vectori liniar independenţi, atunci fiecare vector al sistemului (3.1) se exprimă liniar prin vectorii subsistemului (3.2) sub forma (3.3), adică subsistemul (3.2) este bază a sistemului de vectori (3.1). Dacă $r = k$, atunci însuşi sistemul (3.1) este bază pentru sine însuşi. In aşa fel, prima parte a teoremei este demonstrată.

2) Conform primei părţi a teoremei, una dintre bazele sistemului de vectori (3.1) este subsistemul său (3.2), ce constă din numărul maxim de vectori liniar independenţi. Pe de altă parte, în conformitate cu lema 3.1, sistemul de vectori (3.1) şi baza sa (3.2) sunt sisteme echivalente de vectori.

În virtutea tranzitivităţii noţiunii de echivalenţă, rezultă că toate bazele sistemului (3.1) şi ale sistemelor echivalente cu el reprezintă ele însele sisteme echivalente şi, totodată, liniar independente.

Atunci, conform consecinţei 1 a teoremei 3.8, rezultă că ele constau din unul şi acelaşi număr maxim $r$ de vectori liniar independenţi. ◁

Din teorema 3.10 se constată că numărul vectorilor bazei a sistemului de vectori este o caracteristică a acestui sistem de vectori.

**Definiţia 2.** Se numeşte *rangul* unui sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ numărul $r$ de vectori ai unei baze oarecare a sa.

Prin definiţie, rangul sistemului de vectori nuli se consideră egal cu zero.

O bază a unui sistem de vectori pate fi obţinută prin următorul procedeu.

*Pentru a găsi o bază a sistemului de vectori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, *e suficient să rezolvăm sistemul de ecuaţii liniare*:

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_k\overline{a}_k = \overline{0} \tag{3.5}$$

*prin metoda Jordan-Gauss. Atunci vectorii-coeficienţi ai ecuaţiei vectoriale* (3.5) *de pe lângă necunoscutele care alcătuiesc completul de necunoscute explicitate ale soluţiei generale a acestui sistem liniar formează o bază a sistemului de vectori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$.

▷ Într-adevăr, ecuaţia vectorială (3.5) este echivalentă unui sistem corespunzător de ecuaţii liniare omogene. Rezolvăm acest sistem liniar prin metoda Jordan-Gauss cu ajutorul tabelelor lui Gauss (p. 2.5, cap. 2). Deoarece în tabelul iniţial toţi termenii liberi sunt egali cu zero, evident, şi în ultimul tabel transformat al lui Gauss toţi termenii liberi sunt egali cu zero. Ultimul tabel al lui Gauss stabileşte necunoscutele principale (bazice) şi cele secundare şi determină soluţia generală a sistemului iniţial (3.5). Dând tuturor necunoscutelor secundare valoarea 0, de exemplu $x_{k-1} = 0$, $x_k = 0$, din (3.5) obţinem egalitatea vectorială coeficienţii căreia sunt valorile respective ale necunoscutelor bazice:

$$x_1\overline{a}_1 + \ldots + x_{k-2}\overline{a}_{k-2} = \overline{0},$$

iar din ultimul tabel avem că $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k-2} = 0$. Aceasta înseamă că *vectorii sistemului* (3.5) *de pe lângă necunoscutele bazice sunt liniar independenţi.*

Atribuind uneia dintre necunoscutele secundare valoarea $-1$, de exemplu $x_k = -1$, iar tuturor celorlalte necunoscute secundare valoarea 0, obţinem din soluţia generală valorile respective pentru necunoscutele bazice: $x_1 = x_1^\circ, \ldots, x_{k-2} = x_{k-2}^\circ$. Punând această soluţie în (3.5), avem că vectorul $\overline{a}_k$ de pe lângă necunoscuta $x_k$ se exprimă liniar prin vectorii de pe lângă necunoscutele bazice: $x_1^\circ \overline{a}_1 + \ldots + x_{k-2}^\circ \overline{a}_{k-2} + 0 \cdot \overline{a}_{k-1} - 1 \cdot \overline{a}_k = 0$, sau $\overline{a}_k = x_1^\circ \overline{a}_1 + \ldots + x_{k-2}^\circ \overline{a}_{k-2}$.

Mai departe, fiecare dintre vectorii sistemului $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{k-2}$ se exprimă liniar prin vectorii acestui sistem, de exemplu

$$\overline{a}_1 = 1 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \overline{a}_{k-2}.$$

În aşa fel, *orice vector al sistemului de vectori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ *se exprimă liniar prin vectorii-coeficienţi ai ecuaţiei* (3.5) *de pe lângă necunoscutele ce formează completul de necunoscute explicitate ale soluţiei generale a sistemului liniar* (3.5).

Prin urmare, vectorii-coeficienţi ai ecuaţiei (3.5) de pe lângă necunoscutele principale formează o bază a sistemului de vectori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$. ◁

E x e m p l u. De găsit baza şi rangul sistemului de vectori:
$\overline{a}_1 = (5, -3, -2, 1)$, $\overline{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$,
$\overline{a}_3 = (1, 0, -3, -2)$, $\overline{a}_4 = (3, 1, 1, 2)$.
Rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$x_1 \overline{a}_1 + x_2 \overline{a}_2 + x_3 \overline{a}_3 + x_4 \overline{a}_4 = \overline{0} \tag{3.6}$$

prin metoda Jordan-Gauss. Avem:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| −3 | −3 | 0 | 1 | 0 |
| −2 | 1 | −3 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | −2 | 2 | 0 |

$\to \ldots \to$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | −1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

.

Din ultimul tabel rezultă că necunoscutele $x_1, x_3, x_4$ alcătuiesc completul de necunoscute explicitate ale soluţiei generale a sistemului

de ecuaţii (3.6). Prin urmare, vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \overline{a}_4$ formează o bază a sistemului de vectori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4$. Rangul acestui sistem de vectori este egal cu 3 ($r = 3$).

Să citǎm acum o altă definiţie a rangului.

**Definiţia 3.** Numărul maxim $r$ de vectori liniar independenţi ai sistemului de vectori

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$$

se numeşte *rangul* acestui sistem de vectori.

În virtutea teoremei 3.10, definiţiile 2 şi 3 sunt echivalente.

C o n s e c i n ţ a 1. *Sistemele echivalente de vectori au acelaşi rang.*

▷ Rezultă din teorema 3.10 şi din definiţia 3. ◁

C o n s e c i n ţ a 2. *Dacă rangul sistemului de vectori* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *este egal cu* $r$, *atunci fiecare subsistem liniar independent (parte) a acestui sistem, ce constă din* $r$ *vectori, este o bază a sa.*

▷ Rezultă din definiţia 3 şi din teorema 3.10. ◁

**T e o r e m a 3.11.** *Fiecare subsistem liniar independent al unui sistem de vectori poate fi completat până la o bază a acestui sistem.*

▷ Fie sistemul de vectori (3.1) şi un subsistem liniar independent al său:

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p. \tag{3.7}$$

Fiecare dintre vectorii $\overline{y}_i$ este unul dintre vectorii $\overline{x}_j$ ai sistemului (3.1).

Alegem o bază $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ a sistemului (3.1) şi compunem consecutivitatea

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r. \tag{3.8}$$

Aruncăm din această consecutivitate toţi vectorii care se exprimă liniar prin cei precedenţi. Întrucât $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p$ sunt liniar independenţi, nici unul dintre ei nu va fi aruncat, iar sistemul rămas capătă forma

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p, \overline{e}_{i_1}, \overline{e}_{i_2}, \ldots, \overline{e}_{i_s}. \tag{3.9}$$

În virtutea teoremei 3.7, acest sistem este liniar independent. Toţi vectorii sistemului (3.8) se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.9).

Într-adevăr, fiecare vector care nu se exprimă liniar prin cei precedenţi ai consecutivităţii (3.8) este inclus în sistemul (3.9), de

aceea el se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.9), de exemplu, $\overline{y}_2 = 0 \cdot \overline{y}_1 + 1 \cdot \overline{y}_2 + \ldots + 0 \cdot \overline{y}_p + 0 \cdot \overline{e}_{i_1} + \ldots + 0 \cdot \overline{e}_{i_s}$.

Conform proprietăţii de tranzitivitate a noţiunii de echivalenţă, conchidem că fiecare vector $\overline{e}_q$ eliminat din sistemul (3.8) se exprimă liniar printr-o parte din vectorii precedenţi ai acestui sistem, care, la rândul său, deja nu se exprimă liniar prin precedenţii lor, adică $\overline{e}_q$ se exprimă liniar printr-o parte de vectori ai sistemului (3.9). Conform lemei 3.1, vectorul $\overline{e}_q$ se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.9).

În aşa fel, fiecare vector al sistemului (3.8) se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.9).

Pe baza lemei 3.1, un vector arbitrar $\overline{x}$ al sistemului (3.1) se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.8). Atunci, conform proprietăţii de tranzitivitate, conchidem că vectorul arbitrar $\overline{x}$ al sistemului (3.1) se exprimă liniar prin vectorii subsistemului său liniar independent (3.9). Prin urmare, sistemul (3.9) este o bază a sistemului de vectori (3.1), iar $\overline{e}_{i_1}, \overline{e}_{i_2}, \ldots, \overline{e}_{i_s}$ sunt vectorii căutaţi ce completează subsistemul (3.7) până la o bază a sistemului de vectori (3.1).

De fapt, am arătat că dacă este dat un subsistem oarecare de vectori liniar independenţi $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p$ ai sistemului (3.1) şi o bază oarecare $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ a acestui sistem, atunci din această bază totdeauna se poate alege aşa $r-p$ vectori, încât ei împreună cu vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_p$ să formeze o bază a sistemului de vectori (3.1). ◁

**Teorema 3.12.** *Transformările elementare ale sistemului de vectori nu modifică rangul acestui sistem.*

▷ Rezultă din teorema 3.9 şi din consecinţa 1 a teoremei 3.10. ◁

În cele ce urmează vom avea nevoie de următoarele noţiuni. Vom numi *vectori-unitate* ai spaţiului $\mathbf{R}^n$ vectorii de o singură componentă nenulă, egală cu 1, şi anume: $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ (sau sub formă de coloane: $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\overline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$), unde $\overline{e}_i$ are componenta de rang $i$ egală cu 1, restul componentelor fiind zero.

## 3.9. Bază a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$. Dimensiunea spaţiului

Noţiunea de "bază" poate fi extinsă asupra oricărei mulţimi de vectori din $\mathbf{R}^n$, în particular asupra întregului spaţiu $\mathbf{R}^n$.

Într-adevăr, sistemul alcătuit din cei $n$ vectori-unitate:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= (1,0,\ldots,0), \\ \overline{e}_2 &= (0,1,\ldots,0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}_n &= (0,0,\ldots,1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

este liniar independent şi orice vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din $\mathbf{R}^n$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de vectorii acestui sistem, adică $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0}$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – numere reale) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0,0,\ldots,0)$ sau $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ şi $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1,0,\ldots,0) + (0,x_2,\ldots,0) + \ldots + (0,0,\ldots,x_n) =$ $= x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n$.

Acest fapt conduce la următoarea definiţie.

**Definiţia 1.** Un sistem de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ din spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ se numeşte *bază* a spaţiului $\mathbf{R}^n$ dacă sunt respectate condiţiile:

1) $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ este un sistem de vectori, liniar independent;

2) pentru fiecare vector $\overline{x}$ din $\mathbf{R}^n$ există aşa numere reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, încât $\overline{x}$ se poate exprima (reprezenta, scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ sub forma:

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n. \tag{3.2}$$

Egalitatea (3.2) se numeşte *scrierea vectorului* $\overline{x}$ *în baza* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. Egalitatea (3.2) se mai numeşte şi *descompunerea vectorului* $\overline{x}$ *după vectorii bazei* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. Deoarece sistemul $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ este liniar independent, conform teoremei 3.2, această scriere (descompunere) (3.2) este unică.

**Teorema 3.13.** 1) *În spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^n$ *există mai mult decât o singură bază.*

2) *Toate bazele spaţiului* $\mathbf{R}^n$ *constau exact din n vectori.*

▷ 1) Din cele expuse mai sus şi din definiţie rezultă că cei $n$ vectori-unitate (3.1) formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$. Orice vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ poate fi reprezentat sub forma

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – componentele vectorului $\overline{x}$. Numărul de vectori din baza (3.1) a spaţiului $\mathbf{R}^n$ este egal cu $n$.

Baza indicată (3.1), numită *baza canonică* (sau *standard*), nu este unica în $\mathbf{R}^n$. Într-adevăr, fie $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$, iar $\overline{b}$ – un alt vector nenul, oarecare, al acestui spaţiu. Considerăm că scrierea vectorului $\overline{b} \neq \overline{0}$ în baza dată este $\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{e}_i$. Unii dintre coeficienţii $\beta_i$ ai acestei scrieri, evident, sunt nenuli, de exemplu $\beta_r \neq 0$. Excludem din baza $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ vectorul $\overline{e}_r$, pentru care coeficientul respectiv $\beta_r \neq 0$, şi în locul lui introducem vectorul $\overline{b}$. Atunci obţinem un sistem nou de vectori:

$$\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{r-1}, \overline{b}, \overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_n, \tag{3.3}$$

care de asemenea este o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$. Într-adevăr, din condiţia $\alpha_1\overline{e}_1 + \ldots \alpha_{r-1}\overline{e}_{r-1} + \alpha_r\overline{b} + \alpha_{r+1}\overline{e}_{r+1} + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0}$, sau $\alpha_1\overline{e}_1 + \ldots \alpha_{r-1}\overline{e}_{r-1} + \alpha_r \left( \sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{e}_i \right) + \alpha_{r+1}\overline{e}_{r+1} + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0}$, în virtutea faptului că vectorii bazei sunt liniar independenţi, obţinem $\alpha_i + \alpha_r\beta_i = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq r$ şi $\alpha_r\beta_r = 0$. De aici, deoarece $\beta_r \neq 0$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, adică (3.3) este un sistem de vectori, liniar independent.

În presupunere că vectorul arbitrar $\overline{x}$ se exprimă liniar prin vectorii sistemului (3.3), rezultă:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= y_1\overline{e}_1 + \ldots y_{r-1}\overline{e}_{r-1} + y_r\overline{b} + y_{r+1}\overline{e}_{r+1} + \ldots + y_n\overline{e}_n = \ldots = \\ &= (y_1 + y_r\beta_1)\overline{e}_1 + \ldots + (y_{r-1} + y_r\beta_{r-1})\overline{e}_{r-1} + y_r\beta_r\overline{e}_r + \\ &\quad + (y_{r+1} + y_r\beta_{r+1})\overline{e}_{r+1} + \ldots + (y_n + y_r\beta_n)\overline{e}_n. \end{aligned}$$

În virtutea unicităţii descompunerii vectorului după vectorii bazei date, două reprezentări ale aceluiaşi vector $\overline{x}$ ca combinaţii liniare de vectorii bazei $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ implică egalitatea coeficienţilor: $x_i = y_i + y_r\beta_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq r$ şi $x_r = y_r\beta_r$, adică coeficienţii $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pot fi aflaţi. Aceasta înseamnă că vectorul arbitrar $\overline{x}$ într-adevăr se exprimă ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului (3.3).

Aşadar, sistemul nou de vectori (3.3) este de asemenea o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$. Deci în spaţiul $\mathbf{R}^n$ există mai mult decât o singură bază.

2) Uşor se observă că toate bazele spaţiului $\mathbf{R}^n$ reprezintă sisteme echivalente de vectori. După cum ştim (a se vedea consecinţa 1 a teoremei 3.8), astfel de sisteme conţin acelaşi număr de vectori. Prin urmare, toate bazele spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ constau din unul şi acelaşi

număr de vectori. Acest număr este egal cu $n$, deoarece baza arătată (3.1) a spaţiului $\mathbf{R}^n$ constă din $n$ vectori. $\triangleleft$

Din teorema 3.13 rezultă că numărul vectorilor din bază este o caracteristică a spaţiului $\mathbf{R}^n$.

**Definiţia 2.** Numărul de vectori ai unei baze a spaţiului $\mathbf{R}^n$, egal cu $n$, se numeşte *dimensiunea* spaţiului $\mathbf{R}^n$. În aşa fel, dimensiunea spaţiului $\mathbf{R}^n$ este $n$ şi $\mathbf{R}^n$ este spaţiu $n$-dimensional.

**Teorema 3.14.** 1) *Fiecare sistem de $n+1$ vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ este liniar dependent.*

2) *Oricare $n$ vectori liniar independenţi ai spaţiui $\mathbf{R}^n$ formează o bază a lui $\mathbf{R}^n$.*

3) *Numărul maxim de vectori liniar independenţi ai spaţiului $\mathbf{R}^n$ este egal cu dimensiunea $n$ a acestui spaţiu.*

$\triangleright$ 1) Spaţiul $\mathbf{R}^n$ are dimensiunea $n$. Atunci fiecare bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$ conţine $n$ vectori. Fie că sistemul

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n+1} \tag{3.4}$$

este un sistem arbitrar de vectori din spaţiul $\mathbf{R}^n$, iar sistemul

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \tag{3.5}$$

este o bază a acestui spaţiu. Atunci fiecare vector al sistemului (3.4) se exprimă liniar prin sistemul (3.5). Sistemul (3.4) nu poate fi liniar independent, deoarece, în caz contrar, conform teoremei 3.8, am avea $n+1 \leq n$, ceea ce nu este adevărat. Această contrazicere demonstrează că sistemul (3.4) compus din $n+1$ vectori ai spaţiului $\mathbf{R}^n$ totdeauna este liniar dependent.

2) Fie acum că $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ sunt oricare $n$ vectori liniar independenţi ai spaţiului $\mathbf{R}^n$, iar $\overline{y}$ – un vector arbitrar din $\mathbf{R}^n$. Atunci, după cum deja am demonstrat, sistemul $\overline{y}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ ce constă din $n+1$ vectori ai spaţiului $\mathbf{R}^n$ va fi liniar dependent, adică se vor găsi astfel de numere $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toate egale cu zero, încât este adevărată egalitatea

$$\alpha\overline{y} + \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{x}_n = \overline{0}. \tag{3.6}$$

Observăm că numărul $\alpha \neq 0$ (deoarece, în caz contrar, din egalitatea (3.6) ar rezulta dependenţa liniară a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$). Dar atunci, împărţind egalitatea (3.6) la $\alpha$, obţinem

$$\begin{aligned} \overline{y} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha}\overline{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\overline{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\overline{x}_n = \\ &= \alpha_1'\overline{x}_1 + \alpha_2'\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_n'\overline{x}_n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Întrucât $\overline{y}$ este un vector arbitrar din $\mathbf{R}^n$, egalitatea (3.7) şi demonstrează că sistemul alcătuit din $n$ vectori liniar independenţi oarecare $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ din $\mathbf{R}^n$ formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$.

3) Din cele demonstrate mai sus, $\mathbf{R}^n$ posedă baze, de exemplu cea standard, alcătuite fiecare din $n$ vectori liniar independenţi (a se vedea teorema 3.13). Pe de altă parte, oricare sistem de vectori ce conţine un număr mai mare de vectori decât $n$ conţine un subsistem din $n+1$ vectori care, conform punctului 1) al teoremei, este liniar dependent. Atunci, în conformitate cu teorema 3.4, rezultă că orice sistem ce constă dintr-un număr mai mare de vectori decât $n$ este liniar dependent. Prin urmare, în $\mathbf{R}^n$ numărul maxim de vectori liniar independenţi este egal cu $n$ – dimensiunea acestui spaţiu. ◁

C o n s e c i n ţ a 1. *În spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ toate bazele şi numai ele constau din unul şi acelaşi număr maxim $n$ de vectori liniar independenţi.*

C o n s e c i n ţ a 2. *În spaţiul $\mathbf{R}^n$ orice sistem liniar independent de vectori conţine cel mult $n$ vectori.*

**T e o r e m a 3.15.** *Orice sistem de $k$ vectori liniar independenţi $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$, $k < n$, ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ poate fi completat până la o bază a acestui spaţiu.*

▷ Fie $k < n$. Admitem că la vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ nu se poate adăuga un aşa vector $\overline{e}_{k+1}$, încât vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_{k+1}$ să fie liniar independenţi. Aceasta înseamnă că în spaţiul $\mathbf{R}^n$ există numai $k$ vectori liniar independenţi, ceea ce nu este adevărat, deoarece numărul maxim de vectori liniar independenţi în $\mathbf{R}^n$ este egal cu $n$. Prin urmare, la vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$ se poate adăuga un aşa vector $\overline{e}_{k+1} \in \mathbf{R}^n$, încât sistemul de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k, \overline{e}_{k+1}$ este liniar independent. Dacă $k+1 < n$, atunci, repetând raţionamentul, obţinem că putem adăuga încă un vector $\overline{e}_{k+2} \in \mathbf{R}^n$, astfel încât vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k, \overline{e}_{k+1}, \overline{e}_{k+2}$ sunt liniar independenţi. După un număr finit de paşi, obţinem exact $n$ vectori liniar independenţi $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k, \overline{e}_{k+1}, \ldots, \overline{e}_n$ care, conform teoremei 3.14, formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$. ◁

E x e m p l u l 1. În spaţiul $\mathbf{R}^3$ este dată baza standard:

$$\overline{e}_1 = (1,0,0), \quad \overline{e}_2 = (0,1,0), \quad \overline{e}_3 = (0,0,1).$$

1) Să se arate că vectorii

$$\overline{e}'_1 = \overline{e}_1, \quad \overline{e}'_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{e}'_3 = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$$

de asemenea formează bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

2) Să se reprezinte vectorul arbitrar $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ ca o combinaţie liniară de vectorii fiecărei dintre aceste baze.

1) Într-adevăr, adăugarea la vectorii sistemului $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ a unor vectori ai însuşi sistemului conduce la un sistem echivalent cu cel iniţial (a se vedea teorema 3.9). Prin urmare, sistemul de vectori $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ are acelaşi rang ca şi cel iniţial, adică $r = 3$, sau este liniar independent. Conform teoremei 3.14, sistemul $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ formează bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

2) Scrierea vectorului arbitrar $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ în baza $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ are forma

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3.$$

Fie că scrierea vectorului $\overline{x}$ în baza $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ este $\overline{x} = \alpha_1\overline{e}'_1 + \alpha_2\overline{e}'_2 + \alpha_3\overline{e}'_3$, unde coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trebuie aflaţi. Atunci

$$\overline{x} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\overline{e}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3,$$

de unde, în virtutea scrierii unice a unui vector într-o bază dată, obţinem sistemul de ecuaţii în raport cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x_1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_2, \\ \alpha_3 = x_3. \end{cases}$$

Soluţia lui:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 - x_2, \\ \alpha_2 &= x_2 - x_3, \\ \alpha_3 &= x_3 \end{aligned}$$

reprezintă coeficienţii scrierii vectorului $\overline{x}$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$.

• E x e m p l u l 2. Să se arate că vectorii $\overline{a}_1 = (1, 2, 5)$, $\overline{a}_2 = (3, 4, 7)$, $\overline{a}_3 = (6, 7, 1)$ formează bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$ şi să se scrie reprezentarea vectorului $\overline{b} = (1, 0, 0)$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$.

Cerem respectarea egalităţii $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \alpha_3\overline{a}_3 = \overline{0}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt numere care trebuie aflate. Această egalitate vectorială este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare, pe care îl rezolvăm prin metoda Jordan-Gauss:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & b \\ \hline 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array},$$

de unde rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, adică sistemul $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ este liniar independent. Conform teoremei 3.14, vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

Fie acum că vectorul $\overline{b}$ are scrierea în baza $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$:

$$\overline{b} = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3.$$

Această ecuaţie vectorială este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii, pe care îl rezolvăm de asemenea prin metoda Jordan-Gauss:

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ \hline \end{array},$$

de unde avem $x_1 = -\dfrac{5}{2}$, $x_2 = \dfrac{11}{6}$, $x_3 = -\dfrac{1}{3}$.

Aceste numere şi sunt coeficienţii reprezentării liniare a vectorului $\overline{b}$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. Prin urmare, reprezentarea căutată are forma:

$$\overline{b} = -\frac{5}{2}\overline{a}_1 + \frac{11}{6}\overline{a}_2 - \frac{1}{3}\overline{a}_3.$$

## 3.10. Subspaţii ale spaţiului $\mathbf{R}^n$. Bază a unui subspaţiu. Dimensiune a subspaţiului

**Definiţia 1.** Se numeşte *subspaţiu al spaţiului aritmetic* $\mathbf{R}^n$ o submulţime $L \subset \mathbf{R}^n$ care posedă următoarele proprietăţi:

1° dacă $\overline{x}, \overline{y} \in L$, atunci $\overline{x} + \overline{y} \in L$;

2° dacă $\overline{x} \in L$, $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci $\alpha\overline{x} \in L$.

Această definiţie este echivalentă cu următoarea definiţie.

**Definiţia 2.** Submulţimea $L$ a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ ($L \subset \mathbf{R}^n$) se numeşte *subspaţiu al spaţiului* $\mathbf{R}^n$, sau pe scurt *subspaţiu în* $\mathbf{R}^n$,

dacă ea împreună cu fiecare pereche de elemente $\overline{x}, \overline{y}$ ale sale conţine şi toate combinaţiile liniare ale acestora $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$, adică

$$\overline{x}, \overline{y} \in L \Rightarrow \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in L, \tag{3.1}$$

pentru toate numerele $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. În particular, vectorul $\overline{0}$ totdeauna se conţine în $L$.

▷ Într-adevăr din condiţiile 1°–2° rezultă condiţia (3.1) şi reciproc. ◁

Cel mai mic subspaţiu este subspaţiul numit *subspaţiul nul* 0 ($0 = \{\overline{0}\} \subset \mathbf{R}^n$), care constă numai din vectorul nul $\overline{0}$. Cel mai mare subspaţiu al spaţiului $\mathbf{R}^n$ este însuşi spaţiul $\mathbf{R}^n$. Aceste două subspaţii se numesc *improprii*. Celelalte – *proprii*.

Dacă $\mathbf{R}^n$ este considerat ca mulţime de puncte $n$-dimensionale, atunci definiţia de mai sus se modifică astfel.

Mulţimea $L$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$ se numeşte *subspaţiu al acestui spaţiu* dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1) dacă $M \in L$, $N \in L$ şi $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{ON}$, atunci şi $P \in L$;

2) dacă $M \in L$ şi $\overline{OP} = k \cdot \overline{OM}$, unde $k$ – un număr oarecare, atunci $P \in L$.

Orice subspaţiu al spaţiului de puncte $\mathbf{R}^n$ conţine punctul $O(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemplul 1. Considerăm în $\mathbf{R}^2$ submulţimea $V_1$ de vectori de forma $\overline{x} = (x, 0)$: $V_1 = \{\overline{x} = (x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Această submulţime $V_1$ este subspaţiu în $\mathbf{R}^2$.

Într-adevăr, orice doi vectori $\overline{x}_1 = (x_1, 0)$ şi $\overline{x}_2 = (x_2, 0)$ din $V_1$ posedă proprietatea (3.1):

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V_1 \Rightarrow \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, 0) \in V_1.$$

În aşa fel, $V_1$ este un subspaţiu propriu al spaţiului $\mathbf{R}^2$.

În mod analog, mulţimea $L_1$ de vectori de forma $\overline{y} = (0, y)$, $y \in \mathbf{R}$, este subspaţiu în $\mathbf{R}^2$.

Exemplul 2. Considerăm spaţiul $\mathbf{R}^3$. Vectorii de forma $\overline{x} = (x, 0, 0)$ sau $\overline{y} = (0, y, 0)$, sau $\overline{z} = (0, 0, z)$ formează trei subspaţii liniare distincte în $\mathbf{R}^3$. În mod analog, vectorii de forma $\overline{a} = (0, y, z)$, $\overline{b} = (x, 0, z)$ şi $\overline{c} = (x, y, 0)$ de asemenea formează subspaţii liniare în $\mathbf{R}^3$.

Exemplul 3. Submulţimea tuturor vectorilor-linii $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ cu componenta $x_n = 0$ este subspaţiu în $\mathbf{R}^n$. Se consideră că acest subspaţiu este identic cu $\mathbf{R}^{n-1}$.

Avem succesiunea de aşa-numitele subspaţii incluse canonic

$$0 \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n.$$

**Definiţia 3.** Fie $L$ subspaţiu în $\mathbf{R}^n$. Un sistem liniar independent de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ care aparţin subspaţiului $L$ se numeşte *bază* a subspaţiului $L$ dacă orice vector $\overline{x}$ din $L$ se exprimă liniar prin vectorii acestui sistem.

**Teorema 3.16.** 1) *Orice subspaţiu nenul $L$ al lui $\mathbf{R}^n$ posedă bază;* 2) *toate bazele subspaţiului $L$ constau din unul şi acelaşi număr maxim $r$ ($r \leq n$) de vectori liniar independenţi în $L$.*

▷ Fie $L$ subspaţiu nenul în $\mathbf{R}^n$. După cum ştim deja, în $\mathbf{R}^n$ nu pot fi mai mult decât $n$ vectori liniar independenţi. Deoarece $L$ este o parte a spaţiului $\mathbf{R}^n$, această afirmaţie este adevărată şi pentru $L$. După sens, în $L$ există sistemul care constă din numărul maxim $r$ ($r \leq n$) de vectori liniar independenţi: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$. Repetând raţionamentul aplicat la demonstraţia teoremei 3.14, avem că prin vectorii acestui sistem se exprimă liniar orice vector $\overline{x} \in L$. Prin urmare, sistemul ce constă din numărul maxim de vectori liniar independenţi ai subspaţiului $L$ este o bază pentru $L$.

Pe de altă parte, după cum e uşor de observat, toate bazele subspaţiului $L$ reprezintă sisteme echivalente de vectori. După cum ştim, astfel de sisteme conţin acelaşi număr de vectori. Deoarece sistemul din numărul maxim $r$ de vectori liniar independenţi este bază a subspaţiului $L$, toate bazele lui $L$ constau din unul şi acelaşi număr maxim $r$ ($r \leq n$) de vectori liniar independenţi. ◁

Din teorema 3.16 rezultă că numărul vectorilor bazei este o caracteristică a subspaţiului.

**Definiţia 4.** Numărul de vectori ai unei baze a subspaţiului liniar $L$ se numeşte *dimensiunea* acestui subspaţiu şi se notează dim $L$.

Subspaţiul liniar $L$ se numeşte *$r$-dimensional* dacă o bază a sa constă din $r$ vectori.

Subspaţiul nul, evident, nu are bază. Prin definiţie, dimensiunea spaţiului nul este egală cu numărul zero.

Consecinţă. *În subspaţiul liniar $r$-dimensional $L$ orice sistem liniar independent de vectori conţine cel mult $r$ vectori.*

**Teorema 3.17.** *Orice $r$ vectori liniar independenţi ai subspaţiului $r$-dimensional $L$ formează o bază a sa.*

▷ Fie $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$ un sistem de $r$ vectori liniar independenţi ai subspaţiului $r$-dimensional $L$, iar $\overline{x}$ – un vector arbitrar din $L$. Atunci, în baza consecinţei teoremei 3.16, sistemul $\overline{x}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$, ce constă din $r+1$ vectori ai subspaţiului $r$-dimensional $L$, va fi liniar dependent, adică se vor găsi astfel de numere $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, nu toate egale cu zero, încât este adevărată egalitatea

$$\alpha\overline{x} + \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_r\overline{a}_r = \overline{0}. \tag{3.2}$$

Observăm că numărul $\alpha \neq 0$ (deoarece, în caz contrar, din egalitatea (3.2) ar rezulta dependenţa liniară a vectorilor $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$).

Dar atunci, împărţind egalitatea (3.2) la $\alpha$, obţinem

$$\overline{x} = \alpha_1'\overline{a}_1 + \alpha_2'\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_r'\overline{a}_r, \tag{3.3}$$

unde $\alpha_i' = -\frac{\alpha_i}{\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Fiindcă $\overline{x}$ este vector arbitrar în $L$, egalitatea (3.3) demonstrează că sistemul de vectori liniar independenţi $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$ este bază a subspaţiului $L$. ◁

**Teorema 3.18.** *Mulţimea tuturor vectorilor-linii $(x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, în care ultimele $n-r$ componente sunt egale cu zero, formează un subspaţiu $L$ în $\mathbf{R}^n$, dimensiunea căruia este egală cu $r$.*

▷ Este evident că $L$ este subspaţiu al lui $\mathbf{R}^n$. O bază a acestui subspaţiu $L \subset \mathbf{R}^n$ se formează din următorii $r$ vectori-unitate:

$$\begin{aligned} \overline{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \overline{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ \ldots &\quad \ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}_r &= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Într-adevăr, din egalitatea $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_r\overline{e}_r = \overline{0}$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$, adică sistemul de vectori (3.4) este liniar independent. După cum e uşor de verificat, orice vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ poate fi reprezentat sub forma

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \overline{x}_2\overline{e}_2 + \ldots + x_r\overline{e}_r,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – componentele vectorului $\overline{x}$. În aşa fel, dim $L = r$. $\triangleleft$

Exemplul 4. Ca bază a subspaţiului $V_1 \subset \mathbf{R}^2$ al vectorilor de forma $(x, 0)$, unde $x \in \mathbf{R}$, serveşte sistemul dintr-un singur vector nenul $\overline{e} \in V_1$. De exemplu, bază pentru $V_1$ este $\overline{e} = (1, 0)$ sau $\overline{e}' = (2, 0)$ etc.

Exemplul 5. Ca bază a subspaţiului $V_2 \subset \mathbf{R}^3$ al vectorilor de forma $(x, y, 0)$, unde $x, y \in \mathbf{R}$, serveşte sistemul din doi vectori liniar independenţi $\overline{e}_1, \overline{e}_2 \in V_2$. De exemplu, sistemul de vectori $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$ este bază pentru $V_2$.

## 3.11. Coordonatele vectorului

**Definiţie.** Fiecare bază a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ vectorii căreia se iau într-o anumită ordine (adică un sistem ordonat de aceşti vectori) se numeşte *bază de coordonate*, sau *sistem de coordonate*, în spaţiul $\mathbf{R}^n$.

În aşa fel, dacă

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \tag{3.1}$$

este bază de coordonate în $\mathbf{R}^n$, atunci aceiaşi vectori luaţi în altă ordine formează o altă bază de coordonate în $\mathbf{R}^n$. Această bază o vom nota uneori sub forma $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, sau prescurtat $\{\overline{e}_i\}$.

Am constatat (p. 3.9) că fiecare vector $\overline{x}$ din $\mathbf{R}^n$ se poate exprima (scrie) în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii bazei (3.1):

$$\overline{x} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{e}_n. \tag{3.2}$$

Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, adică coeficienţii acestei scrieri, se numesc *coordonatele vectorului* $\overline{x}$ în baza de coordonate dată (3.1). Faptul că vectorul $\overline{x}$ are coordonatele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, luate în ordinea respectivă, îl vom nota astfel:

$$\overline{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{3.3}$$

Formula (3.3) poate fi considerată ca notarea simbolică a formulei (3.2) în baza de coordonate (3.1). Formulele (3.2) şi (3.3) sunt echivalente. Fiecare dintre ele înseamnă una şi aceeaşi noţiune, şi anume

că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza de coordonate (3.1).

Linia $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ care constă din coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza de coordonate (3.1) a spaţiului $\mathbf{R}^n$ se numeşte *linia de coordonate* a acestui vector $\overline{x}$, iar coloana, sau matricea-coloană, compusă din coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza (3.1):

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

se numeşte *coloana de coordonate* a vectorului $\overline{x}$ în această bază.

Din unicitatea scrierii (3.2) rezultă că doi vectori $\overline{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ şi $\overline{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, daţi prin coordonatele lor în raport cu o bază, sunt egali atunci şi numai atunci când coordonatele lor respective sunt egale:

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**T e o r e m a 3.19.** *Dacă*

$$\overline{x}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \overline{y}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \tag{3.4}$$

*şi* $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$, *iar* $\lambda\overline{x} = \overline{p}$ ($\lambda$ – *un număr real*), *atunci*

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{z}(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \tag{3.5}$$

*şi*

$$\lambda\overline{x} = \overline{p}(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n), \tag{3.6}$$

*adică dacă doi vectori* $\overline{x}$ *si* $\overline{y}$ *din spaţiul aritmetic* $\mathbf{R}^n$ *sunt daţi prin coordonatele lor într-o bază oarecare* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, *atunci la adunarea acestor vectori coordonatele lor corespunzătoare se adună, iar la înmulţirea vectorului arbitrar* $\overline{x}$ *cu un număr* $\lambda$ *toate coordonatele acestui vector se înmulţesc cu numărul* $\lambda$.

▷ Fie că într-o bază oarecare $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$ sunt determinaţi doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ prin coordonatele lor, adică sub forma (3.4). Însă aceste egalităţi sunt echivalente următoarelor:

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n, \ \overline{y} = \beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \ldots + \beta_n\overline{e}_n,$$

care totodată înseamnă că aceşti vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ sunt exprimaţi în mod unic prin vectorii bazei date.

Atunci, pe baza proprietăţilor operaţiilor liniare asupra vectorilor, avem:

$$\overline{x}+\overline{y} = (\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n) + (\beta_1\overline{e}_1 + \beta_2\overline{e}_2 + \ldots + \beta_n\overline{e}_n) =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)\overline{e}_1 + (\alpha_2+\beta_2)\overline{e}_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\overline{e}_n$$

şi

$$\lambda\overline{x} = \lambda(\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n) = (\lambda\alpha_1)\overline{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\overline{e}_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n)\overline{e}_n.$$

Dar ultimele două egalităţi sunt echivalente cu (3.5) şi (3.6), respectiv. Egalitatea (3.5) înseamnă că vectorul-sumă $\overline{x}+\overline{y}$ are coordonatele egale cu sumele coordonatelor respective ale termenilor de adunare $\overline{x}$ şi $\overline{y}$, iar egalitatea (3.6) înseamnă că vectorul $\alpha\overline{x}$ are coordonatele de $\alpha$ ori "mai mari" decât coordonatele respective ale vectorului $\overline{x}$. ◁

Să aplicăm acum teorema 3.19 asupra unei combinaţii liniare $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k$ de vectorii $\overline{x}_1(a_{11},\ldots,a_{n1})$, ..., $\overline{x}_k(a_{1k},\ldots,a_{nk})$ într-o bază oarecare $\{\overline{e}_i\} = \{\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_n\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$, unde $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Fie că vectorul $\overline{x}$ are în baza $\{\overline{e}_i\}$ coordonatele: $\overline{x}(a_1,\ldots,a_n)$. Atunci avem: $\alpha_1\overline{x}_1 = \overline{p}_1(\alpha_1a_{11},\ldots,\alpha_1a_{n1})$, ..., $\alpha_k\overline{x}_k = \overline{p}_k(\alpha_ka_{1k},\ldots,\alpha_ka_{nk})$ şi $\alpha_1\overline{x}_1 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{x}(\alpha_1a_{11} + \ldots + \alpha_ka_{1k},\ldots,\alpha_1a_{n1} + \ldots + \alpha_ka_{nk})$.

Notând, respectiv, prin $X, X_1, \ldots, X_k$ coloanele de coordonate ale vectorilor $\overline{x}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k$:

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\ X_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},\ \ldots,\ X_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

şi considerând aceste coloane ca vectori ai spaţiului $\mathbf{R}^n$, obţinem egalitatea

$$X = \alpha_1X_1 + \ldots + \alpha_kX_k,$$

unde $\alpha_i$ $(i = 1,\ldots,k)$ sunt coeficienţii combinaţiei liniare date.

Ultima egalitate, evident, are loc şi pentru liniile de coordonate ale vectorilor daţi, fiind considerate aceste linii, de asemenea, ca vectori ai spaţiului $\mathbf{R}^n$.

Aşadar, din teorema 3.19 rezultă că *coloana de coordonate a combinaţiei liniare de vectori este egală cu aceeaşi combinaţie liniară (cu aceiaşi coeficienţi) a coloanelor de coordonate corespunzătoare ale acestor vectori şi reciproc.* Aceeaşi afirmaţie este adevărată şi despre liniile de coordonate.

De aici rezultă

**Teorema 3.20.** 1) *Sistemul liniar independent de vectori are sistemul coloanelor (liniilor) de coordonate ale sale, de asemenea, liniar independent şi reciproc;*

2) *fiecare relaţie de dependenţă liniară a unui sistem de vectori are loc şi pentru sistemul de coloane (linii) de coordonate corespunzătoare şi reciproc.*

▷ Demonstraţia este evidentă: egalitatea cu zero a combinaţiei liniare de vectori atrage după sine egalitatea cu zero a aceleiaşi combinaţii liniare (cu aceiaşi coeficienţi) a coloanelor (liniilor) de coordonate ale acestor vectori. La fel se demonstrează şi afirmaţia reciprocă. ◁

## 3.12. Transformarea coordonatelor la schimbarea bazei

Fie în spaţiul $\mathbf{R}^n$ (sau în sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$) două baze:

$$\{\overline{e}_i\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\} \tag{3.1}$$

şi

$$\{\overline{e}'_i\} = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n\}. \tag{3.2}$$

Apare întrebarea, cum se vor transforma coordonatele unui vector dacă vom trece de la o bază la alta? Pentru a răspunde la această întrebare, procedăm în modul următor.

Fie că scrierile vectorilor sistemului (3.2) în baza (3.1) sunt:

$$\begin{aligned}
\overline{e}'_1 &= \tau_{11}\overline{e}_1 + \tau_{21}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{n1}\overline{e}_n, \\
\overline{e}'_2 &= \tau_{12}\overline{e}_1 + \tau_{22}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{n2}\overline{e}_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\overline{e}'_n &= \tau_{1n}\overline{e}_1 + \tau_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{nn}\overline{e}_n.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Din coordonatele $\tau_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale vectorilor $\overline{e}'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în baza $\{\overline{e}_i\}$ compunem matricea pătratică $T$ care are

drept coloane ale sale întocmai coloanele de coordonate ale vectorilor $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$:

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Definiţie.** Se numeşte *matricea de trecere* de la baza $\{\overline{e}_i\}$ la baza $\{\overline{e}'_i\}$ matricea $T$ a cărei coloană $j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) este coloana de coordonate a vectorului $\overline{e}'_j$ în baza $\{\overline{e}_i\}$.

Exemplul 1. De aflat matricea de trecere de la baza $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ la baza $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ a spaţiului $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} \overline{e}'_1 &= 2\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \\ \overline{e}'_2 &= \overline{e}_1 + 5\overline{e}_2 - \overline{e}_3, \\ \overline{e}'_3 &= \overline{e}_2 + \overline{e}_3. \end{aligned}$$

Matricea de trecere $T$ de la baza $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ la baza $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3$ are forma

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să deducem formulele cu ajutorul cărora se transformă coordonatele unui vector arbitrar din spaţiul $\mathbf{R}^n$ la trecerea de la baza $\{\overline{e}_i\}$ la altă bază (nouă) $\{\overline{e}'_i\}$.

Fie $\overline{x}$ un vector arbitrar din spaţiul $\mathbf{R}^n$ şi $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$ – liniile de coordonate ale acestuia în bazele $\{\overline{e}_i\}$ şi $\{\overline{e}'_i\}$, respectiv. Prin urmare,

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n \tag{3.4}$$

şi

$$\overline{x} = \alpha'_1\overline{e}'_1 + \alpha'_2\overline{e}'_2 + \ldots + \alpha'_n\overline{e}'_n. \tag{3.5}$$

Punând în (3.5) în locul vectorilor $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$ expresiile lor prin $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ din (3.3), obţinem:

$$\begin{aligned} \overline{x} = {} & (\alpha'_1\tau_{11} + \alpha'_2\tau_{12} + \ldots + \alpha'_n\tau_{1n})\overline{e}_1 + \\ & + (\alpha'_1\tau_{21} + \alpha'_2\tau_{22} + \ldots + \alpha'_n\tau_{2n})\overline{e}_2 + \ldots + \\ & + (\alpha'_1\tau_{n1} + \alpha'_2\tau_{n2} + \ldots + \alpha'_n\tau_{nn})\overline{e}_n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Atunci, în virtutea unicităţii scrierii unui vector în baza $\{\overline{e}_i\}$, din (3.4) şi (3.6) rezultă

$$\begin{cases} \alpha_1 = \tau_{11}\alpha'_1 + \tau_{12}\alpha'_2 + \ldots + \tau_{1n}\alpha'_n, \\ \alpha_2 = \tau_{21}\alpha'_1 + \tau_{22}\alpha'_2 + \ldots + \tau_{2n}\alpha'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = \tau_{n1}\alpha'_1 + \tau_{n2}\alpha'_2 + \ldots + \tau_{nn}\alpha'_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aceste formule şi sunt *formulele căutate de transformare a coordonatelor vectorului arbitrar $\overline{x}$ la trecerea de la baza $\{\overline{e}_i\}$ la baza nouă $\{\overline{e}'_i\}$*. Conform formulelor (3.7), *coordonatele $x_i$ ale vectorului $\overline{x}$ în prima bază $\{\overline{e}_i\}$ se exprimă prin coordonatele aceluiaşi vector $\overline{x}$ în a doua bază $\{\overline{e}'_i\}$ cu ajutorul matricei de trecere $T$*.

R e m a r c ă. Formulele (3.7) pot fi scrise compact sub formă matriceală:

$$X = T\,X', \tag{3.8}$$

unde $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}$ – coloanele de coordonate ale vectorului $\overline{x}$ în bazele $\{\overline{e}_i\}$ şi $\{\overline{e}'_i\}$, respectiv, $T$ – matricea de trecere de la baza $\{\overline{e}_i\}$ la baza $\{\overline{e}'_i\}$ (a se vedea înmulţirea matricelor în p. 4.3, cap. 4).

E x e m p l u l 2. Sunt daţi patru vectori prin coordonatele lor într-o bază oarecare $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$:

$$\overline{a}_1(2,3,1),\ \overline{a}_2(5,4,0),\ \overline{a}_3(0,2,1) \text{ şi } \overline{b}(3,6,0).$$

Să se arate că vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$, să se afle coordonatele vectorului $\overline{b}$ în această bază şi să se scrie vectorul $\overline{b}$ în baza $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$.

Să arătăm mai întâi că vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ sunt liniar independenţi. Pentru aceasta cerem respectarea egalităţii

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \lambda_3\overline{a}_3 = \overline{0},$$

unde numerele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trebuie aflate.

Această egalitate vectorială este echivalentă cu sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvându-l, stabilim că acest sistem are unica soluţie nulă: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Prin urmare, vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ sunt liniar independenţi. Conform teoremei 3.14, vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

Fie că vectorul $\overline{b}$ în baza $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ are coordonatele $\overline{b}(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$. Aplicând formula (3.8) de transformare a coordonatelor vectorului la trecerea la baza nouă, avem

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{bmatrix}, \text{ unde } T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– matricea de trecere de la baza $\{\overline{e}_i\}$ la baza $\{\overline{a}_i\}$. Această egalitate matriceală este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha'_1 + 5\alpha'_2 = 3, \\ 3\alpha'_1 + 4\alpha'_2 + 2\alpha'_3 = 6, \\ \alpha'_1 + \alpha'_3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, aflăm $\alpha'_1 = -6$, $\alpha'_2 = 3$, $\alpha'_3 = 6$. Prin urmare, vectorul $\overline{b}$ în baza $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$ are coordonatele $\overline{b}(-6, 3, 6)$ şi scrierea lui $\overline{b}$ în baza $\{\overline{a}_i\}$ are forma

$$\overline{b} = -6\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 + 6\overline{a}_3.$$

## 3.13. Sisteme ortogonale de vectori. Procesul de ortogonalizare

### 3.13.1. Sistem ortogonal şi ortonormat de vectori

**Definiţia 1.** Doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ se numesc *ortogonali* dacă produsul scalar al lor este egal cu zero:

$$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Evident, vectorul nul este ortogonal la oricare vector.

Pentru vectori-segmente ortogonalitatea înseamnă perpendicularitatea lor.

Din această definiţie rezultă că

$$\overline{x} \perp \overline{y} \quad (\overline{x} \neq \overline{0}, \overline{y} \neq \overline{0}) \Leftrightarrow \cos\varphi = 0, \text{ unde } \quad \varphi = (\widehat{\overline{x}, \overline{y}})$$

(cu $(\widehat{\overline{x}, \overline{y}})$ este notat unghiul dintre vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{y}$).

**Definiţia 2.** Sistemul de vectori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ se numeşte *ortogonal* dacă oricare doi vectori ai săi sunt ortogonali:

$$(\overline{a}_i, \overline{a}_k) = 0 \quad \text{pentru} \quad i \neq k.$$

Dacă sistemul conţine numai un singur vector, atunci el este numit de asemenea ortogonal.

E x e m p l u. Sistemul de vectori $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ este ortogonal.

Într-adevăr, este evident că orice doi vectori ai acestui sistem sunt ortogonali.

**T e o r e m a 3.21.** *Sistemul ortogonal de vectori nenuli este liniar independent.*

▷ Fie $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ un sistem ortogonal de vectori nenuli. Admitem că acest sistem este liniar dependent, adică există astfel de numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toate egale cu zero, încât

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}.$$

Presupunem că $\alpha_i \neq 0$. Atunci avem: $(\overline{a}_i, \overline{0}) = 0$ sau $(\overline{a}_i, \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{a}_n) = 0$, sau

$$\alpha_1(\overline{a}_i, \overline{a}_1) + +\alpha_2(\overline{a}_i, \overline{a}_2) + \ldots + \alpha_n(\overline{a}_i, \overline{a}_n) = 0.$$

Deoarece $(\overline{a}_i, \overline{a}_k) = 0$ pentru $i \neq k$, avem $\alpha_i(\overline{a}_i, \overline{a}_i) = 0$, de unde rezultă $\overline{a}_i = \overline{0}$, ceea ce contrazice condiţia teoremei. Contrazicerea obţinută şi demonstrează teorema. ◁

Vectorul $\overline{e}$ se numeşte *normat*, sau *unitar*, dacă $|\overline{e}| = 1$.

Dacă $\overline{a}$ – vector nenul, atunci fiecare dintre vectorii

$$\overline{a}_1^\circ = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}, \quad \overline{a}_2^\circ = -\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \tag{3.1}$$

este normat.

Aflarea pentru vectorul $\overline{a}$ a vectorului normat, aplicând formulele (3.1), se numeşte *normarea* vectorului $\overline{a}$, iar factorul $\mu = \pm\dfrac{1}{|\overline{a}|}$ – factorul de normare.

**Definiţia 3.** Sistemul de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ se numeşte *ortonormat* dacă el este ortogonal şi fiecare vector al său este normat:

$$(\overline{e}_i, \overline{e}_k) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \neq k, \\ 1, & \text{pentru } i = k, \end{cases} \tag{3.2}$$

unde $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

### 3.13.2. Procesul de ortogonalizare a unui sistem de vectori

Vom descrie un procedeu care permite dintr-un sistem liniar independent de vectori

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m \tag{3.3}$$

din spaţiul $\mathbf{R}^n$ să se construiască un sistem de $m$ vectori ortogonali $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$.

Fie sistemul de vectori liniar independenţi (3.3).

Considerăm $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$. Vom căuta vectorul $\overline{b}_2$ sub forma

$$\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \lambda_1^{(2)}\overline{b}_1.$$

Întrucât $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$, iar vectorii $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$ sunt liniar independenţi, vectorul $\overline{b}_2$ este nenul pentru orice număr $\lambda_1^{(2)}$. Alegem acest număr din condiţia ca vectorul $\overline{b}_2$ să fie ortogonal la vectorul $\overline{b}_1$:

$\overline{b}_1 \perp \overline{b}_2 \Leftrightarrow 0 = (\overline{b}_1, \overline{b}_2) = (\overline{b}_1, \overline{a}_2 + \lambda_1^{(2)}\overline{b}_1) = (\overline{b}_1, \overline{a}_2) + \lambda_1^{(2)}(\overline{b}_1, \overline{b}_1)$, de unde rezultă

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(\overline{b}_1, \overline{a}_2)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)}.$$

În felul acesta, am construit perechea de vectori ortogonali $\overline{b}_1, \overline{b}_2$, unde $\overline{b}_1$ se exprimă liniar prin $\overline{a}_1$, iar $\overline{b}_2$ este combinaţie liniară de vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2$.

Fie în continuare construit sistemul de $k-1$ vectori nenuli ortogonali: $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{k-1}$; suplimentar, presupunem că pentru fiecare $i$, $1 \leq i \leq k-1$, vectorul $\overline{b}_i$ este combinaţie liniară de vectorii

$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_i$. Această presupunere se va respecta şi pentru vectorul $\overline{b}_k$, dacă el va fi ales sub forma

$$\overline{b}_k = \overline{a}_k + \lambda_1^{(k)}\overline{b}_1 + \lambda_2^{(k)}\overline{b}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)}\overline{b}_{k-1}. \tag{3.4}$$

Vectorul $\overline{b}_k$ este nenul, deoarece sistemul (3.3) este liniar independent, iar vectorul $\overline{a}_k$ nu intră în înscrierea vectorilor $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{k-1}$. Coeficienţii $\lambda_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, îi alegem din condiţia ca vectorul $\overline{b}_k$ să fie ortogonal la toţi vectorii precedenţi $\overline{b}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$: $\overline{b}_i \perp \overline{b}_k \Leftrightarrow 0 = (\overline{b}_i, \overline{b}_k) = (\overline{b}_i, \overline{a}_k + \lambda_1^{(k)}\overline{b}_1 + \lambda_2^{(k)}\overline{b}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)}\overline{b}_{k-1}) = (\overline{b}_i, \overline{a}_k) + \lambda_1^{(k)}(\overline{b}_i, \overline{b}_1) + \lambda_2^{(k)}(\overline{b}_i, \overline{b}_2) + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)}(\overline{b}_i, \overline{b}_{k-1})$; de aici, deoarece vectorii $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{k-1}$ sunt ortogonali între ei, rezultă $(\overline{b}_i, \overline{a}_k) + \lambda_i^{(k)}(\overline{b}_i, \overline{b}_i) = 0$, adică

$$\lambda_i^{(k)} = -\frac{(\overline{b}_i, \overline{a}_k)}{(\overline{b}_i, \overline{b}_i)}, \tag{3.5}$$

$i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Algoritmul expus mai sus se numeşte *procesul de ortogonalizare*.

Procesul de ortogonalizare a unui sistem liniar independent de vectori (3.3) poate fi efectuat după următorii paşi:

1) punem $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$, adică primul vector al sistemului (3.3) îl includem în sistemul ortogonal ce se construieşte;

2) dacă deja este construit sistemul de vectori nenuli $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{k-1}$, atunci următorul vector $\overline{b}_k$ ortogonal la toţi vectorii precedenţi $\overline{b}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) se construieşte aplicând formula (3.4), unde coeficienţii $\lambda_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) se calculează conform formulei (3.5);

3) procesul de ortogonalizare continuă până atunci când vom obţine $m$ vectori ortogonali $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$. Dacă sistemul (3.3) conţine numai un singur vector $\overline{a}_1$, atunci îl considerăm ortogonal. Rămâne numai să normăm aceşti vectori $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_m$.

E x e m p l u. Considerăm sistemul de vectori liniar independenţi: $\overline{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\overline{a}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\overline{a}_3 = (1, 0, 0, 1)$.
Să se construiască sistemul ortonormat de vectori cu ajutorul procesului de ortogonalizare a acestui sistem de vectori.

Folosind formulele (3.4), (3.5), în cazul nostru obţinem:

$$\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = (-1, 1, 0, 0);$$

$$k = 2, \quad \overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \lambda_1^{(2)}\overline{b}_1, \quad \lambda_1^{(2)} = -\frac{(\overline{b}_1, \overline{a}_2)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{b}_2 = \overline{a}_2 + \frac{1}{2}\overline{b}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0);$$

$$k = 3, \quad \overline{b}_3 = \overline{a}_3 + \lambda_1^{(3)}\overline{b}_1 + \lambda_2^{(3)}\overline{b}_2,$$

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\overline{b}_1, \overline{a}_3)}{(\overline{b}_1, \overline{b}_1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(\overline{b}_2, \overline{a}_3)}{(\overline{b}_2, \overline{b}_2)} = -\frac{1}{3},$$

$$\overline{b}_3 = \overline{a}_3 + \frac{1}{2}\overline{b}_1 - \frac{1}{3}\overline{b}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1).$$

În felul acesta, am găsit sistemul ortogonal de vectori $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$. Normând aceşti vectori, obţinem sistemul ortonormat de vectori:

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{b}_1}{|\overline{b}_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$\overline{e}_2 = \frac{\overline{b}_2}{|\overline{b}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right),$$

$$\overline{e}_3 = \frac{\overline{b}_3}{|\overline{b}_3|} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Menţionăm că dacă numărul vectorilor sistemului ortogonal de vectori nenuli este egal cu $n$, unde $n$ – dimensiunea spaţiului $\mathbf{R}^n$, atunci, în virtutea teoremelor 3.21 şi 3.14, aceşti vectori formează o bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$, numită *bază ortogonală*. Dacă însă normele vectorilor bazei ortogonale sunt egale cu 1, atunci baza se numeşte *bază ortonormată*. Deci, în conformitate cu (3.2), baza din vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ se

numeşte *ortonormată* dacă

$$(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{3.6}$$

unde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

E justă afirmaţia.

*În spaţiul aritmetic n-dimensional* $\mathbf{R}^n$ *există bază ortonormată.*

▷ Într-adevăr, spaţiul $\mathbf{R}^n$ posedă baza canonică (standard), formată din vectorii-unitate: $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Această bază este ortonormată în $\mathbf{R}^n$, ceea ce este evident din formula (3.6). ◁

Să clarificăm sensul coordonatelor unui vector arbitrar $\overline{x}$ în baza ortonormată.

**Teorema 3.22.** *Coordonatele unui vector într-o bază ortonormată sunt egale cu produsul scalar dintre acest vector şi vectorii corespunzători ai bazei, adică dacă* $\overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *în baza ortonormată* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, *atunci*

$$x_i = (\overline{x}, \overline{e}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.7}$$

▷ Fie $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază ortonormată şi $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n$ – un vector arbitrar din spaţiului $\mathbf{R}^n$. Înmulţim ambii membri ai acestei egalităţi scalar cu vectorul $\overline{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$(\overline{x}, \overline{e}_i) = x_1(\overline{e}_1, \overline{e}_i) + x_2(\overline{e}_2, \overline{e}_i) + \ldots + x_n(\overline{e}_n, \overline{e}_i).$$

De aici, în virtutea formulei (3.6), obţinem $x_i = (\overline{x}, \overline{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ◁

Întrucât $|\overline{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ca şi în $\mathbf{R}^3$, produsul scalar $(\overline{x}, \overline{e}_i) = x_i$ e firesc să fie numit *proiecţia vectorului* $\overline{x}$ *pe vectorul* $\overline{e}_i$.

În aşa fel, conform formulei (3.7), coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza ortonormată sunt egale cu proiecţiile lui pe vectorii corespunzători ai bazei.

Aşadar, formula

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}, \overline{e}_i)\overline{e}_i$$

reprezintă scrierea vectorului arbitrar $\overline{x}$ în baza ortonormată $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$.

## Exerciţii

1. Fie $\overline{a} \in \mathbf{R}^n$. Să se arate că $\underbrace{\overline{a} + \overline{a} + \ldots + \overline{a}}_{n \text{ termeni}} = n\overline{a}$.

2. Să se verifice proprietăţile de bază 1°–8° din 3.2 ale operaţiilor liniare asupra vectorilor spaţiului $\mathbf{R}^3$.

3. Să se verifice proprietăţile 1)–10) din 3.2 ale operaţiilor liniare asupra vectorilor spaţiului $\mathbf{R}^4$.

4. Să se afle unghiul dintre vectorii 4-dimensionali $\overline{a} = (2, -2, 1, 0)$ şi $\overline{b} = (5, 2, 4, -2)$.

5. Să se constate dacă sistemul de vectori $\overline{a}_1 = (2, 0, 1, 4)$, $\overline{a}_2 = (-1, 3, 0, 5)$, $\overline{a}_3 = (-3, 1, -1, 2)$, $\overline{a}_4 = (-1, -7, 2, 0)$ este liniar dependent sau liniar independent.

6. Se dau vectorii $\overline{a}_1 = (0, 1, 1)$, $\overline{a}_2 = (1, 0, 1)$, $\overline{a}_3 = (1, 1, 0)$ şi $\overline{b} = (5, -3, 2)$. Să se arate că vectorii $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ formează bază a spaţiului $\mathbf{R}^3$ şi să se afle coordonatele vectorului $\overline{b}$ în această bază.

7. În spaţiul $\mathbf{R}^3$ considerăm vectorii $\overline{a}_1 = (\lambda, 1, 1)$, $\overline{a}_2 = (1, \lambda, 0)$, $\overline{a}_3 = (-1, -1, \lambda)$, unde $\lambda$ este parametru real ($\lambda \in \mathbf{R}$).

   1) Să se arate că sistemul de vectori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ este liniar dependent dacă şi numai dacă $\lambda = 1$.

   2) Să se arate că dacă $\lambda \neq 1$, atunci sistemul $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ este o bază a lui $\mathbf{R}^3$ şi să se găsească coordonatele vectorului $\overline{b} = (1, 1, 0)$ în această bază.

8. Să se arate că mulţimea tuturor soluţiilor sistemului de $m$ ecuaţii liniare omogene cu $n$ necunoscute formează subspaţiu al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$.

9. Să se construiască sistemul ortonormat de vectori, aplicând procesul de ortogonalizare asupra sistemului liniar independent: $\overline{a}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\overline{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\overline{a}_3 = (1, 1, 0, 1)$.

CAPITOLUL 4

# Matrice

## 4.1. Noţiunea de matrice

De noţiunea de matrice am luat deja cunoştinţă la studiul şi rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare algebrice. Era vorba de matricea sistemului şi de matricea extinsă a sistemului. Fiecare dintre aceste matrice reprezintă nu altceva decât un sistem de numere, aranjat sub formă de tablou dreptunghiular. Menţionăm, de asemenea, că cu un anumit sistem ordonat de numere se poate, în mod simplu şi compact, de descris dependenţele care au loc în domeniul producţiei materiale. Astfel, de exemplu, dacă la o întreprindere se produc trei feluri de produse $1, 2, 3$ şi pentru producerea lor se folosesc materialele $1, 2$, atunci sistemul normelor de producţie materială, care reprezintă baza planului de aprovizionare, poate fi reprezentat sub formă de tablou (matricea cu coeficienţi tehnologici):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \end{matrix}$$

unde $a_{ij}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$ este norma de consum al $i$-lea material la producerea celui de al $j$-lea produs. Astfel, norma de consum al materialului 1 la o unitate de produse $1, 2, 3$, respectiv, este egală cu $a_{11}, a_{12}, a_{13}$; norma de consum al materialului 2 la o unitate de produse, respectiv, constituie $a_{21}, a_{22}, a_{23}$.

Matricele au o aplicare largă în cercetările economice, deoarece ele facilitează în mod considerabil studierea dependenţelor dintre diferiţi indici economici.

**Definiţie.** Se numeşte *matrice de tipul (forma)* $m \times n$, sau simplu *matrice*, un tablou dreptunghiular compus din $m \cdot n$ numere, aşezate în $m$ linii (sau rânduri) şi $n$ coloane. Vom prezenta matricea de tipul $m \times n$ sub forma generală astfel:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

De multe ori matricea (4.1) se notează prescurtat prin simbolul $[a_{ij}]$, sau $(a_{ij})$, sau printr-o literă mare a alfabetului latin, de exemplu $A$, sau $A = (a_{ij})$. În acele cazuri când este important de arătat tipul $m \times n$ al matricei $A$, o notăm de asemenea cu simbolul $A_{m \times n}$. Numerele $a_{ij}$ din care constă matricea $A$ se numesc *elementele* matricei[1]. Elementele matricei $A$ uneori se notează cu simbolul $A_{ij}$ sau $(A)_{ij}$. Fiecare dintre elementele matricei se notează cu doi indici: primul înseamnă numărul liniei, al doilea – numărul coloanei în care se află elementul dat. De exemplu, $a_{23}$ înseamnă numărul (elementul) din linia a doua şi coloana a treia a acestei matrice. Dacă numărul liniilor matricei este egal cu numărul coloanelor ei, adică $m = n$, atunci matricea se numeşte *pătratică*; tipul ei este $n \times n$. Numărul $n$ de linii (coloane) se numeşte *ordinul* matricei pătratice şi se spune că matricea e *pătratică de ordinul* $n$. În cazul general matricea se numeşte *dreptunghiulară*. Matricea pătratică $A$ de ordinul $n$ câteodată se notează prin simbolul $A_n$, în loc de $A_{n \times n}$.

Într-o matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

pătratică de ordinul $n$, elementele $a_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ formează vectorul $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ care se numeşte *diagonala principală* a matricei $A$. Cealaltă diagonală, considerată ca vectorul $(a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1})$, se numeşte *diagonala secundară* a matricei.

Matricea care constă dintr-un singur element $a$, adică $1 \times 1$ – matricea

$$A = (a),$$

[1] Ca elemente ale matricei pot fi şi alte obiecte.

se identifică cu însuşi acest element şi convenţional se notează astfel:

$$(a) = a.$$

Matricea de tipul $m \times 1$, adică de forma

$$B = B_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

constă dintr-o singură coloană şi se numeşte *matrice-coloană* (*vector-coloană*), sau simplu *coloană*, iar numărul elementelor ei – *înălţimea* coloanei. Această matrice reprezintă vectorul-coloană $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^m$. Noţiunile de matrice-coloană şi de vector-coloană sunt identice:

$$B = B_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricea care constă dintr-o singură linie, adică matricea

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = A_{1\times n},$$

se numeşte *matrice-linie* (*vector-linie*), sau simplu *linie*, iar numărul elementelor ei – *lungimea* liniei. Matricea $A$ de tipul $1 \times n$ reprezintă vectorul-linie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$:

$$A = A_{1\times n} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

E x e m p l u l 1. Tabelul oficial al câştigului tragerii la sorţi reprezintă o matrice dreptunghiulară din $m$ linii şi trei coloane. Elementele primei coloane arată numărul seriilor, elementele celei de a doua – numărul biletelor, elementele coloanei a treia – mărimea câştigului în lei.

E x e m p l u l 2. Matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

este o matrice pătratică de ordinul trei. Diagonala ei principală o formează elementele: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 3$.

Matricea toate elementele careia sunt egale cu zero se numeşte *matrice nulă* şi se notează cu 0 sau $0_n$, sau $0_{m\times n}$, dacă apare necesitatea să arătăm tipul ei.

De exemplu,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_2, \qquad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 3}.$$

Să evidenţiem unele tipuri de matrice pătratice.

Matricea de forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

la care toate elementele din afara diagonalei principale sunt egale cu zero, se numeşte *matrice diagonală.*

Deci într-o matrice diagonală singurele elemente care pot fi nenule sunt elementele $a_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dacă în matricea diagonală $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, atunci ea se numeşte *matrice scalară.*

Matricea scalară la care toate elementele diagonalei principale sunt egale cu 1 se numeşte *matrice unitate.* Matricea unitate, de obicei, se notează cu litera $E$, sau $E_n$, când este necesar de arătat ordinul matricei. În aşa fel,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E_n.$$

De exemplu, matricea

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este matricea unitate de ordinul trei.

În cele ce urmează, vom considera că elementele matricelor sunt sau numere reale, sau numere complexe.

## 4.2. Operaţii liniare cu matrice

### 4.2.1. Egalitatea matricelor

Operaţiile de bază asupra matricelor sunt adunarea, scăderea, înmulţirea matricei cu un număr şi înmulţirea matricei cu matrice. La

baza studierii operaţiilor cu matrice este pusă noţiunea de egalitate a matricelor.

**Definiţie.** Două matrice $A$ şi $B$ se numesc *egale* dacă ele sunt de aceeaşi formă şi dacă sunt egale toate elementele lor situate pe locurile corespunzătoare (adică elementele din aceeaşi linie $i$ şi aceeaşi coloană $j$) ale acestor matrice. Astfel, o egalitate matriceală $A = B$ între $m \times n$ - matricele $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ este echivalentă cu $mn$ egalităţi scalare:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Exemplu. Dacă

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

atunci

$$\begin{aligned} a_{11} = b_{11}, \quad a_{12} = b_{12}, \quad a_{13} = b_{13}, \\ a_{21} = b_{21}, \quad a_{22} = b_{22}, \quad a_{23} = b_{23}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Egalitatea matriceală (4.1) şi sistemul de egalităţi scalare (4.2) sunt echivalente. Vom nota acest fapt prin simbolul (4.1) $\Leftrightarrow$ (4.2).

### 4.2.2. Adunarea şi scăderea matricelor

**Definiţia 1.** Se numeşte *suma* a două matrice $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ de acelaşi tip $m \times n$ matricea $C = (c_{ij})$ elementele căreia $c_{ij}$ sunt egale cu sumele elementelor corespunzătoare ale matricelor $A$ şi $B$:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Suma matricelor $A$ şi $B$ se notează cu simbolul $A + B$. Operaţia prin care oricăror două matrice $A$ şi $B$ de unul şi acelaşi tip $m \times n$ li se asociază suma lor se numeşte *adunarea matricelor.*

Exemplul 1. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

atunci suma acestor matrice este matricea

$$A + B = \begin{bmatrix} 0-3 & 1+4 & 2+1 \\ -1+0 & 2+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se pot aduna numai matrice de acelaşi tip, rezultatul fiind o matrice tot de acest tip.

Din definiţia sumei matricelor rezultă că adunarea matricelor posedă următoarele proprietăţi:

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

adică adunarea matricelor este comutativă şi asociativă şi

$$A + 0 = 0 + A = A,$$

adică, dacă la o matrice arbitrară $A$ se adaugă matricea nulă, atunci suma matricelor este aceeaşi matrice $A$.

**Definiţia 2.** Se numeşte *diferenţa* a două matrice $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ de aceeaşi formă $m \times n$ matricea $C = (c_{ij})$ cu elementele $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, unde $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Diferenţa matricelor $A$ şi $B$ se notează prin $A - B$. Operaţia prin care oricăror două matrice $A$ şi $B$ de forma $m \times n$ li se asociază diferenţa lor se numeşte *scădere*.

Exemplul 2. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

atunci

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-1 & 3-0 & 0-2 \\ 5-4 & 2-1 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se pot scădea numai matrice de aceeaşi formă, rezultatul fiind o matrice tot de această formă.

### 4.2.3. Înmulţirea unei matrice cu un scalar

**Definiţie.** Se numeşte *produsul dintre un scalar* $\alpha$ (sau *număr* $\alpha$) *şi o matrice* $A = (a_{ij})$ (sau *produsul matricei* $A$ *prin numărul* $\alpha$) matricea $B = (b_{ij})$ care se obţine din matricea $A$ prin înmulţirea tuturor elementelor ei cu numărul $\alpha$, adică

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Produsul matricei $A$ prin numărul $\alpha$ se notează $\alpha A$ sau $A\alpha$. Dimensiunile matricelor $A$ şi $\alpha A$ sunt aceleaşi. În particular, dacă

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad \text{atunci} \quad \alpha A = A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{bmatrix}.$$

Operaţia prin care oricărui număr $\alpha$ şi oricărei matrice $A$ de tipul $m \times n$ li se asociază produsul $\alpha A$ se numeşte *înmulţirea matricelor cu scalari.*

Exemplu.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -5 & 15 & -10 \end{bmatrix}.$$

Operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a matricei cu un număr se numesc *operaţii liniare* cu matrice.

Din definiţia operaţiei înmulţirii matricei cu un număr rezultă următoarele proprietăţi ale acestei operaţii:

$$1 \cdot A = A,$$

$$0 \cdot A = 0,$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

unde $\alpha$ şi $\beta$ – numere reale arbitrare.

Din proprietăţile întâi şi a patra rezultă că

$$A + A = 2A, \; A + A + A = 3A, \ldots$$

Matricea $(-1)A$ de obicei se notează $-A$ şi se numeşte *matricea opusă* matricei $A$. Prin urmare, prin definiţie,

$$(-1)A = -A.$$

De exemplu, dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, atunci $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$. De aici rezultă că $A + (-A) = 0$, $(-\alpha)A = -\alpha A$, $-(-A) = A$, iar pentru diferenţa matricelor este adevărată formula

$$A - B = A + (-B)$$

şi de asemenea

$$-(A + B) = -A - B.$$

## 4.3. Înmulţirea matricelor

### 4.3.1. Regula de înmulţire a matricelor

Să demonstrăm mai întâi procesul înmulţirii a două matrice printr-un exemplu.

E x e m p l u l 1. Fie că trebuie înmulţită matricea

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{cu matricea} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pentru a afla produsul acestor matrice, înmulţim elementele liniei $i$ a primei matrice cu elementele corespunzătoare ale coloanei $j$ a matricei a doua (pe scurt se spune că "se înmulţeşte linie cu coloană") şi aceste produse binare le adunăm. Ca rezultat obţinem elementul matricei-produs, care este situat la intersecţia liniei $i$ şi coloanei $j$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$.

Avem

$$7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 38,\ 7 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 65,$$

$$6 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 41,\ 6 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 55$$

şi deci

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 65 \\ 41 & 55 \end{bmatrix}.$$

Menţionăm că două matrice $A$ şi $B$ pot fi înmulţite numai şi numai în acel caz când lungimea liniei primei matrice $A$ este egală cu înălţimea coloanei matricei a doua $B$, adică dacă numărul coloanelor primei matrice $A$ este egal cu numărul liniilor matricei a doua $B$, după următoarea regulă:

**Definiţie.** Se numeşte *produsul* dintre o matrice $A = (a_{ik})$ de tipul $m \times r$ şi o matrice $B = (b_{kj})$ de tipul $r \times n$ (în această ordine) matricea $C = (c_{ij})$ de tipul $m \times n$, elementele căreia $c_{ij}$ se calculează prin formula

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj},$$

sau prescurtat

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \tag{4.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Aceasta se scrie $C = AB$. Operaţia prin care oricărei matrice $A$ de tipul $m \times r$ şi oricărei matrice $B$ de tipul $r \times n$ (în această ordine) li se asociază produsul lor $C = AB$ se numeşte *înmulţirea matricelor.*

Din definiţie rezultă că elementul $c_{ij}$ al matricei $AB$, care este situat în linia $i$ şi coloana $j$, este egal cu suma produselor elementelor liniei $i$ a matricei $A$ cu elementele corespunzătoare ale coloanei $j$ a matricei $B$. De aceea, regula înmulţirii matricelor deseori este numită regula înmulţirii "liniei cu coloană". Acestei reguli îi corespunde următoarea schemă de înmulţire a matricelor:

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ & & \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{rj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$A \qquad\qquad B \qquad\qquad AB,$$

unde $c_{ij}$ se determină prin formula (4.1).

Matricea $C = AB$ are atâtea linii câte le are primul factor de înmulţire $A$ şi atâtea coloane câte le are al doilea factor $B$.

Exemplul 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix}.$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2a + 3b + 4c & 2x + 3y + 4z \\ 1 \cdot a + 5b + 6c & 1 \cdot x + 5y + 6z \\ 3a + 7b + 1 \cdot c & 3x + 7y + 1 \cdot z \end{bmatrix}.$$

Observăm că dacă matricea $A$ poate fi înmulţită cu matricea $B$, atunci din aceasta nu rezultă că $B$ poate fi înmulţită cu $A$.

*Produsul matricelor pătratice de același ordin, evident, este o matrice pătratică tot de acest ordin.*

Exemplul 3.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Produsul unei matrice pătratice cu o matrice-coloană, adică cu un vector-coloană, este o matrice-coloană.

Produsul unei matrice-coloane cu o matrice-linie este o matrice dreptunghiulară sau pătratică, iar produsul unei matrice-linii cu o matrice-coloană este un scalar, adică o matrice de tipul $1 \times 1$.

Exemplul 4.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x + 7y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (8) = 8.$$

### 4.3.2. Proprietățile operației de înmulțire a matricelor

a) Contrar înmulțirii numerelor și înmulțirii matricei cu un număr, produsul a două matrice $A$ și $B$, în general, nu este comutativ, adică $AB \neq BA$, deoarece $AB$ și $BA$ nu totdeauna sunt egale; se poate întâmpla des și cazul în care unul dintre aceste produse nu există, pe când celălalt este determinat.

Exemplul 1.

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, $AB \neq BA$.

2) Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

atunci

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 14 \\ 5 & 7 & 23 \end{bmatrix},$$

pe când produsul $BA$ nu este determinat, fiindcă lungimea liniei primei matrice nu este egală cu înălţimea coloanei matricei a doua.

Însă, în anumite cazuri, egalitatea $AB = BA$ poate să se îndeplinească. Atunci se spune că matricele $A$ şi $B$ sunt *comutative*. În calitate de exemplu subliniem că *matricea scalară comută cu orice matrice pătratică de acelaşi ordin cu ea.*

Într-adevăr, dacă

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

atunci

$$\Lambda A = A\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Este evident că la înmulţirea matricelor pătratice, matricea $\Lambda$ se comportă la fel ca şi scalarul $\lambda$. Anume din această cauză matricea $\Lambda$ şi se numeşte matrice scalară.

În particular, pentru $\lambda = 1$, din ultima egalitate avem

$$AE = EA = A,$$

adică produsul matricei $A$ cu matricea $E$ este egal cu însăşi matricea $A$. Prin urmare, matricea unitate $E$ la înmulţirea matricelor joacă acelaşi rol ca şi numărul 1 la înmulţirea numerelor.

Exemplul 2. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

atunci

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

adică

$$AE = EA = A.$$

Menţionăm, de asemenea, că *produsul oricărei matrice $A$ cu matricea nulă* 0 *este egal cu matricea nulă* 0:

$$0A = A0 = 0.$$

b) *Înmulţirea matricelor* dreptunghiulare, când are sens, *este o operaţie asociativă*, adică dacă sunt date matricele $A, B$ şi $C$, atunci

$$(AB)C = A(BC); \tag{4.2}$$

aceasta înseamnă că este indiferent dacă înmulţim mai întâi matricele $A, B$, iar produsul lor cu matricea $C$, sau dacă înmulţim matricele $B, C$, iar apoi matricea $A$ cu produsul lor.

Exemplu. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

atunci

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ şi } (AB)C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, $(AB)C = A(BC)$.

În aşa fel, ca şi la înmulţirea numerelor, *produsul matricelor este asociativ.*

▷ Pentru demonstrarea formulei (4.2) calculăm elementele matricelor $(AB)C$ şi $A(BC)$ situate în linia $i$ şi coloana $j$. În virtutea formulei (4.1) şi a proprietăţilor respective ale sumelor finite, obţinem:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \Big( \sum_{p=1}^{s} a_{ip} b_{pk} \Big) c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} a_{ip} b_{pk} c_{kj};$$

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{p=1}^{s} A_{ip}(BC)_{pj} = \sum_{p=1}^{s} a_{ip}\Big(\sum_{k=1}^{r} b_{pk}c_{kj}\Big) =$$

$$= \sum_{p=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} a_{ip}b_{pk}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} a_{ip}b_{pk}c_{kj}.$$

Fiindcă elementele corespunzătoare sunt egale, sunt egale şi înseşi matricele, adică are loc egalitatea (4.2). ◁

c) Ca şi pentru numere, *pentru matrice înmulţirea este distributivă faţă de adunare:*

$$(A+B)C = AC + BC, \tag{4.3}$$

$$A(B+C) = AB + AC. \tag{4.4}$$

Este adevărată egalitatea

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B). \tag{4.5}$$

Aceasta înseamnă că pentru a înmulţi o sumă de matrice cu o matrice, trebuie să înmulţim fiecare termen cu această matrice şi să sumăm produsele obţinute. În mod analog, la înmulţirea matricei cu o sumă de matrice se înmulţeşte această matrice cu fiecare dintre termenii de adunare şi produsele obţinute se sumează.

E x e m p l u. Avem:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\cdot 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Să arătăm încă o proprietate care se deosebeşte de produsul numerelor: *produsul matricelor poate fi o matrice nulă, deşi ambii factori nu sunt matrice nule.*

Exemplu. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

atunci

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

adică $AB = 0$, cu toate că $A \neq 0$ şi $B \neq 0$.

e) Puterea unei matrice.

Considerăm matricea pătratică $A$. Dacă $p$ – un număr natural, atunci puterea matricei $A^p$ se defineşte prin formula

$$A^p = \underbrace{AA \ldots A}_{\text{de } p \text{ ori}}.$$

Pentru $p = 0$, prin definiţie,

$$A^\circ = E,$$

unde $E$ – matricea unitate de acelaşi ordin ca şi $A$.

Uşor poate fi demonstrat că dacă $p$ şi $q$ – numere naturale, atunci

$$A^p A^q = A^{p+q},$$
$$(A^p)^q = A^{pq}.$$

Exemplul 1. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

atunci

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix},$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{bmatrix}.$$

Exemplul 2. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

atunci

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

f) Polinom de argumentul matrice.

Fie polinomul

$$P(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$$

de nedeterminata $x$ şi matricea pătratică $A$. Expresia

$$P(A) = a_0A^k + a_1A^{k-1} + \ldots + a_kE$$

se numeşte *polinom de argumentul matrice* $A$. Dacă $P(A)$ – matrice nulă ($P(A) = 0$), atunci $A$ se numeşte rădăcina polinomului.

Exemplu. De aflat $P(A)$, dacă $P(x) = 3x^2 + 2x + 5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Înlocuind în $P(x)$ $x$ cu matricea $A$ şi având în vedere că $5 = 5x^0$, obţinem

$$P(A) = 3A^2 + 2A + 5E = 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 44 \end{bmatrix}.$$

## 4.4. Matricea transpusă a unei matrice

**Definiţie.** Fie $A$ o matrice de tipul $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricea

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

care se obţine din matricea $A$ schimbând liniile în coloane, se numeşte *matricea transpusă* a matricei date $A$, sau *transpusa matricei* $A$.

Aşadar, matricea transpusă a matricei $A = (a_{ik})$ este matricea $A' = (a'_{ki})$, unde $a'_{ki} = a_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m)$. Dacă tipul matricei $A$ este $m \times n$, atunci tipul matricei transpuse $A'$ este

$n \times m$. Având în vedere acest fapt, orice matrice-coloană (vector-coloană)

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

poate fi scrisă sub formă de matrice-linie (vector-linie)

$$B = [b_1 b_2 \dots b_m]',$$

adică matricea-linie transpusă este o matrice-coloană şi reciproc.

Transpunerea repetată duce la matricea iniţială

$$(A')' = A.$$

Au loc următoarele formule (reguli) de transpunere a sumei, a produsului matricei cu un număr şi a produsului matricelor:

$$(A + B)' = A' + B',$$

$$(\alpha A)' = \alpha A',$$

$$(AB)' = B'A'.$$

▷ Să demonstrăm ultima dintre aceste formule. Pentru aceasta, calculăm elementele $(AB)'$ şi $B'A'$ situate în linia $i$ şi coloana $j$:

$$[(AB)']_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{r} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki},$$

$$(B'A')_{ij} = \sum_{k=1}^{r} (B')_{ik} (A')_{kj} = \sum_{k=1}^{r} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}.$$

Întrucât elementele respective sunt egale, rezultă că şi înseşi matricele sunt egale, adică $(AB)' = B'A'$. În mod analog se demonstrează şi celelalte două formule. ◁

Exemplul 1. Produsul matricelor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

este egal cu $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Matricea transpusă a acestui produs este

$$(AB)' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte,

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şi deci $(AB)' = B'A'$.

Matricea pătratică $A = (a_{ik})$ se numeşte *simetrică* dacă elementele ei, situate simetric faţă de diagonala principală, sunt egale:

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

*Matricea simetrică $A$ coincide cu transpusa ei $A'$:*

$$A' = A.$$

Exemplul 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A \text{ – matrice simetrică.}$$

$$\text{Avem} \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{adică} \quad A' = A.$$

## 4.5. Matricea inversă a unei matrice pătratice

### 4.5.1. Matrice inversabile

Din cursul preuniversitar de matematică se ştie că pentru orice număr real $a \neq 0$, există numărul $\frac{1}{a} = a^{-1}$, numit inversul celui dat, astfel încât $aa^{-1} = 1$ (această proprietate nu o posedă numai numărul 0). Soluţia ecuaţiei $ax = 1$, evident, este $x = a^{-1}$. Din această cauză putem spune că inversul numărului $a$ este un astfel de număr $a^{-1}$ care, fiind înmulţit cu $a$, se obţine 1. Această noţiune poate fi extinsă şi asupra matricelor în felul următor.

Fie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

o matrice pătratică.

**Definiţie.** Matricea $B$ (dacă există) se numeşte *matricea inversă* a matricei pătratice $A$ dacă

$$AB = BA = E, \tag{4.1}$$

unde $E$ – matrice unitate. Matricea $A$ ce posedă matrice inversă se numeşte *inversabilă.*

Din definiţie rezultă că matricea inversă $B$ (dacă există), precum şi matricea unitate dată $E$ sunt matrice pătratice de acelaşi ordin $n$ cu matricea $A$.

Pentru fiecare matrice inversabilă există numai o singură matrice inversă.

Într-adevăr, dacă condiţia (4.1) este satisfăcută concomitent de două matrice $B$ şi $B_1$, atunci, înmulţind la stânga ambii membri ai egalităţii $AB_1 = E$ cu $B$, obţinem $B \cdot AB_1 = BE$, de unde, în virtutea asociativităţii înmulţirii matricelor, rezultă $BA \cdot B_1 = BE$, sau $EB_1 = BE$, sau $B_1 = B$.

Matricea inversă $B$ a matricei $A$, dacă există, se notează prin $A^{-1}$ şi se mai numeşte *inversa* matricei $A$.

Aşadar, prin definiţie, *matricea pătratică $A$ este inversabilă dacă există matricea $A^{-1}$, astfel încât:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{4.2}$$

unde $E$ – matricea unitate de acelaşi ordin cu $A$. Se poate demonstra că matricea inversă $A^{-1}$ poate fi definită de asemenea doar prin una dintre egalităţile $AA^{-1} = E$ sau $A^{-1}A = E$.

Exemplu. Matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ este inversabilă, deoarece, după cum uşor se poate verifica, matricea $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ este inversa matricei $A$, adică satisface egalităţile (4.2).

Nu fiecare matrice pătratică are inversă. De exemplu, matricea nulă $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, evident, nu are inversă, deoarece $0X = X0 = 0 \neq E$ pentru oricare matrice $X$.

În egalităţile (4.2) matricele $A$ şi $A^{-1}$ intră simetric, de aceea, dacă $A^{-1}$ este matricea inversă a matricei $A$, atunci matricea $A$ este inversa matricei $A^{-1}$. Cu alte cuvinte,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

În aşa fel, fiecare dintre matricele $A$ şi $A^{-1}$ este inversă pentru cealaltă.

Să stabilim următoarele două proprietăţi ale inversabilităţii matricelor pătratice.

### 4.5.2. Inversabilitatea produsului matricelor

Dacă matricele pătratice $A, B$ de acelaşi ordin sunt inversabile, atunci produsul lor $AB$ de asemenea este inversabil. Este adevărată formula

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

adică matricea inversă produsului de matrice este egală cu produsul matricelor inverse ale factorilor de înmulţire, luate în ordine opusă.

▷ Pentru demonstrarea acestei formule considerăm identităţile

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E,$$

de unde, în virtutea unicităţii matricei inverse, rezultă $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ◁

### 4.5.3. Inversabilitatea matricei transpuse

Este adevărată formula

$$(A')^{-1} = (A^{-1})',$$

adică matricea inversă a matricei transpuse este egală cu matricea transpusă a matricei inverse celei date.

▷ Într-adevăr, aplicând regula de transpunere a produsului de matrice asupra relaţiei (4.2), obţinem

$$(A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = E,$$

de unde, conform formulei (4.2), rezultă egalitatea

$$(A^{-1})' = (A')^{-1},$$

adică în urma transpunerii matricei inverse pentru $A$ se obţine din nou matricea inversă pentru transpusa $A'$. ◁

## 4.6. Calcularea matricei inverse prin metoda eliminării complete a necunoscutelor

Fie matricea pătratică

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Admitem, temporar, că matricea inversă $A^{-1}$ există şi notăm elementele ei necunoscute prin $x_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Din relaţia $AA^{-1} = E$, adică

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

aplicând regula de înmulţire a matricelor, şi anume, înmulţind toate liniile matricei $A$ cu coloana $k$ a matricei $A^{-1}$, obţinem coloana $k$ a produsului matricelor date, care este egală cu coloana $k$ a matricei $E$:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1k} + a_{12}x_{2k} + \ldots + a_{1n}x_{nk} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{k1}x_{1k} + a_{k2}x_{2k} + \ldots + a_{kn}x_{nk} = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_{1k} + a_{n2}x_{2k} + \ldots + a_{nn}x_{nk} = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Pentru fiecare valoare $k = 1, 2, \ldots, n$, (4.1) reprezintă un sistem de $n$ ecuaţii liniare în raport cu necunoscutele $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$. Aceste necunoscute formează coloana $k$ a matricei $A^{-1}$. Toate sistemele ce se rezolvă au una şi aceeaşi matrice $A$ a sistemului, dar se deosebesc numai prin coloanele de termeni liberi, care sunt vectori unitate şi au forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel de vectori unitate sunt în total $n$.

În sistemul $k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), coloana termenilor liberi conţine unitatea în linia $k$, iar toate celelalte elemente ale ei sunt egale cu zero.

Toate aceste $n$ sisteme de ecuaţii liniare, ce servesc pentru aflarea coloanelor matricei $A^{-1}$, pot fi rezolvate concomitent prin metoda eliminării complete (metoda Jordan-Gauss), folosind tabelele lui Gauss (vezi p. 2.5, cap. 2). Pentru aceasta, scriem următorul tabel iniţial al lui Gauss (tab. 1), comun pentru toate $n$ sisteme liniare (4.1):

Tabelul 1

| | k=1 | k=2 | ... | k=n | k=1 | k=2 | ... | k=n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{1k}x_{2k}\ldots x_{nk}$ | $b^{(1)}$ | $b^{(2)}$ | ... | $b^{(n)}$ | $\sum^{(1)}$ | $\sum^{(2)}$ | ... | $\sum^{(n)}$ |
| $a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}$ | 1 | 0 | ... | 0 | $\sigma_1^{(1)}$ | $\sigma_1^{(2)}$ | ... | $\sigma_1^{(n)}$ |
| $a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}$ | 0 | 1 | ... | 0 | $\sigma_2^{(1)}$ | $\sigma_2^{(2)}$ | ... | $\sigma_2^{(n)}$ |
| ..... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}$ | 0 | 0 | ... | 1 | $\sigma_n^{(1)}$ | $\sigma_n^{(2)}$ | ... | $\sigma_n^{(n)}$ |
| ..... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Efectuăm transformările corespunzătoare ale tabelului 1 prin metoda eliminării complete a necunoscutelor. Ca rezultat, obţinem soluţiile tuturor celor $n$ sisteme de ecuaţii (4.1) şi astfel stabilim dacă matricea $A$ este inversabilă sau nu: $A$ este inversabilă dacă $A^{-1}$ există, adică dacă toate $n$ sisteme (4.1) au soluţii, şi $A$ va fi neinversabilă în caz contrar.

E x e m p l u. Să se afle matricea inversă a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvarea este reprezentată schematic în tabelul 2.

În ultimul tabel transformat al lui Gauss, pentru o valoare dată a parametrului $k$ ($k = 1, 2, 3$), în dreptul fiecărei unităţi bazice 1 citim sus, în linia de titlu a tabelului, necunoscuta respectivă, iar în dreapta, în coloana $b^{(k)}$ de termeni liberi, valoarea respectivă a acestei necunoscute. În aşa fel, pentru valoarea dată $k$ ($k = 1, 2, 3$) aflăm necunoscutele $x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}$, adică elementele coloanei $k$ a matricei $A^{-1}$. Obţinem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tabelul 2

| $x_{1k}$ | $x_{2k}$ | $x_{3k}$ | k=1 $b^{(1)}$ | k=2 $b^{(2)}$ | k=3 $b^{(3)}$ | k=1 $\sum^{(1)}$ | k=2 $\sum^{(2)}$ | k=3 $\sum^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | −1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 |
| 0 | −1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | −1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | −1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 |
| 0 | −1 | **1** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | −4 | 1 | −2 | 0 | 1 | −5 | −3 | −2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 |
| 0 | −1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | **−3** | 0 | −2 | −1 | 1 | −5 | −4 | −2 |
| 1 | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1/3 | 4/3 | 5/3 | 4/3 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | 4/3 | −1/3 | 5/3 | 7/3 | 2/3 |
| 0 | 1 | 0 | 2/3 | 1/3 | −1/3 | 5/3 | 4/3 | 2/3 |

Observăm că dacă în ultimul tabel transformat al lui Gauss efectuăm permutarea liniilor astfel, încât în partea stângă a lui să avem matricea unitate, adică unităţile bazice să fie situate după diagonala principală a matricei sistemului, atunci în tabelul astfel obţinut, în partea dreaptă de matricea unitate, e scrisă matricea inversă $A^{-1}$:

| $x_{1k}$ | $x_{2k}$ | $x_{3k}$ | k=1 $b^{(1)}$ | k=2 $b^{(2)}$ | k=3 $b^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1/3 |
| 0 | 1 | 0 | 2/3 | 1/3 | −1/3 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | 4/3 | −1/3 |

Rămâne numai de transcris matricea $A^{-1}$.

## 4.7. Matrice-bloc şi operaţii asupra lor

Într-o matrice dreptunghiulară oarecare $A$ separăm prin linii verticale şi orizontale nişte matrice cu un număr mai mic de linii şi coloane (părţi ale matricei $A$, sau submatrice). Ele se numesc *blocuri*, sau *celule*, ale matricei $A$. Despre însăşi matricea $A$ divizată

într-un anumit fel în blocuri (celule) vom spune, respectiv, că $A$ este reprezentată (scrisă) *sub forma unei matrice-bloc*, sau *sub formă celulară*.

În acest caz, apare posibilitatea de a considera matricea inițială $A = (a_{pq})$ ca o matrice nouă – matricea-bloc $A = (A_{ij})$, ale cărei elemente $A_{ij}$ sunt blocurile (celulele) obținute în modul indicat. Una și aceeași matrice poate fi divizată în blocuri în diferite feluri, de exemplu:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right].$$

Matricea de trei linii și cinci coloane:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

poate fi reprezentată (scrisă), de exemplu, sub formă de matrice-bloc:

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right],$$

unde

$$A_{11} = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right], \quad A_{12} = \left[\begin{array}{cc} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{array}\right],$$

$$A_{21} = [a_{31}a_{32}a_{33}], \quad A_{22} = [a_{34}a_{35}].$$

Matricele reprezentate sub formă de matrice-bloc sunt aplicate pe larg la cercetarea matematică a proceselor economice.

De remarcat că operațiile de bază asupra matricelor scrise sub formă de matrice-bloc se efectuează după aceleași reguli după care ele se realizează asupra matricelor de numere obișnuite, numai că în rolul de elemente figurează blocurile (celulele) corespunzătoare.

a) Într-adevăr, fie că matricea $A = (a_{pq})$ este transcrisă sub forma unei matrice-bloc:

$$A = (A_{ij}) = \left[\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{array}\right].$$

Înmulţind toate blocurile cu numărul $\alpha$, se înmulţesc cu $\alpha$ toate elementele matricei $A$. Prin urmare,

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{m1} & \alpha A_{m2} & \dots & \alpha A_{mn} \end{bmatrix}.$$

b) Fie $B = (b_{pq})$ o matrice de acelaşi tip ca şi $A$ şi fie că $B$ este divizată în acelaşi număr de blocuri ca şi $A$:

$$B = (B_{ij}) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

Presupunem că blocurile corespunzătoare $A_{ij}$ şi $B_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) ale matricelor $A$ şi $B$ au, respectiv, acelaşi număr de linii şi coloane.

Ca să adunăm matricele $A$ şi $B$, trebuie, conform definiţiei, să adunăm elementele corespunzătoare. Acelaşi rezultat vom obţine şi în cazul dacă vom aduna blocurile corespunzătoare. De aceea

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{bmatrix}.$$

c) Fie, în sfârşit, $A$ şi $B$ două matrice reprezentate ca matrice-bloc sub următoarea formă:

$$A = (A_{ik}) = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mr} \end{bmatrix},$$

$$B = (B_{kj}) = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{r1} & \dots & B_{rn} \end{bmatrix},$$

la care lungimea liniei blocului $A_{ik}$ (adică numărul de coloane ale acestui bloc) este egală cu înălţimea coloanei blocului corespunzător $B_{kj}$ (adică cu numărul de linii ale acestuia) ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, n$).

Cu această condiţie, expresia

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{ir}B_{rj} \tag{4.1}$$

are sens. Atunci produsul matricei $A = (A_{ik})$ cu matricea $B = (B_{kj})$, scrise sub formă de matrice-bloc, este matricea $C = (C_{ij})$, scrisă de asemenea sub formă de matrice-bloc:

$$AB = C = \begin{bmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{m1} & \ldots & C_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

blocurile căreia $C_{ij}$ se calculează cu formula (4.1). Aşadar, matricele divizate în modul cuvenit în blocuri pot fi înmulţite prin metoda obişnuită: *blocul $C_{ij}$ al matricei produs $C = AB$, situat în linia $i$ şi coloana $j$, este egal cu suma produselor blocurilor liniei $i$ a matricei $A$ cu blocurile corespunzătoare ale coloanei $j$ a matricei $B$.*

Pentru verificarea formulei (4.2) este suficient de scris membrii stâng şi drept ai egalităţilor (4.1) şi (4.2) în termenii elementelor (numerelor) obişnuite ale matricelor $A$ şi $B$ (această verificare rămâne pe seama cititorului).

E x e m p l u. Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se afle produsul $AB$ al acestor matrice cu ajutorul divizării lor în blocuri.

Reprezentăm matricele $A$ şi $B$ sub următoarea formă de scriere ca matrice-bloc:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix},$$

unde

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \; A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} \cdot B_{21} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fiindcă

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix},$$

obţinem

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Exerciţii

**1.** Se dau matricele:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$,

3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 5 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 5) $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$,

6) $\begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, 7) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, 8) $\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

9) $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$, 10) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 11) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Să se indice matricele pentru care are sens operaţia adunării matricelor.

b) Să se arate matricele care pot fi înmulţite una cu alta.

**2.** Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să se afle $A + B$, $A - B$, $5A$, $-3B$, $AB$, $BA$.

**3.** Fie $A$ o matrice ce conţine $m$ linii şi $n$ coloane. Considerăm matricea pătratică $B$ de ordinul $m$ la care sunt egale cu zero toate elementele, în afară de elementul $b_{ij} = \alpha$.

Să se arate că în matricea $BA$ toate liniile, în afară de linia $i$, constau din zerouri, iar linia $i$ a acesteia reprezintă linia $j$ a matricei $A$, înmulţită cu $\alpha$.

**4.** Să se afle matricea inversă pentru fiecare dintre următoarele matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**5.** Să se afle matricea necunoscută $X$ din ecuaţia matriceală:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

**6.** Se dau matricele $A$ şi $B$ cu următoarea divizare în blocuri:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

a) Să se afle produsul acestor matrice transcrise sub formă de matrice-bloc corespunzătoare acestei divizări.

b) Să se verifice formula (4.2) din p. 4.7 pentru aceste matrice.

CAPITOLUL 5

# Determinanţi

## 5.1. Determinanţi de ordinul doi şi trei

### 5.1.1. Determinanţi de ordinul doi

Se numeşte *determinantul unei matrice pătratice de ordinul doi*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

sau simplu *determinant de ordinul doi*, numărul $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ care se notează prin simbolul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{adică}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{5.1}$$

Determinantul matricei pătratice $A$ se mai notează prin unul dintre următoarele simboluri: $|A|$, $\Delta$, $det\ A$. Determinantul notat prin tablou constă din aceleaşi linii şi coloane ca şi matricea $A$. Liniile şi coloanele matricei $A$ se numesc totodată liniile şi coloanele determinantului, iar numerele ce formează acest tablou – elementele determinantului. Formula (5.1) exprimă regula: determinantul de ordinul doi este egal cu diferenţa dintre produsul elementelor "diagonalei principale" $(a_{11}, a_{22})$ şi produsul elementelor "diagonalei secundare" $(a_{12}, a_{21})$.

Exemplul 1. Să se calculeze determinantul matricei pătratice de ordinul doi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conform formulei (5.1), obţinem

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 11.$$

Exemplul 2. Să se calculeze determinantul de ordinul doi

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -4 \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - (-4) \cdot 5 = 23.$$

Exemplul 3. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha(-\sin\alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

### 5.1.2. Proprietăţile determinanţilor de ordinul doi

1° *Mărimea determinantului nu se schimbă dacă liniile acestui determinant sunt înlocuite cu coloanele corespunzătoare ale sale:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2° *Dacă într-un determinant se schimbă două linii (sau două coloane) între ele, atunci determinantul îşi schimbă semnul în opus.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3° *Dacă două linii (respectiv două coloane) ale unui determinant sunt egale, atunci determinantul este nul.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

4° *Factorul comun al tuturor elementelor unei linii (respectiv al unei coloane) dintr-un determinant poate fi scos în afara semnului determinantului.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5° *Dacă elementele unei linii (respectiv ale unei coloane) dintr-un determinant sunt nule, atunci determinantul este nul.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6° *Dacă două linii (respectiv două coloane) ale unui determinant sunt proporţionale, atunci determinantul este nul.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

7° *Dacă elementele unei linii $i$ (respectiv ale unei coloane $k$) dintr-un determinant sunt fiecare suma a două elemente, atunci acest determinant este egal cu suma a doi determinanţi, dintre care: unul dintre ei are linia $i$ (respectiv coloana $k$) compusă din primii termeni de adunare, iar celălalt – din termenii ai doilea; celelalte linii (respectiv celelalte coloane) sunt aceleaşi ca şi în determinantul iniţial.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8° *Dacă la elementele unei linii (respectiv unei coloane) a determinantului adăugăm elementele corespunzătoare ale altei linii (respectiv altei coloane), înmulţite în prealabil cu unul şi acelaşi*

*număr, atunci mărimea acestui determinant nu se schimbă.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Toate proprietăţile determinantului de ordinul doi pot fi verificate prin calcularea nemijlocită a determinanţilor respectivi conform formulei (5.1).

### 5.1.3. Determinanţi de ordinul trei

Fie o matrice pătratică arbitrară de ordinul trei:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Elementele ei sunt notate printr-o literă cu doi indici. Primul indice arată numărul liniei, iar al doilea – numărul coloanei, la intersecţia cărora se află elementul dat.

**Definiţie.** Se numeşte *determinantul unei matrice pătratice de ordinul trei*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

sau simplu *determinant de ordinul trei*, numărul notat cu simbolul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

şi care se determină prin formula

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (5.2)$$

Determinantul matricei pătratice $A$ de ordinul trei se notează de asemenea prin unul dintre următoarele simboluri: $\Delta$, $|A|$, $det\, A$. Determinantul notat prin tablou constă din aceleaşi linii şi coloane ca şi matricea $A$. Liniile şi coloanele matricei $A$ se numesc totodată *liniile şi coloanele determinantului*, iar numerele ce formează acest tablou – elementele determinantului.

Formula (5.2) exprimă regula de calculare a determinantului de ordinul trei, numită *regula triunghiurilor* sau *regula lui Sarrus*[1], şi constă în următoarele.

Formula (5.2) arată că determinantul de ordinul trei reprezintă suma algebrică a $3! = 6$ termeni. Fiecare termen este produsul a trei elemente – câte unu din fiecare linie şi fiecare coloană. Unul dintre cei trei termeni consideraţi cu semnul "+" este produsul elementelor diagonalei principale $(a_{11}, a_{22}, a_{33})$ a matricei, iar fiecare dintre ceilalţi doi – produsul elementelor situate în vârfurile triunghiului cu baza paralelă la diagonala principală şi cu vârful în colţul opus al matricei (fig. 5.1). Alţi trei termeni, consideraţi cu semnul "−", se obţin în acelaşi mod, numai că faţă de diagonala secundară $(a_{13}, a_{22}, a_{31})$. În fig. 5.1 este indicată schematic regula de calculare a termenilor cu semnul "+" în dezvoltarea determinantului de ordinul trei, iar în fig. 5.2 regula de calculare a termenilor cu semnul "−".

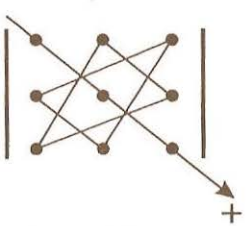



Fig. 5.1

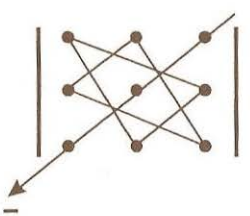



Fig. 5.2

E x e m p l u l 1. Să se calculeze determinantul matricei pătratice de ordinul trei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conform definiţiei, adică conform regulii triunghiurilor (formu-

[1] P. Sarrus (sec. XVIII–XIX) – profesor din or. Strasburg.

la (5.2)), obţinem

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 4\cdot 1 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-1) -$$

$$-(-2)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot(-1) - 5\cdot(-1)\cdot 1 = 40.$$

E x e m p l u l 2. Să se calculeze determinantul de ordinul trei

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Conform regulii triunghiurilor (formula (5.2)), obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 3\cdot 3\cdot 7 + (-2)\cdot 4\cdot 5 -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 7 - 1\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot 4\cdot 0 = -6.$$

E x e m p l u l 3. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-x & a & x \\ a & a+x & x \\ -x & b & b+x \end{vmatrix}.$$

Conform regulii triunghiurilor, avem

$$\Delta = (a^2 - x^2)(b+x) + ax(-x) + xab - x(a+x)(-x) -$$

$$-(a-x)xb - a^2(b+x) = 0.$$

Determinanţii de ordinul trei posedă aceleaşi proprietăţi $1°-8°$, formulate pentru determinanţii de ordinul doi. Rămâne doar să transcriem formulele respective pentru determinanţii de ordinul trei. Toate aceste proprietăţi pot fi verificate direct, calculând determinanţii formulei respective conform regulii triunghiurilor (formula (5.2)). Proprietăţile determinanţilor de ordinul trei se referă la determinanţi de orice ordin, pentru care ele vor fi demonstrate în p. 5.5.

### 5.1.4. Minor şi complement algebric al unui element

În matricea $A$ de ordinul trei sau în tabloul determinantului acestei matrice:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

suprimăm linia a 2-a şi coloana a 3-a, la intersecţia cărora este situat elementul $a_{23}$. Elementele rămase din matricea $A$, luate în ordinea lor firească, formează o matrice de ordinul doi. Determinantul acestei matrice se numeşte *minorul elementului* $a_{23}$ şi se notează prin simbolul $M_{23}$. Deci

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Suprimând linia $i$ şi coloana $k$ în matricea $A$ (sau în determinantul $|A|$), în mod analog definim *minorul* $M_{ik}$ *al oricărui element* $a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ în determinantul matricei $A$.

Numărul $A_{ik}$, determinat de expresia

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik},$$

se numeşte *complementul algebric al elementului* $a_{ik}$ în determinantul $|A|$. De exemplu,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} \quad \text{etc.}$$

Cu ajutorul minorilor, determinantul de ordinul trei poate fi exprimat prin formula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13}, \qquad (5.3)$$

unde $M_{11}, M_{12}, M_{13}$ sunt, respectiv, minorii elementelor primei linii $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ în determinantul $|A|$ de ordinul trei:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

▷ Într-adevăr, formula (5.2) poate fi transformată astfel:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

adică am obţinut formula (5.3). Deci (5.2) $\Leftrightarrow$(5.3). ◁

Prin complemente algebrice, formula (5.3), evident, se exprimă astfel:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \qquad (5.4)$$

unde $A_{11}, A_{12}, A_{13}$ sunt, respectiv, complementele algebrice ale elementelor primei linii $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ în determinantul $|A|$.

Fiecare dintre formulele (5.3), (5.4) se numeşte *dezvoltarea determinantului* $|A|$ *de ordinul trei după elementele primei linii.*

În cazul general, se demonstrează în mod analog că determinantul $|A|$ de ordinul trei admite următoarele dezvoltări:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \ (i = 1,2,3); \qquad (5.5)$$

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k}, \ (k = 1,2,3). \qquad (5.6)$$

Prima dezvoltare (5.5) se numeşte *dezvoltarea determinantului* $|A|$ *după elementele liniei* $i$ $(i = 1,2,3)$, cea de a doua (5.6) – *dezvoltarea lui* $|A|$ *după elementele coloanei* $k$ $(k = 1,2,3)$. Egalităţile (5.5), (5.6) se mai numesc *formulele lui Laplace*[2].

▷ Formulele (5.5), (5.6) pot fi verificate direct, calculând pentru valoarea fixată a lui $i$ sau $k$ $(i,k = 1,2,3)$ complementele algebrice respective şi convingându-ne că în partea dreaptă a egalităţilor

[2] P. Laplace (1749–1827) – matematician francez.

(5.5), (5.6) se obţine aceeaşi expresie ca şi în partea dreaptă a egalităţii (5.2). ◁

Aşadar, am stabilit următoarea proprietate a determinantului de ordinul trei.

9° (Teorema despre dezvoltarea determinantului după elementele unei linii (sau unei coloane).) *Determinantul este egal cu suma produselor elementelor unei linii (respectiv coloane) cu complementele lor algebrice* (formulele (5.5), (5.6)).

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă într-un determinant există o linie (respectiv coloană) cu un singur element diferit de zero, atunci determinantul este egal cu produsul dintre acel element şi complementul său algebric.*

E x e m p l u l 1. Să se calculeze determinantul

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

realizând dezvoltarea lui după elementele primei linii.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot M_{11} +$$

$$+ \ (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 7 \cdot M_{13}, \qquad (5.7)$$

unde

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 8 \cdot 1 = 28, \ M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 12,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -8.$$

Înlocuind valorile minorilor în (5.7), obţinem

$$|A| = (-1)^2 \cdot 3 \cdot 28 + (-1)^3 \cdot 5 \cdot 12 + (-1)^4 \cdot 7 \cdot (-8) = -32.$$

10° (Teorema anulării.) *Suma produselor elementelor unei linii (respectiv ale unei coloane) cu complementii algebrici ai elementelor corespunzătoare din altă linie (respectiv coloană) este nulă:*

$$\Delta' = a_{i1}A_{l1} + a_{i2}A_{l2} + a_{i3}A_{l3} = 0,\ i \neq l;$$

$$\Delta'' = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = 0,\ j \neq k.$$

▷ Proprietatea rezultă din faptul că expresiile $\Delta'$ (respectiv $\Delta''$) sunt egale cu dezvoltarea unui determinant având două linii $i$ şi $l$ (respectiv două coloane $j$ şi $k$) egale, determinant care este egal cu zero (conform proprietăţii 3°). Deci $\Delta' = 0$ şi $\Delta'' = 0$. ◁

Exemplul 2. Să se calculeze determinantul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

aplicând proprietăţile determinanţilor de ordinul trei.

Transformăm determinantul în aşa fel, încât în prima coloană două elemente să se anuleze. Pentru aceasta, la linia a doua adăugăm prima linie, iar la linia a treia adăugăm prima linie înmulţită cu $(-2)$. Obţinem

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 2 = -14.$$

## 5.2. Definiţia determinantului de ordinul $n$

Determinanţii matricelor pătratice de ordinul doi şi trei se definesc, respectiv, prin formulele (5.1) şi (5.2) din p. 5.1. Noţiunea de determinant de ordinul arbitrar $n$, unde $n \geq 2$, o vom introduce inductiv, presupunând că deja este introdusă noţiunea de determinant al unei matrice pătratice de ordinul $n-1$.

În cele ce urmează, vom avea nevoie de următoarele noţiuni preliminare.

Considerăm o matrice pătratică arbitrară de ordinul $n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Numerele ce formează matricea sunt notate printr-o singură literă cu doi indici. Primul indice arată numărul liniei, iar al doilea – numărul coloanei la intersecţia cărora se află numărul dat.

În matricea (5.1) de ordinul $n$ suprimăm linia $i$ şi coloana $k$ la intersecţia cărora este situat elementul $a_{ik}$. Elementele rămase din matricea (5.1), în ordinea lor firească, formează o matrice de ordinul $n-1$. Determinantul de ordinul $n-1$ al acestei matrice se numeşte *minorul elementului* $a_{ik}$ al matricei (5.1) şi se notează prin simbolul

$$M_{ik}, \quad i,k = 1,2,\dots,n.$$

**Definiţie.** Se numeşte *determinantul unei matrice pătratice* $A$ *de ordinul* $n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sau simplu *determinant de ordinul* $n$, numărul notat prin unul dintre următoarele simboluri

$$\det A, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |A|, \quad \Delta$$

şi care se determină în felul următor. Dacă $n = 1$, atunci determinantul matricei de ordinul întâi $(a_{11})$ se numeşte însuşi acest element $a_{11}$:

$det\, A = a_{11}$. Fie acum că pentru un număr natural $n \geq 2$ noţiunea de determinant al unei matrice pătratice de ordinul $n-1$ este introdusă deja. Atunci pentru matricea pătratică $A$ de ordinul $n$, prin definiţie, considerăm

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} +$$

$$+(-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k}, \tag{5.2}$$

unde $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}$ sunt, respectiv, minorii elementelor primei linii $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ a matricei $A$ (sau a determinantului $|A|$ de ordinul $n$).

Determinantul notat prin tablou constă din aceleaşi linii şi coloane ca şi matricea $A$. De aceea, liniile şi coloanele matricei $A$ se numesc totodată *liniile şi coloanele determinantului* $|A|$, iar numerele ce formează acest tablou – *elementele determinantului.* Minorul $M_{ik}$ al elementului $a_{ik}$ al matricei $A$ se numeşte de asemenea *minorul lui* $a_{ik}$ *în determinantul* $|A|$ al acestei matrice.

Formula (5.2) se numeşte *dezvoltarea determinantului după elementele primei linii.*

Dacă în (5.2) $n = 2$, atunci

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

adică rezultă formula de definiţie (5.1) din p. 5.1 a determinantului de ordinul doi. Dacă $n = 3$, obţinem formula (5.3) din p. 5.1 – dezvoltarea determinantului de ordinul trei după elementele primei linii.

Pentru $n = 4$, formula (5.2) are forma:

$$det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-a)^{1+1} a_{11} M_{11} +$$

$$+(-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} + (-1)^{1+4} a_{14} M_{14},$$

unde $M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}$ sunt minorii elementelor primei linii $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{14}$, adică determinanţii de ordinul trei, pe care îi calculăm conform regulii triunghiurilor (formula (5.2) din p. 5.1). Calcularea determinantului de ordinul 5 cu ajutorul formulei (5.2) se reduce la calcularea a cinci determinanţi de ordinul patru, care, la rândul lor, se reduc la calcularea câtorva determinanţi de ordinul 3. Calcularea determinantului de ordinul $n \geq 4$ se reduce la calcularea a $n$ determinanţi de ordinul $n-1$, adică a minorilor $M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{1n}$ ai elementelor primei linii. Pe fiecare dintre aceşti minori, fiind determinant de ordinul $n-1$, îl exprimăm, la rândul său, prin $n-1$ determinanţi de ordinul $n-2$ iarăşi prin formula (5.2) etc. În final, obţinem că determinantul de ordinul $n$ se va exprima printr-o sumă algebrică de determinanţi de ordinul trei, pe care ştim să-i calculăm. Deci determinantul de ordinul $n$ poate fi calculat aplicând succesiv formula (5.2).

Exemplu. Să se calculeze determinantul matricei pătratice de ordinul patru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

în baza formulei de definiţie (5.2).

Dezvoltarea determinantului după elementele primei linii, adică conform formulei (5.2), este

$$det\, A = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot M_{12} + \\ + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot M_{14},$$

unde

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$M_{14} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Prin urmare,

$$det\, A = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot (-11) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 = -24.$$

## 5.3. Permutări şi transpoziţii

Să considerăm mulţimea din $n$ numere naturale $1, 2, \ldots, n$.

**Definiţia 1.** Numim *permutare de gradul* $n$, sau simplu *permutare*, un complex ordonat de $n$ numere (elemente), adică fiecare aşezare posibilă a acestor $n$ numere (elemente) diferite într-o ordine determinată. De exemplu, din mulţimea $1, 2, 3$ pot fi alcătuite următoarele permutări: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

O permutare oarecare din numerele $1, 2, \ldots, n$ o vom nota prin $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt numerele $1, 2, \ldots, n$ luate într-o anumită ordine.

**Teorema 5.1.** *Pentru mulţimea de* $n$ *numere* $1, 2, \ldots, n$ *există* $n!$ *permutări.*

▷ În permutarea din $n$ numere, pentru primul număr 1 avem $n$ posibilităţi de aşezare a lui. Fixând poziţia lui, pentru al doilea număr 2 avem de acum $n - 1$ posibilităţi de aşezare a lui etc. În felul acesta, avem în total $n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ posibilităţi de aşezare a $n$ numere. ◁

În permutarea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ considerăm perechile de tot felul de numere $\alpha_i, \alpha_j$, unde $i < j$.

Se zice că perechea $\alpha_i, \alpha_j$ formează o *inversiune* în permutarea dată dacă pentru $i < j$ avem $\alpha_i > \alpha_j$, adică în permutare ordinea numerelor date este inversă ordinii lor naturale (sau, altfel zis, numărul mai mare se află în această permutare mai la stânga de un număr mai mic). De exemplu, în permutarea $(2, 3, 1)$ sunt două inversiuni: numerele 2 şi 1 şi de asemenea 3 şi 1 prezintă inversiuni, deoarece 2 se află mai la stânga de 1, iar 3 de asemenea este situat mai la stânga de 1.

Permutarea se numeşte *pară* dacă numărul tuturor inversiunilor ei este par şi *impară* – în caz contrar.

**Definiţia 2.** Operaţia care schimbă între ele locurile a două numere în permutare se numeşte *transpoziţie.*

**Teorema 5.2.** *Aplicarea unei transpoziţii schimbă paritatea permutării în opusă.*

▷ Să considerăm permutarea

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_{k+s}, \alpha_l, \ldots, \alpha_n).$$

Fie că transpoziţia schimbă între ele locurile numerelor $\alpha_k$ şi $\alpha_l$, între care se află $s$ numere. Transpoziţia simbolurilor $\alpha_l$ şi $\alpha_k$ poate fi obţinută în urma efectuarii succesive a transpoziţiilor elementelor vecine. Până ca $\alpha_k$ să nimerească pe locul $\alpha_l$, el trebuie să-şi schimbe locul consecutiv cu $s+1$ numere $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+s}, \alpha_l$. La rândul său, numărul $\alpha_l$, deplasându-se spre stânga, îşi va schimba locul de $s$ ori cu numerele $\alpha_{k+s}, \ldots, \alpha_{k+1}$. În total, numerele care sunt situate alături în permutarea dată îşi vor schimba locul de $2s+1$ ori. Însă transpoziţia a două numere aşezate alături, evident, schimbă paritatea permutării în imparitate şi reciproc. Întrucât au fost realizate $2s+1$ de atare transpoziţii, rezultă că paritatea permutării se schimbă în imparitate şi reciproc. ◁

## 5.4. Exprimarea determinantului de ordinul $n$ nemijlocit prin elementele sale (evitând minorii)

Cu ajutorul inducţiei matematice vom stabili că pentru determinantul de ordinul $n$, notat prin tablou, are loc următoarea formulă:

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}, \qquad (5.1)$$

unde $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – numărul tuturor inversiunilor în permutarea $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, iar însumarea se extinde asupra permutărilor de tot felul $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ale numerelor $1, 2, \ldots, n$; numărul acestor permutări este egal cu $n!$. Numărul

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}$$

îl numim *termen al determinantului.*

▷ Pentru $n = 2$, formula (5.1) se verifică în mod elementar, deoarece în acest caz sunt posibile numai două permutări $(1,2)$ şi $(2,1)$, dar,

întrucât $N(1,2) = 0$, $N(2,1) = 1$, formula (5.1) trece în egalitatea (5.1) din p. 5.1.

Presupunem că formula (5.1) este adevărată pentru determinantul de ordinul arbitrar $n-1$, unde $n > 2$. Atunci, scriind dezvoltarea determinantului de ordinul $n$ după elementele primei linii sub forma:

$$\Delta = det\, A = \sum_{\alpha_1=1}^{n} (-1)^{1+\alpha_1} a_{1\alpha_1} M_{1\alpha_1}, \tag{5.2}$$

putem, în virtutea presupunerii inducţiei, să reprezentăm fiecare minor $M_{1\alpha_1}$ de ordinul $(n-1)$ sub forma

$$M_{1\alpha_1} = \sum_{\alpha_2,\ldots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{5.3}$$

(însumarea se extinde asupra permutărilor de tot felul $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$).

Întrucât din numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, în afară de perechile de felul $\alpha_i\alpha_j$ $(i < j)$ formate din numerele $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, pot fi compuse în plus următoarele perechi de felul arătat: $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3, \ldots, \alpha_1\alpha_n$ şi deoarece între numerele $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se vor găsi $(\alpha_1 - 1)$ numere mai mici ca $\alpha_1$, $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = N(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \alpha_1 - 1$. De aici rezultă că

$$(-1)^{1+\alpha_1} \cdot (-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} = (-1)^{\alpha_1 - 1} \cdot (-1)^{N(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} =$$

$$= (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}. \tag{5.4}$$

Înlocuind (5.3) în (5.2), în virtutea (5.4), obţinem formula (5.1). ◁

Notând indicii ai doilea prin $j_1, \ldots, j_n$, mai departe vom rescrie formula (5.1) sub forma

$$|A| = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}, \tag{5.5}$$

unde $t$ – numărul inversiunilor în permutarea $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Expresia determinantului mai poate lua şi forma:

$$|A| = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}, \tag{5.6}$$

nde $s$ – suma inversiunilor în permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, iar însumarea e extinde asupra permutărilor de tot felul $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ale numerelor $, 2, \ldots, n$.

Formula (5.6) poate fi dedusă analog formulei (5.5).

Formula (5.5) exprimă următoarea *regulă* de calculare a determinantului de ordinul $n$.

Determinantul de ordinul $n$, corespunzător matricei (5.1) din p. 5.2, este egal cu suma algebrică a $n!$ termeni, astfel încât fiecare dintre ei reprezintă produsul a $n$ elemente $a_{ik}$ luate câte unul din fiecare linie şi fiecare coloană; termenul determinantului se ia cu semnul "+", dacă indicii ai doilea ai elementelor sale formează o permutare pară, şi cu semnul "−", dacă această permutare este impară (atunci când primii indici formează permutarea naturală $(1, 2, \ldots, n)$).

Menţionăm că definiţia determinantului de ordinul trei (regula triunghiurilor) reprezintă întocmai această regulă pentru cazul $n = 3$.

Expresia determinantului poate avea şi forma:

$$|A| = \sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_n \\ (i_1, i_2, \ldots, i_n)}} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}, \tag{5.7}$$

unde $s$ – numărul inversiunilor în permutarea formată din primii indici $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, iar $t$ – numărul inversiunilor în permutarea din indicii ai doilea $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$; $(i_1, \ldots, i_n)$ (respectiv $(j_1, \ldots, j_n)$) este o permutare fixă dată, iar $(j_1, \ldots, j_n)$ (respectiv $(i_1, \ldots, i_n)$) este o permutare oarecare, variind cu termenul considerat.

Într-adevăr, fie suma $\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$, unde $s+t$ – suma numărului inversiunilor permutărilor $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ şi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, formate din primii şi ai doilea indici, respectiv. Schimbând între ele locurile a doi factori în produsul $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$, schimbăm paritatea la fiecare dintre permutările $(i_1, \ldots, i_n)$ şi $(j_1, \ldots, j_n)$, iar paritatea sumară a lor se păstrează. De aceea, semnul înaintea termenului respectiv din această sumă nu se va modifica dacă în termenii acestei sume vom schimba succesiv locul factorilor în aşa fel, încât primii indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ să fie aşezaţi în ordinea naturală $1, 2, \ldots, n$. Vom obţine suma

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n},$$

unde $p$ – numărul inversiunilor în permutarea $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Aceste sume constau din unii şi aceiaşi termeni cu aceleaşi semne, deoarece $(-1)^{s+t} = (-1)^{o+p}$, adică coincid.

Însă, conform formulei (5.5), ultima sumă este expresia determinantului $|A|$ de ordinul $n$. Deci şi prima sumă este egală cu acest determinant, adică are loc formula (5.7). ◁

Fiecare dintre formulele (5.5), (5.6), (5.7), în unele cursuri de algebră liniară, este pusă la baza definiţiei determinantului de ordinul $n$.

## 5.5. Proprietăţile determinanţilor

Determinanţii de ordinul $n$ posedă aceleaşi proprietăţi care deja au fost enunţate pentru determinanţii de ordinul doi (p. 5.1.2).

1° *Determinantul matricei $A$ este egal cu determinantul matricei transpuse $A'$:*

$$|A| = |A'|.$$

▷
$$|A| = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^s a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n} =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^s a'_{1 i_1} a'_{2 i_2} \ldots a'_{n i_n} = |A'|,$$

unde $s$ – numărul inversiunilor în permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. ◁

Din această afirmaţie rezultă că proprietăţile demonstrate pentru liniile determinantului vor fi adevărate şi pentru coloanele lui. Aşadar, proprietăţile următoare pot fi formulate numai pentru linii.

2° *Dacă într-un determinant $|A|$ se schimbă locul a două linii între ele, obţinem un determinant*

$$|A_1| = -|A|,$$

*adică determinantul îşi schimbă semnul în opus.*

▷ Fie $A$ o matrice pătratică de ordinul $n$, $|A|$ se calculează cu formula (5.5). Schimbând în $A$ locurile a două linii între ele, de exemplu, a liniilor $k$ şi $l$, obţinem o matrice nouă $A_1$. Pentru a găsi expresia pentru $|A_1|$, cu exactitate de până la semn, trebuie în suma (5.5) din p. 5.4 să schimbăm între ele locurile primilor indici $k$ şi $l$, indicii ai doilea $j_k$ şi $j_l$ rămânând pe locurile lor. Atunci, în baza teoremei 5.2, paritatea permutării $(1, 2, \ldots, n)$ din primii indici ai termenului respectiv din suma (5.5) din p. 5.4

se va schimba cu o unitate, iar paritatea permutării $(j_1, \ldots, j_n)$ din indicii ai doilea ai acestui termen rămâne fără schimbare. Aceasta, conform formulei (5.7) din p. 5.4, duce la schimbarea semnului determinantului $|A|$ în opus, adică $|A_1| = -|A|$. ◁

3° *Dacă două linii ale unui determinant $A$ sunt egale, atunci determinantul este nul:* $|A| = 0$.

▷ Fie că în $|A|$ sunt egale liniile $k$ şi $l$. Schimbând în $|A|$ locurile acestor două linii între ele, conform proprietăţii 2°, avem $|A| = -|A|$, de unde rezultă $|A| = 0$. ◁

4° *Factorul comun al unei linii a determinantului poate fi scos în afara semnului determinantului.*

▷ Într-adevăr,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots k a_{mj_m} \ldots a_{nj_n} = k|A|. \quad \triangleleft$$

5° *Dacă elementele unei linii dintr-un determinant $|A|$ sunt nule, atunci determinantul este nul:* $|A| = 0$.

6° *Dacă două linii ale unui determinant $|A|$ sunt proporţionale, atunci determinantul este nul:* $|A| = 0$.

Demonstraţia proprietăţilor 5° şi 6° rezultă imediat din proprietăţile 3°, 4°.

7° *Dacă elementele unei linii $k$ sunt reprezentate sub formă de sume a doi termeni, adică ea are forma $(a_{k1} + b_{k1}, a_{k2} + b_{k2}, \ldots, a_{kn} + b_{kn})$, atunci este adevărată egalitatea:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \ldots & a_{kn} + b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

▷

$$|A| = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (a_{kj_k} + b_{kj_k}) \dots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k} \dots a_{nj_n} +$$

$$+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{kj_k} \dots a_{nj_n}. \quad \triangleleft$$

8° *Dacă la elementele unei linii a determinantului adăugăm elementele corespunzătoare ale altei linii înmulţite în prealabil cu unul şi acelaşi număr, atunci mărimea determinantului nu se schimbă.* De exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + \lambda a_{l1} & a_{k2} + \lambda a_{l2} & \dots & a_{kn} + \lambda a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

▷ Această proprietate rezultă din proprietăţile 6° şi 7°. ◁

Înainte de a formula următoarea proprietate a determinantului, să introducem noţiunea utilă de "complement algebric" al elementului dat în determinant.

Fie $|A|$ un determinant de ordinul $n$. Determinantul de ordinul $n-1$ care se obţine suprimând linia $i$ şi coloana $k$ din determinantul $|A|$ este numit *minorul elementului* $a_{ik}$ şi se notează cu $M_{ik}$. Numărul $A_{ik}$, determinat de expresia

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik},$$

se numeşte *complementul algebric al elementului* $a_{ik}$ în determinantul $|A|$.

9° **Teorema 5.3** (teorema despre dezvoltarea determinantului după o linie (sau o coloană)). *Determinantul este egal cu suma produselor elementelor unei linii (respectiv coloane) cu complementele lor algebrice:*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}; \tag{5.1}$$

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}, \tag{5.2}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prima formulă (5.1) se numeşte *dezvoltarea determinantului* $|A|$ *după elementele liniei* $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), cea de a doua (5.2) – *dezvoltarea lui* $|A|$ *după elementele coloanei* $k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Egalităţile (5.1), (5.2) se mai numesc *formulele lui Laplace.*

▷ Fie matricea pătratică $A$. Schimbăm între ele locurile liniei 1 şi liniei $i$ ($i \neq 1$). Obţinem matricea $A^*$ pentru care, conform proprietăţii 2°, $|A^*| = -|A|$.

Conform definiţiei determinantului de ordinul $n$ (formula (5.2) din p. 5.2), avem:

$$|A^*| = (-1)^{1+1}a_{i1}M^*_{11} + (-1)^{1+2}a_{i2}M^*_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{in}M^*_{1n}$$

sau

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}(-1)^1 M^*_{11} + a_{i2}(-1)^2 M^*_{12} + \ldots + \\ &+ a_{ik}(-1)^k M^*_{1k} + \ldots + a_{in}(-1)^n M^*_{1n}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tabloul minorului $M^*_{1k}$ al elementului $a^*_{1k} = a_{ik}$ al matricei $A^*$, evident, are forma:

$$M^*_{1k} = \begin{vmatrix} a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

În $M_{1k}^*$, mai sus de linia ce constă din elementele $a_{11}, \ldots, a_{1,k-1}$, $a_{1,k+1}, \ldots, a_{1,n}$, premerg $(i-2)$ linii. Permutând succesiv între ele linia $(a_{11}, \ldots, a_{1,k-1}, a_{1,k+1}, \ldots, a_{1n})$ cu fiecare linie situată deasupra acesteia, după $(i-2)$ permutări obţinem, evident, minorul $M_{ik}$ al elementului $a_{ik}$ al matricei $A$. Ca rezultat, determinantul $M_{1k}^*$, conform proprietăţii 2°, şi-a schimbat semnul de $(i-2)$ ori, adică $(-1)^{i-2}M_{1k}^* = M_{ik}$, sau $M_{1k}^* = (-1)^i M_{ik}$. De aici rezultă egalitatea:

$$\begin{aligned}(-1)^k M_{1k}^* &= (-1)^k \cdot (-1)^i M_{ik} = \\ &= (-1)^{i+k} M_{ik} = A_{ik},\ k = 1, 2, \ldots, n. \quad (5.4)\end{aligned}$$

Înlocuind expresiile din (5.4) în (5.3), respectiv, obţinem dezvoltarea (5.1).

Dezvoltarea (5.2) se obţine printr-un raţionament asemănător. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă într-un determinant există o linie (respectiv coloană) cu un singur element diferit de zero, atunci determinantul este egal cu produsul dintre acel element şi complementul său algebric.*

10° (T e o r e m a a n u l ă r i i.) *Suma produselor elementelor unei linii (respectiv ale unei coloane) cu complementele algebrice ale elementelor corespunzătoare din altă linie (respectiv coloană) este nulă:*

$$|A_1| = a_{i1}A_{l1} + a_{i2}A_{l2} + \ldots + a_{in}A_{ln} = 0,\ i \neq l;$$

$$|A_2| = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0,\ k \neq j.$$

▷ Proprietatea rezultă din faptul că expresiile $|A_1|$ (respectiv $|A_2|$) sunt egale cu dezvoltarea unui determinant având două linii $i$ şi $l$ (respectiv două coloane $j$ şi $k$) egale, determinant care este egal cu zero (conform proprietăţii 3°). Deci $|A_1| = 0$ şi $|A_2| = 0$. ◁

11° *Dacă elementele unei linii a determinantului $|A|$ sunt o combinaţie liniară a elementelor corespunzătoare ale altor linii, atunci determinantul este nul:* $|A| = 0$.

▷ Fie că linia $l$ a determinantului $|A|$ este o combinaţie liniară a altor linii. Descompunem $|A|$ într-o sumă de determinanţi conform proprietăţii 7°. Fiecare termen al acestei sume, conform proprietăţii 6°, este egal cu zero în virtutea proporţionalităţii liniilor. Deci $|A| = 0$. ◁

Un rol important în ce priveşte matricele îl joacă următoarea teoremă.

12° **Teorema 5.4** (teorema despre produsul determinanţilor). *Determinantul produsului a două matrice pătratice $A$ şi $B$ este egal cu produsul determinanţilor acestor matrice:*

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \tag{5.5}$$

▷ a) Considerăm, în prealabil, o matrice pătratică de ordinul $n$ de forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{r+1,1} & \cdots & \alpha_{r+1,r} & \alpha_{r+1,r+1} & \cdots & \alpha_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nr} & \alpha_{n,r+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

care de asemenea poate fi scrisă sub formă de matrice-bloc:

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

unde $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{22}$ – blocuri pătratice, iar 0 şi $\overline{A}_{21}$ – blocuri dreptunghiulare. O astfel de matrice se numeşte *semidescompusă*.

Să demonstrăm că *determinantul unei matrice semidescompuse de forma* (5.6) *este egal cu produsul determinanţilor blocurilor diagonalei principale*, adică are loc formula:

$$\begin{vmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{vmatrix} = |\overline{A}_{11}| \cdot |\overline{A}_{22}|, \tag{5.7}$$

unde $\overline{A}_{11}$, $\overline{A}_{22}$ – matrice pătratice (blocuri) ce au ordinele $r$ şi $s$ $(r + s = n)$, respectiv, iar $0 = 0_{r\times s}$ – matrice nulă.

Într-adevăr, pentru o matrice semidescompusă de ordinul 2 această afirmaţie este evidentă, deoarece

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22}.$$

Mai departe, aplicăm inducţia matematică după numărul $n$ – ordinul matricei semidescompuse (5.6), presupunând că formula (5.7) este adevărată pentru orice matrice semidescompusă de un ordin oarecare $n-1$ ($n \geq 3$).

Considerăm o matrice semidescompusă de ordinul $r+s=n$:

$$\widetilde{A} = (\alpha_{ij}) = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Pentru $r = 1$ ($r$ – ordinul blocului $A_{11}$), formula (5.7) este adevărată, deoarece conform consecinţei teoremei 5.3, avem

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot |\overline{A}_{22}|.$$

Dacă $r > 1$, atunci scriind dezvoltarea determinantului $|\widetilde{A}|$ după elementele primei linii cu ajutorul minorilor, adică aplicând formula (5.2) din p. 5.2, obţinem

$$|\widetilde{A}| = (-1)^{1+1}\alpha_{11}|\widetilde{A}_1^1| + (-1)^{1+2}\alpha_{12}|\widetilde{A}_1^2| + \ldots + (-1)^{1+r}\alpha_{1r}|\widetilde{A}_1^r|,$$

unde $\widetilde{A}_1^k$ – matrice pătratică de ordinul $n-1$, care se obţine din matricea $\widetilde{A}$ suprimând în ea linia 1 şi coloana $k$ (aici prin $|\widetilde{A}_1^k|$ este notat minorul $M_{1k}$ al elementului $\alpha_{1k}$ al matricei $\widetilde{A}$).

Uşor se observă că în acest caz toate matricele $\widetilde{A}_1^k$ ($1 \leq k \leq r$) sunt semidescompuse şi de aceea, în virtutea admiterii inducţiei, determinantul fiecăreia dintre ele este egal cu produsul determinanţilor blocurilor de pe diagonala principală, adică

$$|\widetilde{A}_1^k| = |(\overline{A}_{11})_1^k| \cdot |\overline{A}_{22}|,$$

unde $|(\overline{A}_{11})_1^k|$ – minorul elementului $\alpha_{1k}$ al matricei (blocului) $\overline{A}_{11}$ de ordinul $r$ ($k = 1, 2, \ldots, r$). Prin urmare,

$$|\widetilde{A}| = (-1)^{1+1}\alpha_{11}|(\overline{A}_{11})_1^1| \cdot |\overline{A}_{22}| + \ldots +$$

$$+(-1)^{1+r}\alpha_{1r}|(\overline{A}_{11})_1^r| \cdot |\overline{A}_{22}| = ((-1)^{1+1}\alpha_{11}|(\overline{A}_{11})_1^1| + \ldots +$$

$$+(-1)^{1+r}\alpha_{1r}|(\overline{A}_{11})_1^r|) \cdot |\overline{A}_{22}| = |\overline{A}_{11}| \cdot |\overline{A}_{22}|,$$

adică am dedus formula (5.7).

b) Fie acum $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ două matrice pătratice oarecare de ordinul arbitrar $n$, iar $C = (c_{ij}) = AB$ – produsul acestor matrice. În baza definiţiei produsului a două matrice, matricea $C$ este pătratică de acelaşi ordin $n$.

Fie $0$ matricea pătratică nulă de ordinul $n$, iar $(-1)E$ – următoarea matrice pătratică de ordinul $n$:

$$(-1)E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

În baza consecinţei teoremei lui Laplace, determinantul matricei $(-1)E$ este egal cu numărul $(-1)^n$.

Considerăm următoarele două matrice pătratice de ordinul $2n$, scrise sub formă de matrice-bloc:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ (-1)E & B \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{bmatrix} A & C \\ (-1)E & 0 \end{bmatrix}.$$

Prima matrice, evident, este semidescompusă. Determinantul ei, conform formulei (5.7), este

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ (-1)E & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

În determinantul de ordinul $2n$ al celei de a doua matrice, adică în $\begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & 0 \end{vmatrix}$, schimbăm între ele locurile liniilor: 1 şi a $(n+1)$-a, a 2-a şi a $(n+2)$-a, ..., a $n$-a şi a $2n$-a. Ca rezultat, obţinem determinantul $\begin{vmatrix} (-1)E & 0 \\ A & C \end{vmatrix}$ care, evident, este determinantul unei matrice semidescompuse. În baza proprietăţii 2° a determinanţilor şi a formulei (5.7), avem egalităţile:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} (-1)E & 0 \\ A & C \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n |(-1)E| \cdot |C| = (-1)^{2n} |C| = |C|.$$

Aşadar, este suficient de demonstrat că sunt egali determinanţii

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ (-1)E & B \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} A & C \\ (-1)E & 0 \end{vmatrix}.$$

Detaliat aceşti doi determinanţi pot fi scrişi astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.8}$$

şi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Considerăm coloanele acestor determinanţi ca vectori de înălţimea $2n$ ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^{2n}$. Pentru a ne convinge de egalitatea acestor doi determinanţi, e suficient de observat că primele $n$ coloane ale acestor determinanţi coincid, iar fiecare coloană a determinantului al doilea (5.8) cu numărul $n+k$ (unde $k = 1, 2, \dots, n$), în virtutea formulei $c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$, se obţine ca rezultat al adăugării la coloana $n+k$ a primului determinant (5.8) al combinaţiei liniare a primelor $n$ coloane ale sale cu coeficienţii egali cu $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}$, respectiv.

În felul acesta, în virtutea proprietăţii 8° a determinanţilor, aceşti determinanţi (5.8) sunt egali. De aici rezultă egalitatea $|A| \cdot |B| = |C|$, adică (5.5). ◁

Exemplu. Pentru $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, avem $AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ şi, după regula triunghiurilor, ne convingem că are loc egalitatea (5.5), ceea ce confirmă şi teorema 5.4.

## 5.6. Calcularea determinanţilor

Pentru a simplifica calcularea determinanţilor de ordinul $n$, este necesar de a aplica proprietăţile determinanţilor.

Exemplul 1. Să se calculeze determinantul de ordinul patru

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

aplicând proprietăţile determinanţilor.

Efectuăm asupra acestui determinant următoarea transformare: la linia a treia adăugăm prima linie. În urma acestei transformări, conform proprietăţii 8°, mărimea determinantului nu se schimbă. Deci obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

În baza consecinţei proprietăţii 9° şi a proprietăţii 4°, putem scrie:

$$\Delta = (-1) \cdot A_{12} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 = -18.$$

Exemplul 2. Să se calculeze determinantul matricei triunghiulare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicând succesiv formula lui Laplace, obţinem

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Aşadar, când toate elementele dintr-o parte a diagonalei principale a unei matrice (sau a unui determinant) de ordinul $n$ sunt egale cu zero, avem

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Exemplul 3. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix},$$

aducându-l la forma triunghiulară.

Adăugând la linia a doua prima linie, iar la linia a treia – prima linie înmulţită cu $(-2)$, obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

În determinantul obţinut, adăugăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu 3, iar la linia a patra – linia a doua înmulţită cu $(-4)$. Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

În ultimul determinant, adăugând la linia a patra linia a treia înmulţită cu 3, obţinem

$$\Delta = 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

În felul acesta, determinantul este adus la forma triunghiulară. Deci

$$\Delta = 24 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 24.$$

Exemplul 4. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 1 & 1,5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

La coloanele întâi şi a patra adăugăm coloana a treia, iar la coloana a doua adăugăm coloana a treia înmulţită cu 2. Obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2,5 & 1 & 2,5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând acest determinant după elementele liniei a patra, obţinem

$$\Delta = (-1)A_{43} = (-1) \cdot (-1)^{4+3} M_{43} = M_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 2,5 & 2,5 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

În determinantul obţinut efectuăm următoarele transformări. La linia a doua şi a treia adăugăm linia a patra, iar la linia întâi adăugăm linia a patra înmulţită cu 3. Găsim

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & -0,5 & -0,5 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând acest determinant după elementele coloanei a patra, avem

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 11 & -0,5 & -0,5 \\ 6 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Adăugăm, în sfârşit, la coloana a doua coloana a treia, iar la coloana întâi adăugăm coloana a treia înmulţită cu 3. Obţinem:

$$\Delta = (-1)\begin{vmatrix} 9,5 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 19 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând acest determinant după elementele liniei a doua, găsim:

$$\Delta = (-1)\cdot(-2)A_{23} = 2\cdot(-1)^{2+3}M_{23} = -2M_{23} =$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 9,5 & -1 \\ 19 & 9 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 104,5 = -209.$$

## 5.7. Calcularea inversei unei matrice pătratice nedegenerate cu ajutorul matricei adjuncte

O matrice pătratică $A$ se numeşte *nedegenerată* (sau *nesingulară*) dacă determinantul său este nenul: $|A| \neq 0$. În cazul în care $|A| = 0$, matricea $A$ se numeşte *degenerată* (sau *singulară*).

Reamintim ca matricea $A^{-1}$ se numeşte *inversa* matricei pătratice $A$ dacă sunt satisfăcute relaţiile

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{5.1}$$

unde $E$ – matricea unitate de acelaşi ordin cu $A$.

**T e o r e m a 5.5.** *Pentru ca o matrice pătratică $A$ să posede matricea inversă este necesar şi suficient ca această matrice să fie nedegenerată.*

▷ *Necesitatea.* Fie că pentru $A$ există matricea inversă $A^{-1}$. Atunci din relaţia (5.1), conform teoremei 5.4, rezultă

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|, \quad \text{adică} \quad |A| \neq 0.$$

*Suficienţa.* Fie $|A| \neq 0$, unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstrăm că în acest caz există matricea inversă $A^{-1}$. Definim mai întâi o matrice ajutătoare. Considerăm o matrice pătratică arbitrară $A = (a_{ij})$ de ordinul $n$. Scriem matricea compusă din complementele algebrice ale elementelor respective ale matricei $A$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Transpunând această matrice, obţinem matricea ce se notează cu simbolul $A^{\mathrm{a}}$ şi se numeşte *matricea adjunctă* a matricei pătratice $A$:

$$A^{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Înmulţind matricele $A$ şi $A^{\mathrm{a}}$, în virtutea teoremei despre dezvoltarea determinantului după o linie (sau o coloană) şi a teoremei anulării (proprietăţile 9° şi 10° ale determinanţilor), obţinem

$$AA^{\mathrm{a}} = A^{\mathrm{a}}A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= |A| \cdot E,$$

unde $E$ este matricea unitate de acelaşi ordin cu $A$.

Dacă $A$ este o matrice nedegenerată, adică $|A| \neq 0$, atunci înmulţind aceste egalităţi cu $\dfrac{1}{|A|}$, în baza proprietăţilor operaţiei înmulţirii matricelor, se obţine:

$$\frac{1}{|A|}(AA^{\mathrm{a}}) = \frac{1}{|A|}(A^{\mathrm{a}}A) = E, \quad A(\frac{1}{|A|}A^{\mathrm{a}}) = (\frac{1}{|A|}A^{\mathrm{a}})A = E.$$

Din ultimele egalităţi, conform relaţiilor (5.1), rezultă că $A^{-1}$ există şi totodată are următoarea formă vădită:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{\mathrm{a}}. \qquad \triangleleft \tag{5.2}$$

Consecinţă. *Are loc formula*

$$|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}.$$

▷ Rezultă din egalităţile: $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$. ◁

Din formula (5.2) rezultă următoarea *regulă* de calculare a matricei inverse: *pentru a calcula inversa $A^{-1}$ a unei matrice pătratice nedegenerate $A$, trebuie de compus matricea adjunctă $A^{a}$ a matricei $A$, iar apoi fiecare element al ei de împărţit la $|A|$.*

Exemplu. Să se afle $A^{-1}$, dacă

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Evident, $|A| = -3$. Calculăm complementele algebrice ale elementelor respective:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci matricea adjunctă are forma

$$A^{a} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{a} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prin verificare stabilim că $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Menţionăm că pentru ordine mari $n$, calcularea matricei inverse $A^{-1}$ cu ajutorul formulei (5.2) este dificilă, de aceea, de regulă, în practică se aplică metode eficiente de calculare a matricei inverse. Matricea inversă $A^{-1}$ poate fi calculată, de exemplu, prin metoda eliminării complete (metoda Jordan-Gauss).

## Exerciţii

**1.** Să se calculeze următorii determinanţi de ordinul doi:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -13 & 0 \end{vmatrix}$,

4. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, 5. $\begin{vmatrix} \sin\alpha^2 & \sin\alpha^2 \\ \cos\alpha^2 & \cos\alpha^2 \end{vmatrix}$,

6. $\begin{vmatrix} a-b & b^2 \\ -1 & ab \end{vmatrix}$, 7. $\begin{vmatrix} ab & a^2 \\ -b & (a-b)^2 \end{vmatrix}$.

**2.** Să se calculeze, după definiţie, determinanţii de ordinul trei:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 9 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} a & 3 & 5 \\ 0 & b & 2 \\ c & 3 & 0 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} a-x & x & -x \\ x & b-x & x \\ -x & x & c-x \end{vmatrix}$.

**3.** Dezvoltând determinantul după linia a treia, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

**4.** Dezvoltând determinantul după coloana a doua, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

**5.** Considerăm matricea

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Să se afle minorii şi complementii algebrici:

1) ai elementelor primei linii;

2) ai elementelor liniei a doua a acestei matrice.

**6.** Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 2 \\ 3 & b & 4 & 1 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ -1 & 1 & 2 & d \end{vmatrix}$

conform definiţiei.

**7.** Să se calculeze determinanţii aplicând proprietăţile lor:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & -7 & 6 \\ 2 & -3 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}$.

**8.** Se dau matricele

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Să se verifice egalitatea

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

**9.** Să se calculeze matricea inversă $A^{-1}$ cu ajutorul matricei adjuncte, dacă

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

CAPITOLUL 6

# Rangul unei matrice

## 6.1. Noţiunea de rang al unei matrice

### 6.1.1. Rangurile sistemelor de linii şi de coloane ale unei matrice

Să examinăm o matrice arbitrară de tipul (forma) $m \times n$ cu elemente numere reale,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Vom considera liniile matricei $A$ în (6.1) ca vectori de lungimea $n$ ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ şi îi vom nota prin $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$, iar coloanele ei – ca vectori de înălţimea $m$ ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^m$ şi vom folosi pentru ei notaţiile

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})', \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Pentru sistemul de vectori-linie $A_1, A_2, \dots, A_m$ ai matricei $A$, există un subsistem care constă din numărul maxim de vectori-linie liniar independenţi ai acestei matrice – baza sistemului de vectori-linie ai matricei $A$. În mod analog, pentru sistemul de vectori-coloană

$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$ ai matricei $A$, există subsistemul care constă din numărul maxim de vectori-coloană liniar independenţi ai acestei matrice – baza sistemului de vectori-coloană ai matricei $A$.

Exemplu. Considerăm matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Liniile $A_1, A_2$ ale matricei $A$ formează un subsistem al sistemului de linii ale acestei matrice, care constă din numărul maxim 2 de linii liniar independente ale matricei. Aceeaşi afirmaţie o avem şi despre coloanele respective ale acestei matrice.

▷ Într-adevăr, liniile $A_1, A_2$ sunt liniar independente, deoarece au loc relaţiile:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{şi}$$

$$2A_1 - 3A_2 + A_3 = 0 \Leftrightarrow A_3 = -2A_1 + 3A_2.$$

Pentru sistemul de coloane ale acestei matrice, avem că coloanele $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ sunt liniar independente, iar $A^{(3)}$ şi $A^{(4)}$ se exprimă liniar prin primele, deoarece

$$\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{şi}$$

$$A^{(3)} = A^{(1)}, \quad A^{(4)} = \frac{1}{2}A^{(1)} + \frac{5}{4}A^{(2)}. \; \triangleleft$$

**Definiţie.** Numărul maxim de vectori-linie liniar independenţi ai unei matrice $A$ se numeşte *rangul sistemului de linii* ale matricei $A$, sau *rangul matricei* $A$, şi se notează prin $r(A)$.

În mod analog se introduce *rangul sistemului de coloane* ale matricei $A$: ca numărul maxim de vectori-coloană ai lui $A$, liniar independenţi.

Rangul matricei este o caracteristică importantă a matricei.

**Teorema 6.1.** *Fie $A$ o matrice oarecare. Rangurile sistemelor de linii şi de coloane ale matricei $A$ nu se schimbă dacă asupra lui $A$ se va efectua oricare dintre următoarele transformări:*

a) *permutarea între ele a două linii oarecare ale matricei $A$;*

b) *permutarea între ele a două coloane oarecare ale matricei $A$;*

c) *adăugarea la elementele unei linii a matricei $A$ a elementelor corespunzătoare ale altei linii înmulţite cu un număr arbitrar $\alpha$;*

d) *adăugarea la elementele unei coloane a matricei $A$ a elementelor corespunzătoare ale altei coloane înmulţite cu un număr arbitrar $\alpha$.*

▷ Notăm rangurile sistemelor de linii şi de coloane ale matricei $A = (a_{ij})$ de forma $m \times n$, respectiv, prin $r_1(A)$ şi $r_2(A)$. Considerăm liniile de lungimea $n$ ale matricei $A$ ca vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ şi notăm consecutivitatea de vectori-linie ai acestei matrice, respectiv, prin $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Coloanele de înălţimea $m$ ale matricei $A$ le considerăm ca vectori ai spaţiului $\mathbf{R}^m$ şi notăm consecutivitatea de vectori-coloană ai matricei, respectiv, prin $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$.

1) Să demonstrăm invariabilitatea rangului $r_1(A)$ al sistemului de linii ale matricei $A$ la transformările a) şi c).

Fie că asupra matricei $A$ se efectuează o transformare de tipul a), adică se permută între ele oarecare două linii, spre exemplu liniile $i$ şi $k$. Ca rezultat obţinem o matrice nouă $B = (b_{ij})$ de forma $m \times n$.

Matricea $A$ constă din vectorii-linie

$$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_m, \tag{6.2}$$

iar matricea $B$ din vectorii-linie

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_i, \ldots, A_m, \tag{6.3}$$

unde $i, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Dacă $r_1(A) = p$ este rangul sistemului de linii ale matricei $A$, iar $r_1(B)$ – rangul sistemului de linii ale matricei $B$, atunci numărul maxim de vectori liniar independenţi în sistemul (6.2) este egal cu $r_1(A)$, iar în sistemul (6.3) – $r_1(B)$.

Întrucât, evident, sistemele (6.2) şi (6.3) constau din aceiaşi vectori, bazele lor sunt comune şi ele toate, după cum se ştie, constau din unul şi acelaşi număr maxim $p$ de vectori liniar independenţi. De aceea $r_1(B) = r_1(A)$.

Efectuăm acum asupra matricei $A$ o transformare de tipul c), adică la elementele liniei $i$ ale acestei matrice adăugăm elementele corespunzătoare ale liniei $k$ înmulţite cu un număr arbitrar $\alpha$. Ca rezultat obţinem o matrice nouă $B$.

Este clar că liniile matricei $A$ formează un sistem de vectori-linie

$$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_k, \ldots, A_m, \tag{6.4}$$

iar liniile matricei $B$ se reprezintă prin vectorii-linie

$$A_1, A_2, \ldots, A_i + \alpha A_k, \ldots, A_k, \ldots, A_m. \tag{6.5}$$

Fiecare dintre vectorii unuia dintre aceste sisteme, evident, se exprimă liniar prin vectorii celuilalt. Prin urmare, aceste sisteme de vectori sunt echivalente.

Dacă rangul sistemului de linii ale matricei $A$ este numărul $r_1(A)$, atunci aceasta înseamnă că în $A$ există un oarecare sistem ce constă din numărul maxim $r_1(A)$ de vectori-linie liniar independenţi, ceea ce, la rândul său, înseamnă că sistemul are baza din $r_1(A)$ vectori. În mod analog, dacă $r_1(B)$ este rangul sistemului de linii ale matricei $B$, atunci sistemul (6.5) are baza ce constă din $r_1(B)$ vectori. Dar atunci, deoarece sistemele (6.4) şi (6.5) sunt echivalente, după cum se ştie, toate bazele fiecăruia dintre ele constau din unul şi acelaşi număr maxim de vectori liniar independenţi. De aici rezultă că $r_1(A) = r_1(B)$.

2) Să demonstrăm invariabilitatea rangului $r_2(A)$ al sistemului de coloane ale matricei $A$ la transformările de tipul a) şi c).

Fie $B^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – coloanele matricei $B = (b_{ij})$ obţinute din matricea $A$ în urma transformărilor de tipul a) sau c). Trebuie să demonstrăm că

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B^{(j)} = 0.$$

Atunci fiecărui sistem de coloane ale unei matrice, liniar independent, inclusiv şi celui format din numărul maxim de vectori-coloană liniari independenţi, îi va corespunde sistemul de coloane ale celeilalte matrice, liniar independent, cu aceleaşi numere de ordine, fapt prin care se stabileşte egalitatea $r_2(A) = r_2(B)$. Încă mai observăm că transformările indicate sunt reversibile, adică matricea $B$ obţinută din matricea $A$ cu ajutorul unei transformări trece din nou în $A$ prin aplicarea unei transformări elementare, iarăşi de acelaşi tip. Prin urmare, în virtutea reversibilităţii transformărilor date, este suficient de a demonstra

implicaţia numai într-o singură parte. Fie, de exemplu, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^{(j)} = 0$. Aceasta înseamnă că $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ este soluţie a ecuaţiei vectoriale $x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \ldots + x_n A^{(n)} = 0$, care are următorul aspect concret

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

şi reprezintă sistemul omogen de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

adică (6.6)$\Leftrightarrow$(6.7). După teorema 2.1, această soluţie va fi de asemenea soluţie şi a sistemului omogen (6.7)$'$ obţinut din sistemul (6.7) cu ajutorul transformărilor de tipul a) sau c) a ecuaţiilor respective şi care are ca matrice a sistemului tocmai matricea $B$ (scrierea pe larg a sistemului (6.7)$'$ o omitem). Deoarece sistemul (6.7)$'$ poate fi scris condensat sub forma $\sum_{j=1}^{n} x_j B^{(j)} = 0$, ajungem la relaţia $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j B^{(j)} = 0$.

Aşadar, am demonstrat că rangurile $r_1(A)$ şi $r_2(A)$, respectiv, ale sistemelor de linii şi de coloane ale unei matrice $A$ nu se schimbă (fiecare în parte) la transformările de tipul a) şi c) indicate în teoremă.

Printr-un raţionament analog celui pentru transformările a) şi c) se arată că rangurile $r_1(A)$ şi $r_2(A)$ de asemenea nu se schimbă (fiecare în parte) la transformările de tipul b) şi d). $\triangleleft$

### 6.1.2. Transformări elementare ale matricei

Transformările de tipul a), b), c), d) din teorema 6.1 se numesc *transformări elementare* ale matricei. *Elementară* se numeşte, de asemenea, şi următoarea transformare: e) – înmulţirea tuturor elementelor unei linii sau coloane a matricei cu un număr arbitrar $\alpha$, ne egal cu zero ($\alpha \neq 0$).

**T e o r e m a 6.2.** *Transformarea* e) *de asemenea nu schimbă cele două ranguri ale sistemelor de linii şi de coloane ale matricei* $A$.

Această teoremă poate fi demonstrată printr-un raţionament analog demonstraţiei teoremei 6.1.

**Teorema 6.3** (despre rangul unei matrice). *Rangul sistemului de linii ale unei matrice $A$ este egal cu rangul sistemului de coloane ale acestei matrice.*

▷ Notăm rangurile sistemelor de linii şi de coloane ale matricei $A$, respectiv, prin $r_1$ şi $r_2$.

Adevărul afirmaţiei este evident dacă toate elementele matricei $A$ sunt egale cu zero. În acest caz, $r_1 = r_2 = 0$ şi $r(A) = 0$. De aceea presupunem că $A = (a_{ij})$ conţine cel puţin un element nenul $a_{ij} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, atunci permutând liniile 1 şi $i$, apoi coloanele 1 şi $j$ ale matricei $A$, obţinem o matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

la care $\alpha_{11} = a_{ij} \neq 0$ $(i \geq 1, j \geq 1)$. Totodată, în virtutea teotemei 6.1, două ranguri ale matricei $A_1$ sunt egale cu rangurile corespunzătoare ale matricei $A$. Dacă $a_{11} \neq 0$, atunci considerăm că $a_{11} = a_{ij} \neq 0$ pentru $i = 1$, $j = 1$ şi în calitate de matrice $A_1$ considerăm însăşi matricea $A$.

Acum, adăugând succesiv la liniile $2, \ldots, m$ ale matricei $A_1$ prima linie a ei înmulţită, respectiv, cu $-\alpha_{21}\alpha_{11}^{-1}, \ldots, -\alpha_{m1}\alpha_{11}^{-1}$, obţinem matricea de forma

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix}.$$

Două ranguri ale matricei $A_2$ vor fi aceleaşi ca la matricea $A$. Dacă toate elementele $\beta_{ij}$ sunt egale cu zero, atunci transformarea o considerăm terminată. Dacă însă dispunem de un $\beta_{ij} \neq 0$ $(i \geq 2, j \geq 2)$, atunci permutând liniile 2 şi $i$, coloanele 2 şi $j$ ale matricei $A_2$, obţinem matricea

$$A_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ 0 & \gamma_{32} & \cdots & \gamma_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{bmatrix},$$

la care $\gamma_{22} = \beta_{ij} \neq 0$. Totodată, iarăşi două ranguri ale matricei $A_3$ sunt egale cu rangurile corespunzătoare ale matricei $A$.

Adăugând apoi la liniile $3, \ldots, m$ linia a doua înmulţită, respectiv, cu $-\gamma_{32}\gamma_{22}^{-1}, \ldots, -\gamma_{m2}\gamma_{22}^{-1}$, obţinem matricea de forma

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

la care $b_{11}b_{22} \neq 0$. Rangurile matricei $B$ din nou coincid cu rangurile corespunzătoare ale matricei $A$.

Continuând procesul mai departe, peste $r$ paşi de tipul $A \to A_2$ ajungem la matricea de forma

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

la care $c_{11}c_{22}\ldots c_{rr} \neq 0$, unde $r$ – un număr natural ($r \leq m$).
Rangurile matricei $C$ de asemenea vor coincide cu rangurile corespunzătoare ale matricei $A$.

Numărul de linii nenule ale matricei $C$ este egal cu numărul $r$ de elemente diagonale nenule $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{rr}$ ale matricei $C$, adică a elementelor care, în cazul matricei pătratice, sunt situate pe diagonala principală a acestei matrice.

Să arătăm că rangul sistemului de linii ale matricei $C$ este egal cu $r$. Pentru aceasta vom arăta mai întâi că primele $r$ linii, adică toate liniile nenule ale matricei $C$, sunt liniar independente.

Într-adevăr, dacă pentru vectorii-linie

$$\begin{aligned} C_1 &= (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}), \\ C_2 &= (0, c_{22}, \ldots, c_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_r &= (0, 0, \ldots, 0, c_{rr}, \ldots, c_{rn}) \end{aligned}$$

şi $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ vom presupune că are loc

relaţia

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_r C_r = 0,$$

atunci, în baza definiţiei operaţiilor adunării şi înmulţirii cu un număr a vectorilor în $\mathbf{R}^n$, această egalitate vectorială este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{11} = 0, \\ \alpha_1 c_{12} + \alpha_2 c_{22} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 c_{1r} + \alpha_2 c_{2r} + \ldots + \alpha_r c_{rr} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 c_{1n} + \alpha_2 c_{2n} + \ldots + \alpha_r c_{rn} = 0. \end{cases}$$

Deoarece pentru $i \leq r$, toţi $c_{ii} \neq 0$, aflăm că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Aceasta înseamnă că primele $r$ linii ale matricei $C$ sunt liniar independente.

Oricare $r + 1$ linii ale matricei $C$ vor fi deja liniar dependente, deoarece între ele sunt numaidecât linii nule. De aici, după cum se ştie, rezultă că numărul maxim de linii liniar independente în matricea $C$ este egal cu $r$. Prin urmare, rangul sistemului de linii ale matricei $C$ şi deci şi al matricei $A$ este egal cu $r$, adică $r_1 = r$.

Să demonstrăm că rangul sistemului de coloane ale matricei $A$ este egal cu $r$. Pentru aceasta, mai întâi vom arăta că primele $r$ coloane ale matricei $C$ sunt liniar independente. Vom considera coloanele de înălţimea $m$ ale matricei $C$ ca vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^m$. Dacă pentru vectorii-coloană

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; C^{(2)} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, C^{(r)} = \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

vom cere respectarea egalităţii

$$\alpha_1 C^{(1)} + \alpha_2 C^{(2)} + \ldots + \alpha_r C^{(r)} = 0,$$

atunci această egalitate vectorială este echivalentă cu sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \ldots + \alpha_r c_{1r} = 0, \\ \alpha_2 c_{22} + \ldots + \alpha_r c_{2r} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_r c_{rr} = 0, \end{cases}$$

de unde, având în vedere că $c_{ii} \neq 0$, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$. Prin urmare, primele $r$ coloane, supuse studierii, ale matricei $C$ sunt liniar independente. Aceasta înseamnă că $r_2 \geq r$.

Pe de altă parte, toţi vectorii-coloană de înălţimea $m$, în care ultimele $m - r$ componente sunt egale cu zero, formează un subspaţiu $L$ al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^m$. Dimensiunea acestui subspaţiu, după cum se ştie, este egală cu $r$. Toate coloanele matricei $C$ sunt vectori ai acestui subspaţiu $L$. Întrucât numărul oricărui sistem de vectori liniar independenţi nu poate fi mai mare ca dimensiunea spaţiului, rezultă că $r_2 \leq r$. Comparaţia a două inegalităţi arată că $r_2 = r$.

Aşadar, $r_1 = r_2 = r$. ◁

Din definiţia rangului sistemului de linii şi de coloane ale matricei $A$ rezultă că teorema 6.3 poate fi formulată şi astfel: *numărul maxim de linii liniar independente ale unei matrice $A$ este egal cu numărul maxim de coloane liniar independente ale matricei $A$.* Acest număr este, prin definiţie, *rangul matricei.* Cu alte cuvinte: *rangul matricei este numărul egal cu rangul sistemului de vectori-linie (sau vectori-coloană) ai acestei matrice.*

Din teoremele 6.1–6.3 şi din definiţiile de mai sus rezultă că sunt adevărate următoarele afirmaţii.

C o n s e c i n ţ a 1. *Transformările elementare ale matricei nu schimbă rangul ei.*

Următoarele două transformări:

1) *transpunerea matricei şi*

2) *suprimarea (sau adăugarea) la matricea dată a unei linii sau coloane toate elementele căreia sunt egale cu zero*

de asemenea nu schimbă rangul matricei.

▷ Adevărul afirmaţiei la transformarea 2) este evident, iar pentru transformarea 1) rezultă din definiţia matricei transpuse $A'$ în raport cu $A$ şi din definiţia rangului matricei. ◁

Considerând liniile $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ale matricei $A$ de dimensiunea $m \times n$ ca vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ (în virtutea teoremei cunoscute că orice subsistem care constă din numărul maxim de $r$ vectori liniar independenţi ai unui sistem de vectori este bază pentru acest sistem de vectori), conchidem că *orice sistem care constă dintr-un număr maxim de linii (sau coloane) liniar independente ale matricei $A$ formează o bază a sistemului de linii (respectiv coloane) ale acestei matrice.*

Liniile bazei sistemului de linii ale matricei $A$ le vom numi *linii bazice*, iar coloanele bazei sistemului de coloane – *coloane bazice.*

Consecinţa 2. *Liniile (sau coloanele) bazice sunt liniar independente. Orice linie (sau coloană) a matricei $A$ este o combinaţie liniară ale liniilor (respectiv coloanelor) bazice.*

Consecinţa 3. *Rangul $r(A)$ al matricei $A$ îl putem defini ca numărul $r$ al sistemului de linii bazice sau coloane bazice ale acestei matrice.*

Matricea $A$, în cazul general, poate avea mai multe sisteme de linii bazice (sau coloane bazice). Toate aceste sisteme, fiind baze ale sistemului de linii (sau coloane) ale matricei $A$, constau din unul şi acelaşi număr maxim de linii (sau coloane) liniar independente ale acestei matrice.

## 6.2. Calcularea rangului unei matrice

Fie că trebuie calculat rangul matricei $A$. Pentru aceasta, cu ajutorul transformărilor elementare, matricea $A$ se transformă în matricea $B$, rangul căreia uşor poate fi aflat. Dacă $r(A) = r(B)$, atunci vom scrie $A \sim B$ şi vom spune că matricele $A$ şi $B$ sunt *echivalente.*

Rangul matricei $A$, de obicei, se calculează eficient prin metoda descrisă în procesul demonstraţiei teoremei 6.3, care se numeşte *metoda aducerii matricei la forma de trepte* (sau *cu aspect de trapez*).

Pentru a calcula prin această metodă rangul matricei

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

cu ajutorul unui şir de transformări elementare, o aducem la o matrice de forma:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci rangul matricei $B$ coincide cu numărul $r$ de elemente diagonale nenule $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ ale acestei matrice. Prin urmare, avem $A \sim B$ şi $r(A) = r(B) = r$.

Exemplul 1. Să se calculeze rangul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Elementul $a_{21} = 2 \neq 0$. Permutăm liniile 1 şi 2. Obţinem matricea

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad A \sim A_1.$$

Adăugăm la linia a treia a matricei $A_1$ prima linie înmulţită cu $-4 \cdot 2^{-1} = -2$.

Ca rezultat avem matricea

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A \sim A_2.$$

Elementul ei $a'_{22} = 1 \neq 0$. Adăugăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu numărul $-(-3) \cdot 1^{-1} = 3$. Găsim matricea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A \sim B.$$

Evident, rangul acestei matrice este egal cu 2. Prin urmare, rangul matricei iniţiale $A$ de asemenea este egal cu doi: $r(A) = r(B) = 2$.

Exemplul 2. Să se afle rangul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = r(B) = 4.$$

Dacă $A$ este o matrice pătratică de ordinul $n$ şi rangul ei este egal cu $r$, atunci diferenţa $n - r$ dintre ordinul şi rangul ei se numeşte *defectul matricei A*.

Exemplul 3. Să se afle rangul şi defectul matricei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -9 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A) = r(B) = r = 3,$$

iar $n - r = 5 - 3 = 2$.

Rangul matricei $A$ este egal cu 3, iar defectul matricei $A$ este egal cu 2.

## 6.3. Condiţiile ca un determinant să fie nul

Să demonstrăm următoarea teoremă importantă.

**Teorema 6.4.** *Ca determinantul unei matrice pătratice $A$ de ordinul $n$ să fie egal cu zero, este necesar şi suficient ca liniile (coloanele) ei să fie liniar dependente.*

▷ În baza proprietăţii 1° a determinanţilor (p. 5.5, cap. 5), teorema, fiind demonstrată pentru linii, va fi adevărată şi pentru coloane.

*Necesitatea.* Fie $|A| = 0$. Să demonstrăm că liniile matricei $A$ în acest caz sunt liniar dependente. Transformând matricea $A$ prin metoda aducerii ei la forma de trepte, obţinem o matrice de formă triunghiulară:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

unde ultimele dintre elementele diagonale $b_{ii}$, începând cu un anumit $i > r$ $(r \leq n)$, pot fi nule.

Transformările de tipul c), d), în virtutea proprietăţilor 1° şi 8° ale determinanţilor, nu schimbă mărimea determinantului. Transformările de tipul a), b), e), conform proprietăţilor 1°, 2°, 4° ale

determinanţilor, sau schimbă semnul determinantului, sau îl înmulţesc cu un număr $\alpha \neq 0$. De aici rezultă că $|B| = k|A|$, unde $k \neq 0$, adică $|B| = b_{11}b_{22}\ldots b_{nn} = 0$ (a se vedea exemplul 2 din p. 5.6, cap. 5). Aceasta înseamnă că cel puţin unul dintre elementele $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ este egal cu zero, ceea ce este echivalent cu relaţia $r(B) = r(A) < n$. De aici şi din definiţia rangului matricei rezultă dependenţa liniară a liniilor (respectiv coloanelor) matricei $A$.

*Suficienţa.* Fie că liniile matricei $A$ sunt liniar dependente. Aceasta înseamnă că una dintre ele este o combinaţie liniară a celorlalte linii. Atunci, în baza proprietăţii 11° a determinanţilor, avem că $|A| = 0$. ◁

Consecinţa 1. *Ca determinantul unei matrice pătratice $A$ de ordinul $n$ să fie nul, este necesar şi suficient ca rangul ei să fie mai mic ca $n$, adică*

$$(|A| = 0) \Leftrightarrow (r(A) < n).$$

Consecinţa 2. *Ca determinantul unei matrice pătratice $A$ de ordinul $n$ să fie nenul, este necesar şi suficient ca liniile (coloanele) ei să fie liniar independente, adică*

$$(|A| \neq 0) \Leftrightarrow (r(A) = n).$$

Consecinţa 3. *Ca vectorii $A_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $A_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ din spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ să fie liniar dependenţi (liniar independenţi), este necesar şi suficient ca determinantul matricei $A$, ale cărei linii sau coloane sunt aceşti vectori, să fie egal cu zero (respectiv diferit de zero).*

Exemplu. Să se determine dacă vectorii $A_1 = (5, 2, 7, 4)$, $A_2 = (-1, 0, 0, 3)$, $A_3 = (1, 0, 2, 0)$, $A_4 = (0, 0, 1, 2)$ sunt liniar dependenţi sau liniar independenţi.

Compunem matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

În baza consecinţei teoremei 5.3, avem

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)(-1) = 2 \neq 0.$$

Prin urmare, vectorii $A_1, A_2, A_3, A_4$ sunt liniar independenţi.

## Exerciţii

**1.** Să se afle rangul matricei

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

**2.** Să se clarifice dacă vectorii următori sunt liniar dependenţi:

a) $A_1 = (1,3,5)$, $A_2 = (4,-1,3)$, $A_3 = (7,-5,1)$;

b) $A_1 = (1,3,5,0)$, $A_2 = (1,2,4,1)$, $A_3 = (-1,0,0,1)$, $A_4 = (0,2,3,5)$.

**3.** Să se demonstreze teorema: rangul produsului $AB$ a două matrice $A$ şi $B$ nu întrece nici rangul matricei $A$, nici rangul matricei $B$, adică

$$r(AB) \leq r(A) \quad \text{şi} \quad r(AB) \leq r(B).$$

*Indicaţie:* Să se demonstreze, în prealabil, că liniile matricei $AB$ (considerate ca vectori-linie) pot fi reprezentate ca combinaţii liniare ale liniilor matricei $B$, iar coloanele matricei $AB$ – ca combinaţii liniare ale coloanelor matricei $A$. Ulterior să se aplice teoremele 3.1, 3.8, 6.3.

**4.** Dacă $A$ este o matrice dreptunghiulară de tipul $m \times n$, iar $B$ şi $C$ – matrice pătratice nedegenerate de ordinul $n$ şi $m$, respectiv, atunci

$$r(AB) = r(A) \quad \text{şi} \quad r(CA) = r(A).$$

*Indicaţie:* Să se arate, în prealabil, că au loc relaţiile:

$$r(AB) \leq r(A) = r(A(BB^{-1})) = r((AB)B^{-1}) \leq r(AB).$$

CAPITOLUL 7

# Sisteme de ecuaţii liniare (teoria generală)

## 7.1. Condiţiile de compatibilitate a unui sistem de ecuaţii liniare

Să revenim la ecuaţii (a se vedea p. 2.1 – 2.4, cap. 2). Vom studia un sistem arbitrar de $m$ ecuaţii liniare algebrice cu $n$ necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7.1}$$

unde $a_{ij}$ – coeficienţii necunoscutelor, iar $b_i$ – termenii liberi ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Coeficienţii $a_{ij}$ şi termenii liberi $b_i$ ai ecuaţiilor (7.1) îi aranjăm în mod firesc în două matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

numite, respectiv, *matricea coeficienţilor sistemului* (sau *matricea sistemului*) şi *matricea extinsă* a sistemului.

Fiecărei ecuaţii a sistemului (7.1) îi corespunde o anumită linie în matricele $A$ şi $[A|B]$ şi reciproc. Permutarea ecuaţiilor în sistemul (7.1)

implică permutarea liniilor matricelor $A$ şi $[A|B]$, iar renumerotarea necunoscutelor duce la permutarea coloanelor în aceste matrice.

Se spune că o ecuaţie $i$ a sistemului (7.1) depinde liniar de ecuaţiile $i_1, \ldots, i_s$ ale acestui sistem dacă linia $i$ a matricei $[A|B]$ este combinaţie liniară a liniilor $i_1, \ldots, i_s$.

Se numeşte *soluţie* a sistemului (7.1) un ansamblu ordonat de numere $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ care, fiind substituite în ecuaţiile sistemului (7.1) în locul necunoscutelor respective $x_1, x_2, \ldots, x_n$, transformă toate aceste ecuaţii în identităţi.

**Teorema 7.1.** *Dacă linia $i$ a matricei extinse $[A|B]$ este combinaţie liniară a celorlalte linii, atunci suprimând ecuaţia $i$ din sistemul* (7.1), *obţinem un sistem redus de ecuaţii, echivalent cu sistemul iniţial* (7.1).

▷ Într-adevăr, toate ecuaţiile sistemului redus se conţin în sistemul (7.1), de aceea fiecare soluţie a sistemului (7.1) este soluţie şi a sistemului redus. Reciproc, fie linia $i$ a matricei $[A|B]$ egală cu suma liniilor $i_1, \ldots, i_s$, înmulţite corespunzător cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ $(i \neq i_1, \ldots, i_s)$, şi fie valorile $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ o soluţie a sistemului redus de ecuaţii, ce constă din toate ecuaţiile sistemului (7.1), în afară de ecuaţia $i$.

Evident, $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ satisfac ecuaţiile $i_1, \ldots, i_s$ din (7.1), adică le transformă în identităţi. Atunci, înmulţind aceste identităţi la stânga corespunzător cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ şi adunându-le membru cu membru, obţinem egalitatea ce reprezintă ecuaţia $i$, în care în loc de necunoscutele $x_1, \ldots, x_n$ figurează, respectiv, numerele $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Aceasta înseamnă că sistemul de numere $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ este soluţie şi a sistemului (7.1). ◁

Consecinţă. *Dacă rangul matricei extinse $[A|B]$ este egal cu $r$, atunci sistemul de ecuaţii* (7.1) *conţine un subsistem din $r$ ecuaţii liniar independente, echivalent sistemului iniţial* (7.1).

▷ Într-adevăr, întrucât rangul matricei $[A|B]$ este egal cu $r$, sistemul de linii ale matricei $[A|B]$ are o bază din $r$ linii liniar independente prin care se exprimă liniar toate celelalte linii ale acestei matrice. În baza teoremei 7.1, lăsând în sistem numai ecuaţiile corespunzătoare liniilor liniar independente arătate mai sus şi suprimând celelalte ecuaţii, obţinem subsistemul căutat. ◁

Dacă sistemul (7.1) admite (are) cel puţin o soluţie: $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$,

atunci sistemul se numeşte *compatibil.* Dacă sistemul nu are soluţii, el se numeşte *incompatibil.* Sistemul de ecuaţii este numit, de asemenea, *sistem compatibil determinat, compatibil nedeterminat* sau *contradictoriu*, dacă el are, respectiv, o singură soluţie, mai multe soluţii sau nu are soluţii.

*A rezolva un sistem* înseamnă a determina dacă el este compatibil sau nu, iar în cazul compatibilităţii, de a afla toate soluţiile sale, adică soluţia sa generală.

**Teorema 7.2** (teorema Kronecker–Cappelli)[1].

1. (Condiţie de compatibilitate.) *Ca un sistem de ecuaţii liniare* (7.1) *să fie compatibil, este necesar şi suficient ca rangul matricei extinse să fie egal cu rangul matricei sistemului:*
$$r([A|B]) = r(A).$$
2. (Caz de unicitate.) *Dacă rangurile (al matricei sistemului şi al celei extinse) coincid cu numărul necunoscutelor:* $r(A) = r([A|B]) = n$, *atunci sistemul* (7.1) *are o singură soluţie.*
3. (Caz de nedeterminare.) *Dacă rangul comun* $r = r(A) = r([A|B])$ *al matricei sistemului şi al celei extinse este mai mic ca numărul* $n$ *de necunoscute:* $r < n$, *atunci sistemul* (7.1) *are mai mult decât o singură soluţie şi are soluţia generală a sa de forma:*
$$\begin{cases} x_{i_1} = c_{11}x_{j_1} + c_{12}x_{j_2} + \ldots + c_{1,n-r}x_{j_{n-r}} + c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i_r} = c_{r1}x_{j_1} + c_{r2}x_{j_2} + \ldots + c_{r,n-r}x_{j_{n-r}} + c_r, \end{cases} \tag{7.2}$$
*unde* $(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{n-r})$ – *permutarea convenabilă a numerelor* $1, 2, \ldots, n$.

▷ Ne vom mărgini la demonstraţia p. 1. Demonstraţia completă a teoremei poate fi găsită, de exemplu, în [27, pag. 94].

*Necesitatea.* Fie că sistemul (7.1) este compatibil, adică are o anumită soluţie $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Atunci se îndeplinesc următoarele egalităţi
$$\begin{cases} a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ = b_m. \end{cases} \tag{7.3}$$

[1] L. Kronecker (1823–1891) – matematician german; A. Cappelli (1855–1910) – matematician italian.

Considerăm coloanele matricei $[A|B]$ ca vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^m$. Atunci sistemul de egalităţi (7.3) poate fi scris sub următoarea formă vectorială

$$x_1^\circ \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^\circ \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n^\circ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Egalitatea (7.4) înseamnă că ultima coloană a matricei $[A|B]$ este combinaţie liniară a celorlalte coloane ale sale. Această coloană poate fi suprimată, fără a schimba rangul matricei. Astfel, matricea $[A|B]$ va trece în matricea $A$, adică $r([A|B]) = r(A)$.

*Suficienţa.* Fie $r(A) = r([A|B]) = r$. Considerăm $r$ coloane bazice ale matricei $A$, adică totodată şi ale matricei $[A|B]$. Conform condiţiei, ultima coloană a matricei $[A|B]$ este combinaţie liniară a acestor coloane bazice şi, prin urmare, şi a tuturor coloanelor matricei $A$. Aceasta înseamnă că există astfel de numere $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ care satisfac egalitatea (7.4), adică acest ansamblu de numere este o soluţie a sistemului (7.1). Aşadar, sistemul (7.1) este compatibil. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă rangul matricei extinse a sistemului nu este egal cu rangul matricei sistemului:* $r([A|B]) \neq r(A)$, *atunci sistemul liniar nu are soluţii.*

*A cerceta un sistem liniar înseamnă a determina dacă acest sistem este compatibil sau nu, iar în cazul compatibilităţii, de a stabili dacă acest sistem este compatibil determinat sau compatibil nedeterminat.*

E x e m p l u. Să se cerceteze sistemul de ecuaţii liniare şi în caz de compatibilitate să se rezolve acest sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -15, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 25. \end{cases}$$

Aflăm rangurile matricelor $[A|B]$ şi $A$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -15 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 7 & 25 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 20 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow r([A|B]) = r(A) = 2,$$

adică sistemul este compatibil. Deoarece $r = 2 < n = 5$, acest sistem liniar este compatibil nedeterminat. Ultima matrice extinsă transformată reprezintă următorul sistem redus de ecuaţii, echivalent cu sistemul iniţial:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -20. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem prin metoda Jordan-Gauss, obţinem următoarea soluţie generală a sistemului liniar:

$$\begin{cases} x_1 = -15 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = 20 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases}$$

unde $x_1, x_2$ – necunoscutele principale (bazice), iar $x_3, x_4, x_5$ – necunoscutele secundare.

## 7.2. Forma matriceală a sistemelor de ecuaţii liniare şi a soluţiei unui sistem liniar nedegenerat

Teorema Kronecker-Cappelli stabileşte condiţiile necesare şi suficiente de compatibilitate a sistemului liniar, fără a arăta procedeul de aflare a însăşi soluţiei a acestui sistem.

### 7.2.1. Scrierea matriceală a unui sistem de ecuaţii liniare

Fie sistemul de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7.1}$$

Introducem următoarele notaţii:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

adică $A$ este matricea coeficienţilor sistemului, $X$ – matricea-coloană (sau vector-coloană) a necunoscutelor, iar $B$ – matricea-coloană (sau vector-coloană) a termenilor liberi ai sistemului dat. Atunci sistemul (7.1) se poate scrie sub forma unei ecuaţii matriceale în felul următor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

sau, pe scurt,

$$AX = B. \tag{7.2}$$

Formula (7.2) reprezintă *scrierea sub forma matriceală a sistemului liniar* (7.1). Prin urmare, (7.1)$\Leftrightarrow$ (7.2).

Egalitatea (7.2) reprezintă o ecuaţie matriceală în care nu este cunoscută matricea coloană $X$.

### 7.2.2. Rezolvarea unui sistem liniar nedegenerat prin metoda matriceală

Considerăm un sistem de $n$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute, adică în (7.1) numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute ($m = n$). În acest caz, matricea $A$ a sistemului este pătratică de ordinul $n$. Dacă determinantul matricei $A$ a sistemului este nenul ($|A| \neq 0$), atunci sistemul se numeşte *nedegenerat*, iar dacă $|A| = 0$, sistemul se numeşte *degenerat*. În cazul unui sistem nedegenerat, adică $|A| \neq 0$, unde $A$ – matricea sistemului, ecuaţia matriceală (7.2) poate fi rezolvată cu ajutorul matricelor. Într-adevăr, în acest caz, cum $A$ este nedegenerată, conform teoremei 5.5, există matricea inversă $A^{-1}$. Înmulţind la stânga ambii membri ai ecuaţiei matriceale (7.2) cu $A^{-1}$, avem $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, de unde $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, deoarece produsul matricelor este asociativ.

Dar, după cum se ştie, $A^{-1}A = E$, iar $EX = X$, unde $E$ – matrice unitate, de aceea

$$X = A^{-1}B. \tag{7.3}$$

Rămâne de aflat $A^{-1}$. Atunci matricea-coloană necunoscută $X$ este exprimată prin elementele cunoscute ale matricelor $A^{-1}$ şi $B$. Formula (7.3) reprezintă *scrierea sub forma matriceală a soluţiei sistemului liniar nedegenerat* (7.1). Unicitatea soluţiei rezultă din unicitatea matricei inverse.

Vectorul-coloană $X$, determinat prin formula (7.3), se numeşte *vector-soluţie* al sistemului dat. Metoda de aflare a soluţiei sistemului, folosind formula (7.3), se numeşte *metoda matriceală* de rezolvare a sistemului.

Exemplu. Să se scrie sub formă matriceală sistemul de ecuaţii liniare şi să se rezolve acest sistem prin metoda matriceală:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ \quad - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 \qquad - x_3 = 3. \end{cases}$$

Introducem notaţiile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Atunci sistemul liniar se scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

sau $AX = B$.

Înmulţind la stânga ambii membri ai acestei ecuaţii matriceale cu $A^{-1}$, obţinem scrierea matriceală a soluţiei sistemului dat:

$$X = A^{-1}B.$$

Rămâne de aflat $A^{-1}$. Pentru matricea $A$ a acestui sistem, matricea inversă $A^{-1}$ este calculată în p. 4.6, cap. 4:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, găsim

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 3, \end{cases}$$

sau $(3; 1; 3)$ – soluţia sistemului.

## 7.3. Formulele lui Cramer[2] de rezolvare a unui sistem de $n$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute (regula lui Cramer)

Să considerăm un sistem de $n$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Scriem matricea sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dacă determinantul matricei $A$ a sistemului (determinantul sistemului) este nenul, $|A| \neq 0$, atunci, după cum este arătat în p. 7.2, sistemul de ecuaţii (7.1) dispune de scrierea matriceală a soluţiei sale sub forma (7.3) din p. 7.2, şi această soluţie este unică.

Egalitatea matriceală (7.3) din p. 7.2, în baza formulei (5.2) din p. 5.7, cap. 5, o putem scrie sub forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\tfrac{1}{|A|}A^{\mathrm{a}})B = \tfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix},$$

[2] G. Cramer (1704–1752) – matematician elveţian.

de unde rezultă că

$$x_k = \frac{1}{|A|}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dar, conform teoremei despre dezvoltarea determinantului (după o coloană),

$$A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n = D_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $D_k$ este determinantul obţinut din determinantul $|A|$ prin înlocuirea în el a coloanei $k$ cu coloana termenilor liberi ai sistemului, adică

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} b_n \end{vmatrix}.$$

În felul acesta, avem egalităţile:

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|},\ x_2 = \frac{D_2}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{|A|}. \tag{7.2}$$

Expresiile (7.2) se numesc *formulele lui Cramer*. Prin ele am stabilit următoarea regulă de obţinere a soluţiei sistemului liniar (7.1) (*regula lui Cramer*): *dacă determinantul sistemului liniar* (7.1) *este nenul* ($|A| \neq 0$), *atunci acest sistem are o singură soluţie, care se determină prin formulele lui Cramer* (7.2).

Observăm că existenţa acestei soluţii rezultă din teorema lui Kronecker-Cappelli. Într-adevăr, după consecinţa 2 a teoremei 6.4, din relaţia $|A| \neq 0$ rezultă că rangul matricei $A$ a sistemului este egal cu $n$. Rangul matricei extinse $[A|B]$ ce conţine $n$ linii nu poate fi mai mare ca $n$ şi de aceea este egal cu rangul matricei sistemului: $r([A|B]) = r(A)$.

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare cu ajutorul regulii lui Cramer

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Calculăm determinantul sistemului:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Întrucât $|A| \neq 0$, acest sistem îl putem rezolva cu ajutorul regulii lui Cramer. Calculăm determinanţii:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Conform formulelor lui Cramer (7.2), obţinem:

$$x_1 = \frac{D_1}{|A|} = \frac{-2}{-1} = 2, \; x_2 = \frac{D_2}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1, \; x_3 = \frac{D_3}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

sau $(2; -1; 1)$ – soluţia sistemului.

Din punct de vedere formal, orice sistem de $m$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute de forma generală (7.1) din p. 7.1 poate fi rezolvat pe baza determinanţilor. Dacă rezolvăm sistemul (7.1) din p. 7.1, atunci, în prealabil, cercetăm acest sistem. Pentru aceasta, calculăm rangul matricei sistemului $r(A)$ şi rangul matricei extinse $r([A|B])$ a acestui sistem. Dacă $r([A|B]) = r(A) = r$, atunci sistemul (7.1) din p. 7.1 are soluţii. Pentru a le afla, trebuie să alegem din sistemul dat $r$ ecuaţii oarecare, pentru care matricea din coeficienţii lor are rangul $r$ şi să rezolvăm sistemul alcătuit din aceste $r$ ecuaţii. În acest scop, în matricea coeficienţilor ai acestui sistem alegem un determinant de ordinul $r$, diferit de zero, numit *minor principal*. Pentru a fixa ideile, vom presupune că minorul principal este format din coeficienţii primelor $r$ ecuaţii şi primelor $r$ necunoscute ale sistemului, adică sistemul obţinut are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{7.3}$$

Conform teoremei 7.1, sistemul (7.3) este echivalent cu sistemul (7.1) din p. 7.1. Necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_r$ se numesc *principale* (*bazice*).

Trecem în membrul drept al ecuaţiilor (7.3) toţi termenii care conţin necunoscutele (secundare): $x_{r+1}, \ldots, x_n$; le atribuim valori numerice arbitrare, respectiv $x_{r+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Obţinem un sistem de $r$ ecuaţii cu $r$ necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1}^\circ - \ldots - a_{1n}x_n^\circ, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1}^\circ - \ldots - a_{2n}x_n^\circ, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1}^\circ - \ldots - a_{rn}x_n^\circ. \end{cases} \tag{7.4}$$

Sistemul (7.4) se rezolvă cu ajutorul formulelor lui Cramer; el are o soluţie unică $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_r^\circ$. Numerele $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_r^\circ, x_{r+1}^\circ, \ldots, x_n^\circ$ formează o soluţie a sistemului (7.3), care este şi soluţie a sistemului (7.1) din p. 7.1. Uşor se observă că orice soluţie a sistemului (7.3) poate fi obţinută prin acest procedeu.

E x e m p l u. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases} \tag{7.5}$$

Aflăm rangul matricei extinse a sistemului:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & 8 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$r([A|B]) = r(A) = 2 < n = 4.$$

Conform teoremei Kronecker-Cappelli, sistemul este compatibil nedeterminat. Din sistemul (7.5) alegem două ecuaţii, astfel încât rangul matricei $A_1$ din coeficienţii acestor ecuaţii să fie egal cu 2. Acestea sunt, evident, primele două ecuaţii ale sistemului. Obţinem următorul sistem, echivalent cu sistemul iniţial (7.5):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases} \tag{7.6}$$

În acest sistem minorul principal este

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

şi deci $x_1$, $x_2$ sunt necunoscutele principale. Atribuind necunoscutelor secundare $x_3$, $x_4$ valori arbitrare $x_3^\circ$, $x_4^\circ$, avem sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - x_3^\circ + x_4^\circ, \\ x_1 + x_2 = -2 + 2x_3^\circ - 3x_4^\circ. \end{cases}$$

Rezolvându-l după formulele lui Cramer, obţinem valorile

$$x_1 = -\frac{1}{2}(1 - x_3^\circ + 2x_4^\circ),$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}(3 - 3x_3^\circ + 4x_4^\circ).$$

În felul acesta, ansamblul ordonat de patru numere

$$(-\frac{1}{2}(1 - x_3^\circ + 2x_4^\circ), -\frac{1}{2}(3 - 3x_3^\circ + 4x_4^\circ), x_3^\circ, x_4^\circ),$$

unde $x_3^\circ$, $x_4^\circ$ sunt numere oarecare, este soluţie a sistemului (7.6) şi deci şi a sistemului iniţial (7.5).

## 7.4. Structura soluţiilor unui sistem omogen

Să considerăm sistemul de ecuaţii omogene liniare (pe scurt, sistem omogen):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

sau, scris sub formă matriceală,

$$AX = 0, \tag{7.2}$$

unde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ – matricea sistemului,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ – matricea-coloană a necunoscutelor,

$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ – matricea-coloană din zerouri.

Sistemul (7.1) sub formă vectorială se scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

sau

$$A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2 + \ldots + A^{(n)}x_n = 0.$$

În acest caz, $(b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0)$ matricea extinsă $[A|0]$ se deosebeşte de matricea $A$ a sistemului numai prin coloana nulă. De aceea $r([A|0]) = r(A) = r$ şi deci, conform teoremei Kronecker-Cappelli, sistemul este compatibil. Evident, una dintre soluţiile lui este aşa-numita *soluţia nulă*, sau *banală*:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Prin definiţie, *rangul sistemului omogen* (7.1) este rangul $r$ al matricei $A$ a acestui sistem. Apare întrebarea: în ce condiţii sistemul omogen (7.1) are soluţie nenulă? Răspuns la această întrebare ne dă următoarea teoremă.

**Teorema 7.3.** *Ca sistemul omogen* (7.1) *să aibă soluţii nenule, este necesar şi suficient ca rangul matricei sistemului să fie mai mic decât numărul necunoscutelor:*

$$r(A) < n.$$

▷ Într-adevăr, dacă $r(A) < n$, atunci conform teoremei Kronecker-Cappelli (caz de nedeterminare), sistemul omogen (7.1) are soluţii diferite de cea nulă.

Reciproc. Dacă sistemul (7.1) are soluţii, diferite de cea nulă, atunci $r(A)$ nu poate fi egal cu $n$, căci, conform teoremei Kronecker-Cappelli, aceasta ar însemna că sistemul are unica soluţie nulă, ceea ce contrazice condiţia teoremei. Rămâne deci că $r(A) < n$. ◁

C o n s e c i n ţ a 1. *Ca sistemul omogen* $AX = 0$ *cu matricea pătratică* $A$ *de ordinul* $n$ *să aibă soluţie nenulă, este necesar şi suficient ca determinantul sistemului să fie egal cu zero:* $|A| = 0$ *(*$|A| = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow r(A) < n$*).*

C o n s e c i n ţ a 2. *Ca sistemul omogen* $AX = 0$ *cu matricea pătratică* $A$ *de ordinul* $n$ *să aibă unica soluţie nulă, este necesar şi suficient ca determinantul sistemului să fie diferit de zero:* $|A| \neq 0$ $(|A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n)$.

E x e m p l u l 1. Să se cerceteze sistemul de ecuaţii omogene liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Acest sistem are matricea sa $A$ pătratică de ordinul trei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculăm determinantul $|A|$ al sistemului:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

În felul acesta, avem $|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n = 3$. Conform consecinţei 1 a teoremei 7.3, sistemul omogen (7.4) are soluţii nenule, adică este compatibil nedeterminat. ◁

E x e m p l u l 2. Să se afle soluţia generală a sistemului omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Aflăm rangul matricei sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 1 & -3 & -26 & 22 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -24 & 20 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A) = 2 < n = 4.$$

Întrucât rangul sistemului este mai mic ca numărul necunoscutelor, sistemul are soluţie nenulă. Sistemul redus, echivalent celui iniţial, are forma:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases} \tag{7.6}$$

(7.5)$\Leftrightarrow$(7.6). Rezolvând sistemul (7.6) prin metoda Jordan-Gauss, obţinem:

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

– soluţia generală a sistemului omogen iniţial (7.5), unde $x_1$, $x_2$ – necunoscutele bazice, iar $x_3$, $x_4$ – necunoscutele secundare.

Aşadar, în cazul $r(A) = r < n$, sistemul omogen $AX = 0$ are soluţie nenulă. Punem problema de a găsi structura mulţimii tuturor soluţiilor acestui sistem.

Soluţiile sistemului omogen (7.1) posedă următoarele proprietăţi.

1. Dacă sistemul ordonat de numere $X_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)'$ este o soluţie a sistemului (7.1), atunci produsul acestei soluţii cu un număr: $\alpha X_0 = (\alpha x_1^\circ, \alpha x_2^\circ, \ldots, \alpha x_n^\circ)'$, unde $\alpha$ este un număr arbitrar, de asemenea este o soluţie a acestui sistem.

2. Dacă $X_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)'$ şi $Y_0 = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)'$ sunt două soluţii oarecare ale sistemului (7.1), atunci suma acestor soluţii: $X_0 + Y_0 = (x_1^\circ + y_1^\circ, x_2^\circ + y_2^\circ, \ldots, x_n^\circ + y_n^\circ)'$ de asemenea va fi o soluţie a sistemului (7.1).

▷ Adevărul acestor proprietăţi rezultă nemijlocit din substituirea necunoscutelor $x_i$ cu mărimile $\alpha x_i^\circ$ şi $x_i^\circ + y_i^\circ$ în ecuaţiile sistemului (7.1). Într-adevăr, avem

$$(AX_0 = 0) \Rightarrow (\alpha(AX_0) = \alpha \cdot 0 \Leftrightarrow A(\alpha X_0) = 0)$$

şi

$$(AX_0 = 0, AY_0 = 0) \Rightarrow (AX_0 + AY_0 = 0 + 0 \Leftrightarrow A(X_0 + Y_0) = 0),$$

adică $\alpha X_0$ şi $X_0 + Y_0$ sunt soluţii ale sistemului (7.1). ◁

**Teorema 7.4.** *Mulţimea tuturor soluţiilor sistemului de ecuaţii omogene liniare* (7.1) *formează subspaţiu al spaţiului aritmetic* $\mathbf{R}^n$. Acest subspaţiu se numeşte *subspaţiul* (sau *spaţiul*) *soluţiilor* sistemului omogen (7.1).

▷ Să considerăm spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ al tuturor liniilor de lungimea $n$. Atunci fiecare soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ a sistemului omogen (7.1) poate fi considerată ca un vector $X$ al spaţiului $\mathbf{R}^n$, componentele căruia satisfac sistemul de ecuaţii (7.1). Mulţimea tuturor soluţiilor sistemului omogen (7.1) o vom nota prin $Q$ ($Q \subset \mathbf{R}^n$). Întrucât, după cum deja am constatat, suma soluţiilor sistemului omogen şi produsul soluţiei sale cu un număr de asemenea sunt soluţii ale acestui sistem, se îndeplineşte relaţia: $\forall \overline{x}, \overline{y} \in Q \Rightarrow \alpha\overline{x} + \beta\overline{y} \in Q$. Atunci, conform definiţiei subspaţiului în $\mathbf{R}^n$, rezultă că mulţimea $Q$ a tuturor soluţiilor sistemului omogen (7.1) constituie subspaţiu al spaţiului $\mathbf{R}^n$. ◁

În cazul $r(A) = r < n$, sistemul omogen (7.1) (după separarea necunoscutelor bazice şi renumerotarea convenabilă a necunoscutelor şi a ecuaţiilor) va fi echivalent cu sistemul de forma:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2,n-r}x_n, \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{r,n-r}x_n, \end{cases} \tag{7.7}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – necunoscutele *principale* (*bazice*), iar $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – necunoscutele *secundare*. Această concluzie rezultă din teorema Kronecker-Cappelli (caz de nedeterminare) în baza faptului că $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ este soluţie a sistemului omogen (7.1).

Atribuind necunoscutelor secundare valori arbitrare, aflăm în mod unic prin formulele (7.7) valorile corespunzătoare pentru necunoscutele principale (bazice). Orice ansamblu de valori ale necunoscutelor secundare şi ale celor corespunzătoare lor pentru necunoscutele principale formează o soluţie a sistemului (7.1) şi orice soluţie a sistemului omogen (7.1) poate fi obţinută în acest mod. De aceea se spune că sistemul (7.7) reprezintă *soluţia generală* (sub această formă) a sistemului omogen (7.1).

**Definiţie.** Un ansamblu de soluţii liniar independente $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ale sistemului omogen liniar $AX = 0$ se numeşte *sistem fundamental de soluţii* ale acestui sistem omogen dacă orice soluţie $X$ a sistemului poate fi reprezentată sub formă de combinaţie liniară de soluţiile date $X_i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Din această definiţie şi din definiţia bazei subspaţiului în $\mathbf{R}^n$ rezultă că sistemul fundamental de soluţii $X_1, X_2, \ldots, X_k$ constituie o bază a subspaţiului soluţiilor sistemului omogen (7.1) şi reciproc.

Aşa-numitul *sistem fundamental normal de soluţii* poate fi obţinut în felul următor. Considerăm succesiv

$$\begin{aligned}
(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) &= (1, 0, \ldots, 0),\\
(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) &= (0, 1, \ldots, 0),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\quad &\cdots\quad \cdots\cdots\cdots\\
(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

şi calculăm de fiecare dată cu ajutorul formulelor (7.7) valorile necunoscutelor principale $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Soluţiile obţinute le vom scrie sub formă de vector-soluţie:

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.8)$$

Fiecare dintre aceste soluţii, în parte, este *soluţie particulară* a sistemului (7.1).

Sistemul (7.8) şi este sistemul fundamental căutat. Într-adevăr, vom arăta că soluţiile (7.8) sunt liniar independente. Pentru aceasta cerem îndeplinirea egalităţii

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r} = 0,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ – numere supuse determinării.

Transcriem desfăşurat această egalitate vectorială:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \vdots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Efectuând în ultima egalitate operaţiile liniare asupra componentelor vectorilor şi egalând componentele corespunzătoare ale egalităţii obţinute, evident, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-r} = 0$. Aceasta înseamnă că sistemul de soluţii (7.8) este liniar independent. Formulele (7.7) arată că o soluţie arbitrară $X = (x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)'$ a sistemului omogen (7.1) poate fi reprezentată sub formă vectorială în următorul fel:

$$X = x_{r+1}X_1 + x_{r+2}X_2 + \ldots + x_nX_{n-r}, \tag{7.9}$$

unde $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ – soluţii liniar independente ale sistemului (7.1), determinate de formulele (7.8).

Într-adevăr, efectuând în (7.9) operaţiile liniare arătate asupra componentelor corespunzătoare ale vectorilor, obţinem sistemul (7.7), şi reciproc, adică (7.9)$\Leftrightarrow$ (7.7).

În felul acesta, sistemul obţinut (7.8) de soluţii ale sistemului omogen (7.1) este un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (7.1). Întrucât în formula (7.9) se conţine oricare soluţie a sistemului omogen (7.1), soluţia arbitrară $X$, determinată prin această formulă, reprezintă *soluţia generală* a sistemului (7.1) scrisă sub forma vectorială. Coeficienţii $x_{r+1}, \ldots, x_n$ din (7.9) pot lua orice valori. De aceea *soluţia generală* (7.9) *a sistemului de ecuaţii omogene liniare cu n necunoscute, în cazul $r < n$, unde $r$ – rangul sistemului, poate fi scrisă definitiv sub formă vectorială în următorul mod:*

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}, \tag{7.10}$$

*unde $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ – sistemul fundamental normal de soluţii ale sistemului omogen, iar $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – constante arbitrare.*

**Teorema 7.5** (teorema despre ecuaţiile omogene liniare). *Dimensiunea spaţiului soluţiilor unui sistem de ecuaţii omogene liniare* (7.1) *cu $n$ necunoscute este egală cu $n - r$, unde $r$ - rangul sistemului.*

▷ Dacă $r = n$, atunci, conform teoremei Kronecker-Cappelli (caz de unicitate), sistemul omogen liniar trebuie să aibă unica soluţie, care va fi tocmai soluţia nulă. Subspaţiul soluţiilor constă dintr-un singur vector nul $\overline{0}$, iar dimensiunea lui coincide cu dimensiunea $n - r$.

Fie $r < n$. În acest caz, după cum deja am constatat, există sistemul fundamental de soluţii $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$, ce constă din $n - r$ soluţii şi este bază a subspaţiului soluţiilor sistemului omogen (7.1). Întrucât, conform definiţiei, dimensiunea subspaţiului este egală cu numărul vectorilor din baza sa, rezultă că dimensiunea subspaţiului (spaţiului) soluţiilor sistemului omogen (7.1) este egală cu $n - r$. ◁

Consecinţă. *Orice ansamblu de $n - r$ soluţii liniar independente ale sistemului omogen* (7.1) *cu $n$ necunoscute, unde $r$ - rangul matricei sistemului, este un sistem fundamental de soluţii ale acestui sistem.*

▷ Rezultă din teorema cunoscută, că în subspaţiul de dimensiunea $n - r$ orice $n - r$ vectori liniar independenţi ai săi constituie o bază a acestui subspaţiu, iar o bază în spaţiul soluţiilor $Q$ ale sistemului omogen (7.1) este un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (7.1). ◁

Construirea sistemului fundamental de soluţii

1. Aflăm soluţia generală a sistemului (7.1) de ecuaţii omogene liniare cu $n$ necunoscute sub forma sistemului (7.7) $\Leftrightarrow$(7.1). În (7.7) se separă $r$ necunoscute bazice, exprimate prin cele secundare. Renumerotarea necunoscutelor nu este obligatorie.

2. Considerăm un sistem din $n - r$ vectori liniar independenţi $(n - r)$-dimensionali ai spaţiului liniilor $\mathbf{R}^{n-r}$:

$$\begin{array}{l} (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1,n-r}), \\ (p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2,n-r}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p_{n-r,1}, p_{n-r,2}, \ldots, p_{n-r,n-r}). \end{array} \tag{7.11}$$

Substituind componentele primului vector în soluţia generală (7.7) în locul necunoscutelor secundare corespunzătoare, aflăm valorile necunoscutelor bazice. Ansamblul obţinut de valori ale necunoscutelor este o soluţie $X_1$. În mod analog, cu ajutorul componentelor vectorului al doilea, aflăm $X_2$ etc. Soluţiile obţinute $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ alcătuiesc un sistem fundamental de soluţii ale sistemului omogen (7.1). Pentru aceasta este suficient de a ne convinge despre independenţa liniară a acestor soluţii. Variind componentele vectorilor liniar independenţi ai sistemului (7.11), găsim diferite sisteme fundamentale.

Dacă pornim de la cel mai simplu sistem de vectori:

$$\begin{array}{c}(1,0,\ldots,0),\\(0,1,\ldots,0),\\\ldots\ldots\ldots\\(0,0,\ldots,1),\end{array}$$

obţinem sistemul fundamental normal de soluţii.

Dacă sistemul fundamental oarecare $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ este cunoscut, atunci soluţia generală (arbitrară) $X$ a sistemului omogen (7.1) se determină, evident, prin formula (7.9), unde coeficienţii $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, conform teoremei 7.4, reprezintă constante arbitrare, care se notează, respectiv, prin $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$. Deci formula (7.9) definitiv se scrie sub forma (7.10).

Exemplul 3. Să se afle sistemul fundamental de soluţii şi să se scrie soluţia generală sub forma vectorială a sistemului de ecuaţii omogene liniare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0,\\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 - 9x_5 = 0,\\ 4x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0,\\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \tag{7.12}$$

1. Aflăm soluţia generală a acestui sistem. Pentru a simplifica procesul rezolvării, calculăm, în prealabil, rangul matricei sistemului cu ajutorul transformărilor elementare ale matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -3 & 7 & -9\\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -8 & 0 & 4 & -6\\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3\\ 0 & -4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A) = r = 2 < n = 5.$$

Întrucât rangul matricei sistemului este mai mic decât numărul necunoscutelor, sistemul are soluţii nenule. Deoarece în transformările elementare au participat numai liniile matricei, considerăm că în aceleaşi transformări au participat şi înseşi ecuaţiile. Prin urmare, ultimei matrice transformate îi corespunde următorul sistem redus de ecuaţii, echivalent cu cel iniţial:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem în raport cu $x_1$ şi $x_4$, obţinem

$$\begin{cases} x_1 = -4x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_4 = 2x_2 + \frac{3}{2}x_5, \end{cases} \tag{7.13}$$

unde $x_1, x_4$ – necunoscutele bazice, iar $x_2, x_3, x_5$ – necunoscutele secundare. Sistemul (7.13) reprezintă soluţia generală a sistemului omogen (7.12), deoarece, atribuind necunoscutelor secundare $x_2, x_3, x_5$ valori arbitrare, aflăm astfel valorile corespunzătoare pentru $x_1$ şi $x_4$, obţinând în modul acesta toate soluţiile sistemului dat.

2. Punând consecutiv

$$\begin{aligned} (x_2, x_3, x_5) &= (1,0,0), \\ (x_2, x_3, x_5) &= (0,1,0), \\ (x_2, x_3, x_5) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

şi calculând de fiecare dată cu formulele (7.13) valorile necunoscutelor bazice, găsim sistemul fundamental normal din trei soluţii ale sistemului omogen (7.12):

$$\begin{aligned} X_1 &= (-4,1,0,2,0)', \\ X_2 &= (1,0,1,0,0)', \\ X_3 &= (-\frac{1}{2},0,0,\frac{3}{2},1)'. \end{aligned}$$

3. Soluţia generală sub formă vectorială a sistemului omogen (7.12) este

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3, \qquad \text{sau}$$

$$X = C_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

unde $C_1, C_2, C_3$ – constante arbitrare.

Soluţia generală sub formă vectorială poate fi obţinută, de asemenea, dacă soluţia generală (7.13) o scriem sub formă de vector-coloană şi îl reprezentăm ca o combinaţie liniară de vectorii-coloană din coeficienţii necunoscutelor:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$= x_2\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

adică am obţinut soluţia generală sub forma vectorială (7.14), unde $C_1 = x_2$, $C_2 = x_3$, $C_3 = x_5$ – constante arbitrare.

## 7.5. Structura soluţiilor sistemelor neomogene

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare de forma generală:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{7.1}$$

sau sub formă matriceală

$$AX = B, \tag{7.2}$$

unde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ – matricea sistemului, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – matricea-coloană a necunoscutelor, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ – matricea-coloană a termenilor liberi. Sistemul (7.1) în care nu toţi termenii liberi sunt egali cu zero se numeşte *neomogen*. Dacă în sistemul neomogen (7.1) toţi termenii liberi se înlocuiesc cu zerouri, obţinem sistemul omogen cu aceeaşi matrice $A$ a sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

sau sub formă matriceală

$$AX = 0. \tag{7.4}$$

Sistemul omogen (7.3) (sau (7.4)) este numit *sistemul omogen asociat* sistemului liniar neomogen (7.1) (sau (7.2)). În continuare vom stabili legătura dintre soluţiile sistemului neomogen liniar şi cele ale sistemului omogen asociat acestuia.

Vectorul-coloană $X_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)' \in \mathbf{R}^n$ pentru care $AX_0 = B$ se numeşte *soluţie particulară* a sistemului neomogen (7.2).

Pentru a rezolva sistemul de ecuaţii liniare (7.1) cu $n$ necunoscute, calculăm, în prealabil, rangul matricei extinse $[A|B]$ şi cel al matricei $A$ a coeficienţilor sistemului.

În cazul $r([A|B]) = r(A) = r < n$, sistemul (7.1) este *compatibil nedeterminat*, iar structura soluţiei lui generale este stabilită de următoarea teoremă.

**Teorema 7.6.** *Suma unei soluţii particulare $X_0$ a sistemului neomogen liniar (7.2) şi a soluţiei generale $\overline{X}$ a sistemului omogen asociat (7.4) reprezintă soluţia generală $X$ a sistemului neomogen (7.2):*

$$X = X_0 + \overline{X} = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}, \tag{7.5}$$

*unde* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ *– sistemul fundamental de soluţii ale sistemului omogen asociat* (7.4); $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ *– constante arbitrare.*

▷ Dacă $X_0$ este o soluţie particulară a sistemului neomogen $AX = B$, $\overline{X}$ – oricare soluţie a sistemului omogen asociat $AX = 0$, atunci avem $A(X_0 + \overline{X}) = AX_0 + A\overline{X} = B + 0 = B$, adică $X_0 + \overline{X}$ este soluţie a sistemului neomogen $AX = B$.

Pe de altă parte, orice soluţie $X$ a sistemului neomogen $AX = B$ poate fi reprezentată sub formă de o astfel de sumă $X = X_0 + \overline{X}$, unde $X_0$ – o soluţie particulară a sistemului neomogen, iar vectorul $\overline{X}$ se determină din această egalitate şi totodată va fi soluţie a sistemului omogen asociat $AX = 0$. Într-adevăr, din egalităţile $AX = B$, $AX_0 = B$ rezultă $AX - AX_0 = B - B = 0$, $A(X - X_0) = 0$ şi întrucât $X - X_0 = \overline{X}$, avem $A\overline{X} = 0$, adică $\overline{X}$ este soluţie a sistemului omogen asociat $AX = 0$. Prin urmare, suma $X_0 + \overline{X}$, unde $X_0$ este o soluţie particulară a sistemului neomogen (7.2), iar $\overline{X}$ – soluţia generală a sistemului omogen asociat (7.4), reprezintă soluţia generală a sistemului neomogen (7.2), de unde, în baza egalităţii (7.10) din p. 7.4, rezultă formula (7.5). ◁

Formula (7.5) se numeşte *soluţia generală sub formă vectorială* a sistemului neomogen liniar (7.1) (sau (7.2)).

E x e m p l u. Să se afle soluţia generală sub formă vectorială a sistemului neomogen liniar:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -7, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 7x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases} \tag{7.6}$$

*Prima metodă.* 1) Aflăm o soluţie particulară $X_0$ a sistemului neomogen (7.6). Pentru aceasta, în prealabil, calculăm rangul matricei extinse $[A|B]$ a sistemului:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -7 \\ 7 & -3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -17 \\ 0 & -10 & 6 & -10 & -34 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r([A|B]) = r(A) = r = 2 < n = 4.$$

Conform teoremei Kronecker-Cappelli, sistemul este compatibil nedeterminat.

Întrucât în transformările matricei extinse a sistemului au participat numai liniile matricei, rezultă că ultimei matrice extinse transformate îi corespunde următorul sistem redus de ecuaţii liniare, echivalent cu cel iniţial:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 17. \end{cases} \tag{7.7}$$

Atribuind unor necunoscute valori în (7.7), obţinem valorile corespunzătoare pentru celelalte. De exemplu, pentru $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, avem $x_2 = 4$, $x_1 = 2$, adică am găsit o soluţie particulară a sistemului (7.7) şi deci şi a sistemului neomogen (7.6): $X_0 = (2, 4, 1, 0)'$.

2) Aflăm soluţia generală a sistemului neomogen liniar (7.7)$\sim$ $\sim$(7.6). Sistemul omogen asociat sistemului neomogen (7.7) are forma:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Rezolvând acest sistem în raport cu $x_1$, $x_2$, obţinem

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{5}x_3 - x_4, \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 - x_4, \end{cases} \tag{7.9}$$

unde $x_1$, $x_2$ – necunoscutele bazice, iar $x_3$, $x_4$ – necunoscutele secundare.

Punând în (7.9) valorile: $(x_3, x_4) = (1, 0)$, apoi $(x_3, x_4) = (0, 1)$, găsim sistemul fundamental normal al sistemului omogen (7.8):

$$X_1 = (2/5, 3/5, 1, 0)',$$
$$X_2 = (-1, -1, 0, 1)'.$$

Soluţia generală sub formă vectorială a sistemului omogen asociat (7.8) este: $\overline{X} = C_1X_1 + C_2X_2$, unde $C_1, C_2$ – constante arbitrare.

Adunând soluţia particulară $X_0$ a sistemului neomogen (7.7) cu soluţia generală $\overline{X}$ a sistemului omogen asociat (7.8), obţinem următoarea soluţie generală sub formă vectorială a sistemului neomogen (7.7)~(7.6):

$$X = X_0 + \overline{X} = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2,$$

sau

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unde $C_1, C_2$ – constante arbitrare.

*A doua metodă.* Aflăm soluţia generală a sistemului neomogen (7.7)~(7.6):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{5} + \dfrac{2}{5}x_3 - x_4, \\ x_2 = \dfrac{17}{5} + \dfrac{3}{5}x_3 - x_4. \end{cases} \tag{7.10}$$

Scriem de data aceasta soluţia generală (7.10) sub formă vectorială în următorul mod:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8}{5} & +\dfrac{2}{5}x_3 & -x_4 \\ \dfrac{17}{5} & +\dfrac{3}{5}x_3 & -x_4 \\ & x_3 & \\ & & x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{8}{5} \\ \dfrac{17}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

adică $X = X^0 + C_1X_1 + C_2X_2$, unde $X^0 = (\dfrac{8}{5}, \dfrac{17}{5}, 0, 0)'$ – o soluţie particulară a sistemului neomogen, iar coloanele $X_1 = (\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, 1, 0)'$,

$X_2 = (-1, -1, 0, 1)'$ constituie sistemul fundamental normal al sistemului omogen asociat (7.8); $C_1 = x_3$, $C_2 = x_4$ – constante arbitrare.

## Exerciţii

**1.** Să se cerceteze sistemul de ecuaţii liniare şi, în caz de compatibilitate, să se rezolve acest sistem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$$

**2.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

a) prin metoda matriceală;

b) cu ajutorul regulii lui Cramer.

CAPITOLUL 8

# Valori proprii şi vectori proprii

## 8.1. Numere complexe

Pentru a studia suficient de complet unele noţiuni importante cum sunt numărul propriu şi vectorul propriu, nu putem evita numerele complexe.

Se numeşte *număr complex* (scris sub forma algebrică) o expresie (simbol) de forma $a + bi$, unde $a$ şi $b$ – numere reale, iar $i$ – unitatea imaginară, adică numărul cu proprietatea: $i^2 = -1$, sau $i = \sqrt{-1}$.

Numărul $a$ se numeşte *partea reală* a numărului complex, iar $b$ – *partea imaginară*. Dacă partea imaginară a numărului complex este egală cu zero, adică el are forma $a + 0 \cdot i$, atunci acest număr este considerat ca egal cu numărul real $a$:

$$a = a + 0 \cdot i.$$

În felul acesta, orice număr real este un caz particular al numărului complex.

Numerele complexe $a + bi$ şi $a - bi$ se numesc *conjugate*. Dacă $\alpha$ este un număr complex, atunci numărul conjugat cu el se notează prin $\overline{\alpha}$. De exemplu, dacă $\alpha = 2 + 3i$, atunci $\overline{\alpha} = 2 - 3i$. Este evident că $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$. Menţionăm că suma şi produsul numerelor complexe conjugate sunt numere reale. Astfel, dacă $\alpha = a + bi$ şi $\overline{\alpha} = a - bi$, atunci $\alpha + \overline{\alpha} = 2a$ şi $\alpha\overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Se poate arăta că pentru numerele complexe $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\overline{\alpha} = a - bi$, $\overline{\beta} = c - di$ au loc următoarele relaţii:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \qquad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}, \qquad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}.$$

Se numeşte *modulul* numărului complex $a+bi$ numărul $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$.

Mulţimea tuturor numerelor reale se notează prin $\mathbf{R}$, iar a celor complexe – prin $\mathbf{C}$.

## 8.2. Valori proprii şi vectori proprii ai unei matrice

### 8.2.1. Noţiunea de valoare proprie şi vector propriu al unei matrice pătratice

Deseori, în problemele teoretice, precum şi cele practice, apare necesitatea de a folosi aşa-numitele numere proprii şi vectori proprii ai matricei.

Fie o matrice pătratică de ordinul $n$ cu elemente numere reale:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \ a_{ij} \in \mathbf{R}, \ (i,j = 1,2,\dots,n).$$

**Definiţia 1.** 1) Un număr $\lambda$ se numeşte *valoare proprie* (sau *număr propriu*) a matricei $A$ dacă există un vector-coloană nenul $n$-dimensional (matrice-coloană) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$, astfel încât are loc

$$AX = \lambda X. \tag{8.1}$$

2) Orice vector-coloană nenul $X$ care satisface egalitatea (8.1) pentru valoarea proprie $\lambda$ a matricei $A$ se numeşte *vector propriu* al matricei $A$, corespunzător valorii proprii $\lambda$ (sau care aparţine valorii proprii $\lambda$, sau cu valoarea proprie $\lambda$).

Numărul $\lambda$ din (8.1) este real dacă pentru vectorul propriu $X$ se admit numai componente reale, şi $\lambda$ – număr complex, în cazul în care aceste componente pot fi şi complexe.

Numărul $\lambda$ care (împreună cu vectorul $X$) satisface egalitatea (8.1) se numeşte totodată şi valoare proprie (sau număr propriu) a acestui vector propriu $X$.

Subliniem că vectorul nul nu se consideră vector propriu al matricei $A$, cu toate că satisface egalitatea (8.1) pentru orice $\lambda$.

Dacă nu se va menţiona în mod special, atunci în continuare vom subînţelege (admite) că matricea $A$ are elementele numere reale şi vectorii ei proprii sunt cu componentele reale.

Aplicând proprietăţile de bază ale adunării şi înmulţirii matricelor, egalitatea matriceală (8.1) poate fi scrisă sub forma $AX - \lambda X = 0$, $AX - (\lambda E)X = 0$, sau

$$(A - \lambda E)X = 0, \tag{8.2}$$

unde $E$ – matricea unitate de ordinul $n$, $0$ – matricea-coloană nulă. Evident, (8.1) $\Leftrightarrow$ (8.2).

Scriind în mod desfăşurat matricea $A - \lambda E$ din (8.2) şi efectuând operaţiile corespunzătoare asupra matricelor, obţinem:

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Atunci egalitatea matriceală (8.2), în mod desfăşurat, are următorul aspect:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

de unde rezultă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n &= 0, \\ a_{21}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Aşadar, egalitatea matriceală (8.2) (sau (8.1)) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii liniare (8.3): (8.1) $\Leftrightarrow$ (8.2) $\Leftrightarrow$ (8.3). Sistemul liniar (8.3) se consideră ca sistem de ecuaţii pentru aflarea coordonatelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale vectorului nenul $X$, care satisface egalitatea (8.1). Acesta e un sistem de $n$ ecuaţii liniare omogene cu $n$ necunoscute. Întrucât vectorul $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ trebuie să fie nenul, ne interesează numai soluţiile nenule ale sistemului, adică acele soluţii care au cel puţin o componentă $x_i$ ne egală cu zero. În baza consecinţei 1 a teoremei 7.3, sistemul omogen (8.3) cu matricea pătratică $A$ de ordinul $n$ are soluţie nenulă atunci şi numai atunci când determinantul matricei sistemului este egal cu zero, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{8.4}$$

sau sub formă concisă

$$det(A - \lambda E) = 0. \tag{8.5}$$

Dezvoltând acest determinant, obţinem polinomul de gradul $n$ în raport cu $\lambda$:

$$det(A - \lambda E) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Coeficienţii săi $a_n$,$a_{n-1}$, ..., $a_0$ depind de elementele matricei $A$. Menţionăm că $a_n = (-1)^n$ şi $a_0 = |A|$ – termenul liber al acestui polinom.

▷ Rezultă din expresia determinantului $det(A-\lambda E)$, scrisă conform formulei (5.5) din p. 5.4, cap. 5. ◁

**Definiţia 2.** Matricea $A - \lambda E$, unde $\lambda$ este variabilă independentă, se numeşte *matricea caracteristică* pentru $A$. Determinantul $det(A - \lambda E)$ al matricei caracteristice, care este un polinom de variabila $\lambda$, se numeşte *polinomul caracteristic* al matricei $A$. Ecuaţia

$$det(A - \lambda E) = 0,$$

sau (8.4), se numeşte *ecuaţia caracteristică* a matricei $A$. Rădăcinile acestei ecuaţii, care pot fi atât reale, cât şi complexe, se numesc *rădăcinile caracteristice* (sau *numerele caracteristice*) ale matricei $A$.

Aşadar, pentru a afla valorile proprii ale matricei pătratice $A$, trebuie de rezolvat ecuaţia ei caracteristică (8.5). Pentru aceasta, rescriem ecuaţia (8.5) sub forma desfăşurată (8.4), iar apoi dezvoltăm determinantul şi rezolvăm ecuaţia obţinută de gradul $n$ în raport cu necunoscuta $\lambda$. O astfel de ecuaţie are exact $n$ rădăcini, reale sau complexe (printre ele pot fi şi multiple).

Se pune întrebarea: care din rădăcinile caracteristice sunt valori proprii ale matricei $A$? Răspuns dă următoarea teoremă.

**T e o r e m a 8.1.** *Rădăcinile caracteristice reale ale matricei $A$ (dacă ele există) şi numai ele sunt valori proprii ale acestei matrice* (cu condiţia că matricea $A$ şi vectorii ei proprii sunt matrice cu elemente numere reale).

▷ Într-adevăr, pentru orice rădăcină caracteristică reală $\lambda$, în virtutea egalităţii (8.4), sistemul omogen (8.3) are soluţie nenulă $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Întrucât sistemul de ecuaţii (8.3) este echivalent cu ecuaţia matriceală (8.1), această soluţie reprezintă componentele unui vector-coloană nenul $X$ care satisface ecuaţia (8.1). Prin urmare, orice rădăcină caracteristică reală $\lambda$ este valoare proprie a matricei $A$.

Pe de altă parte, fiecare valoare proprie $\lambda$ a matricei $A$ este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda E) = 0$ a acestei matrice. Rădăcinile complexe ale ecuaţiei caracteristice nu pot fi valori proprii, deoarece pentru ele în spaţiul aritmetic real $\mathbf{R}^n$ nu are sens egalitatea (8.1).

În felul acesta, fiecare valoare proprie a matricei $A$ este una dintre rădăcinile caracteristice reale ale acestei matrice. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Matricea pătratică $A$ de ordinul $n$ are cel mult $n$ valori proprii distincte.*

▷ Rezultă din faptul că polinomul caracteristic $det(A - \lambda E)$ de gradul $n$ are cel mult $n$ rădăcini distincte. ◁

Se numeşte *multiplicitate algebrică* (sau simplu *multiplicitate*) a numărului propriu $\lambda_0$ al matricei $A$ multiplicitatea $m_0$ a numărului $\lambda_0$ ca rădăcină a polinomului caracteristic $det(A - \lambda E)$.

Mulţimea tuturor rădăcinilor caracteristice ale matricei $A$, unde fiecare rădăcină se ia cu acea multiplicitate pe care ea o are în polinomul caracteristic, se numeşte *spectrul* acestei matrice.

E x e m p l u l 1. Să se afle polinomul caracteristic, rădăcinile caracteristice şi valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conform definiţiei polinomului caracteristic, avem

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 2 & 0-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(0-\lambda)(1-\lambda) - 6(1-\lambda) = (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda) - 6] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$$

Pentru a afla valorile proprii ale matricei $A$, trebuie de rezolvat ecuaţia ei caracteristică: $det(A - \lambda E) = 0$. Egalând polinomul obţinut cu zero, avem ecuaţia caracteristică: $(1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$, de unde aflăm rădăcinile caracteristice ale matricei $A$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Rădăcinile sunt reale, de aceea ele toate sunt valori proprii ale matricei $A$.

E x e m p l u l 2. Să se afle valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1/2 \\ -8 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pentru a găsi valorile proprii ale matricei $A$, trebuie de rezolvat ecuaţia ei caracteristică $det(A - \lambda E) = 0$.

Calculăm mai întâi polinomul caracteristic al matricei $A$:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1/2 \\ -8 & 4-\lambda & 4 \\ 4 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 4 =$$

$$= (2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 + 2).$$

Egalând acest polinom cu zero, obţinem ecuaţia caracteristică

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 + 2) = 0.$$

Deoarece el are numai o rădăcină reală $\lambda = 2$, deducem că această rădăcină şi va fi valoarea proprie căutată a matricei $A$.

**Teorema 8.2.** *O matrice are o valoare proprie egală cu zero dacă şi numai dacă această matrice este degenerată.*

▷ Într-adevăr, după cum a fost arătat mai sus, polinomul caracteristic al matricei pătratice $A$ de ordinul $n$ are forma

$$det(A - \lambda E) = a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0, \quad \text{unde} \quad a_0 = |A|.$$

Dacă matricea $A$ are o valoare proprie egală cu zero ($\lambda_1 = 0$), atunci din ecuaţia caracteristică a matricei $A$ ($det(A - \lambda E) = 0$) rezultă $a_0 = |A| = 0$, adică matricea $A$ este degenerată.

*Reciproc.* Dacă matricea $A$ este degenerată, adică $|A| = 0$, atunci ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda E) = 0$ a matricei $A$, evident, are o rădăcină nulă ($\lambda_1 = 0$), care, conform teoremei 8.1, este o valoare proprie a acestei matrice. ◁

Consecinţă. *Dacă $A$ este o matrice nedegenerată ($|A| \neq 0$), atunci toate valorile ei proprii sunt diferite de zero.*

Să arătăm unele proprietăţi ale valorilor proprii $\lambda$ ale matricei $A$.

1) *Vectorul propriu $X$ al matricei $A$ are o singură valoare proprie $\lambda$.*

   ▷ Într-adevăr, dacă admitem că vectorul propriu $X$ are două valori proprii $\lambda$ şi $\lambda_1$, atunci din $AX = \lambda X$ şi $AX = \lambda_1 X$ avem $(\lambda - \lambda_1)X = 0$, de unde, fiindcă $X \neq 0$, rezultă $\lambda_1 = \lambda$. ◁

2) Fie că pentru matricea $A$ există matricea inversă $A^{-1}$. *Dacă $\lambda$ este o valoare proprie a matricei $A$ cu vectorul propriu $X$, atunci $\lambda^{-1}$ este o valoare proprie a matricei $A^{-1}$ cu acelaşi vector propriu $X$.*

▷ Înmulţind egalitatea (8.1) la stânga cu $A^{-1}$, avem:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = \lambda(A^{-1}X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = \lambda(A^{-1}X) \Leftrightarrow A^{-1}X = \lambda^{-1}X. \triangleleft$$

3) *Dacă $\lambda$ este o valoare proprie a matricei $A$ cu vectorul propriu $X$, atunci $\lambda^2$ este o valoare proprie a matricei $A^2$ cu acelaşi vector propriu $X$.*

▷ Înmulţind egalitatea (8.1) la stânga cu $A$, rezultă:

$$A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX), \quad \text{sau} \quad A^2X = \lambda^2 X.$$

În mod analog, demonstrăm că

$$A^kX = \lambda^k X, \quad \text{unde} \quad k \in \mathbb{N}. \triangleleft$$

4) *Dacă $\lambda$ este o valoare proprie a matricei $A$ cu vectorul propriu $X$, atunci $\widetilde{\lambda} = \alpha\lambda + \beta$ ($\alpha$ şi $\beta$ fiind oricare numere) este valoare proprie a matricei*

$$\alpha A + \beta E \quad \textit{cu acelaşi vector propriu } X.$$

▷ Avem (8.1)⇔(8.2). Înmulţind egalitatea (8.2) cu numărul $\alpha$ şi aplicând proprietăţile produsului matricelor şi a operaţiei înmulţirii matricei cu un număr, obţinem:

$$\alpha(A - \lambda E) \cdot X = 0 \Leftrightarrow [(\alpha A + \beta E) - (\alpha\lambda + \beta)E]X = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha A + \beta E)X = (\alpha\lambda + \beta)X. \triangleleft$$

Sistemul liniar (8.3), după cum deja am arătat, serveşte pentru aflarea coordonatelor vectorului propriu $X$ corespunzător valorii proprii $\lambda$.

Menţionăm, de asemenea, că dacă matricea $A$ nu are numere proprii, atunci nu are nici vectori proprii.

### 8.2.2. Determinarea vectorilor proprii ai unei matrice

Vom formula următoarea *regulă* de aflare a vectorilor proprii: *pentru a găsi toţi vectorii proprii ai matricei $A$, trebuie mai întâi de toate de rezolvat ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda E) = 0$; fiecare rădăcină reală $\lambda$ a acestei ecuaţii este valoare proprie a matricei $A$; vectorii proprii ce aparţin valorii proprii $\lambda$ se află din ecuaţia matriceală $(A - \lambda E)X = 0$ (sau sistemul de ecuaţii (8.3)).*

Exemplul 1. Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Compunem ecuaţia caracteristică a matricei $A$:

$$det(A - \lambda E) = 0, \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Rădăcinile sale $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, întrucât ambele sunt reale, sunt valorile proprii căutate ale matricei $A$.

Aflăm vectorii proprii $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ai matricei $A$ din ecuaţia $(A - \lambda E)X = 0$ pentru $\lambda = \lambda_1 = 1$ şi $\lambda = \lambda_2 = 4$. În mod desfăşurat, această ecuaţie matriceală reprezintă următorul sistem de ecuaţii liniare omogene:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 1$, sistemul de ecuaţii (8.6) capătă forma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Soluţia generală a sistemului (8.7) este $x_1 = -x_2$, unde $x_1$ – necunoscuta bazică, iar $x_2$ – necunoscuta secundară. Notând $x_2 = t$, soluţia generală a acestui sistem poate fi scrisă sub forma $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$, unde $t$ – variabilă independentă. Prin urmare, vectorii nenuli $X = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, unde $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, sunt vectorii proprii ai matricei $A$ cu valoarea proprie $\lambda_1 = 1$.

Pentru $\lambda = \lambda_2 = 4$, sistemul (8.6) devine

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \tag{8.8}$$

Soluţia acestui sistem este $x_2 = 2x_1$. Notând $x_1 = t$, această soluţie poate fi scrisă sub forma $X = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$, unde $t$ – variabilă independentă.

Prin urmare, vectorii proprii ai matricei $A$ ce aparţin valorii proprii $\lambda = \lambda_2 = 4$ sunt vectorii

$$X = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

unde $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

*Răspuns:* Valorile proprii căutate ale matricei $A$ sunt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, iar vectorii proprii căutaţi ai acestei matrice sunt:

$$X = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

unde $t$ – variabilă independentă, adică orice număr ($t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$).

Exemplul 2. Să se afle vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1/2 \\ -8 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Am aflat deja (în exemplul 2, p. 8.2.1) că această matrice are o singură valoare proprie $\lambda = 2$.

Vectorii proprii căutaţi ce aparţin valorii proprii $\lambda$ îi aflăm din ecuaţia $(A - \lambda E)X = 0$, care pentru $\lambda = 2$ reprezintă următorul sistem de ecuaţii liniare omogene:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 0, \\ -8x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, aflăm $x_2 = 4x_1$, $x_3 = 0$, unde $x_1$ – număr arbitrar. Notăm $x_1 = t$.

În felul acesta, vectorul $X = t \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, pentru $t$ – arbitrar ($t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$), este vector propriu al matricei $A$.

Exemplul 3. Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Găsim valorile proprii ale matricei $A$. Ecuaţia caracteristică a matricei $A$ are forma:

$$det(A-\lambda E)=0, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)=0 \quad \text{sau} \quad (1-\lambda)^2(1+\lambda)=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ au, respectiv, multiplicitatea 2 şi 1. Toate rădăcinile sunt valori proprii ale matricei $A$.

Să aflăm vectorii proprii $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ai matricei $A$ din ecuaţia $(A-\lambda E)X=0$ pentru $\lambda=\lambda_1=1$ şi $\lambda=\lambda_2=-1$. În mod desfăşurat, această ecuaţie matriceală reprezintă următorul sistem de ecuaţii

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - x_2 = 0, \\ (-1-\lambda)x_2 = 0, \\ -x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Pentru $\lambda=\lambda_1=1$, acest sistem capătă forma

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 - x_2 = 0, \\ -2x_2 = 0, \\ -x_2 + 0\cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Soluţia ultimului sistem este: $x_2=0$, iar $x_1$, $x_3$ – numere arbitrare. Notând $x_1=t$, $x_3=t_1$, soluţia acestui sistem poate fi scrisă sub forma $X=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix}$, unde $t, t_1$ – variabile independente. Prin urmare, vectorii $X=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix}$, unde $t, t_1$ – variabile independente ($|t|+|t_1| \neq 0$, $t, t_1 \in \mathbf{R}$), sunt vectori proprii ai matricei $A$ cu valoarea proprie $\lambda=\lambda_1=1$.

Pentru $\lambda=\lambda_2=-1$, sistemul (8.9) se scrie sub forma

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ 0\cdot x_2 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{2}x_2. \end{cases}$$

Notând $x_2 = s$, această soluţie poate fi scrisă sub forma

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s \\ s \\ \frac{1}{2}s \end{pmatrix}.$$

Deci vectorii proprii ai matricei $A$ cu valoarea proprie $\lambda_2 = -1$ sunt vectorii

$$X = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

unde $s$ – variabilă independentă ($s \neq 0$, $s \in \mathbf{R}$).

*Răspuns:* Valorile proprii căutate ale matricei $A$ sunt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, iar vectorii proprii căutaţi ai acestei matrice sunt:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad X = s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

unde $s, t, t_1$ – variabile independente ($s \neq 0$, $|t| + |t_1| \neq 0$; $s, t, t_1 \in \mathbf{R}$).

**T e o r e m a 8.3.** *Vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte două câte două ale matricei $A$ sunt liniar independenţi.*

▷ Teorema se demonstrează prin metoda inducţiei matematice după numărul $m$ de vectori proprii cu diferite valori proprii ale matricei $A$. Pentru $m = 1$ teorema este adevărată.

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru orice $m - 1$ ($m \geq 2$) vectori proprii cu diferite valori proprii ale matricei $A$. Vom

demonstra că afirmaţia este adevărată şi pentru $m$ vectori proprii $X_i$ cu diferite două câte două valori proprii $\lambda_i$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pentru $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, m$), corespunzător. Presupunem contrariul, adică că vectorii $X_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) sunt liniar dependenţi, ceea ce înseamnă că există astfel de numere $\alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), nu toate egale cu zero, încât are loc egalitatea

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_m X_m = 0.$$

Fie, de exemplu, $\alpha_m \neq 0$. Împărţind această egalitate la $(-\alpha_m)$, obţinem $X_m = \alpha'_1 X_1 + \ldots + \alpha'_{m-1} X_{m-1}$, unde $\alpha'_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_m}$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$). Avem

$$AX_m = \lambda_m X_m = \lambda_m(\alpha'_1 X_1 + \ldots + \alpha'_{m-1} X_{m-1}) = \\ = \lambda_m(\alpha'_1 X_1) + \ldots + \lambda_m(\alpha'_{m-1} X_{m-1}).$$

Pe de altă parte,

$$AX_m = A(\alpha'_1 X_1 + \ldots + \alpha'_{m-1} X_{m-1}) =$$

$$= \alpha'_1(AX_1) + \ldots + \alpha'_{m-1}(AX_{m-1}) =$$

$$= \alpha'_1(\lambda_1 X_1) + \ldots + \alpha'_{m-1}(\lambda_{m-1} X_{m-1}).$$

Egalând părţile drepte ale acestor egalităţi, obţinem

$$(\lambda_m - \lambda_1)\alpha'_1 X_1 + \ldots + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha'_{m-1} X_{m-1} = 0.$$

După presupunere, $m-1$ vectori proprii cu diverse două câte două valori proprii sunt liniar independenţi. Prin urmare, în ultima egalitate toţi coeficienţii sunt egali cu zero, de unde rezultă $\alpha'_1 = \ldots = \alpha'_{m-1} = 0$. Aceasta înseamnă că vectorul $X_m = \alpha'_1 X_1 + \ldots + \alpha'_{m-1} X_{m-1} = 0$, ceea ce contrazice condiţia $X_m \neq 0$, deoarece $X_m$ este vector propriu. În baza acestei contraziceri, conchidem că vectorii proprii $X_i$ cu diverse două câte două valori proprii $\lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) sunt liniar independenţi. ◁

Menţionăm că reciproca teoremei 8.3, în general, nu este adevărată, deoarece există vectori proprii liniar independenţi cu aceeaşi valoare proprie $\lambda_0$ a matricei $A$. Acest fapt este evident din exemplul 3, luând pentru vectorii proprii $X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t_1 \end{pmatrix}$, $t, t_1 \in \mathbf{R}$, $|t| + |t_1| \neq 0$, corespunzători numărului propriu $\lambda = 1$, valorile, de exemplu, $t = 0$, $t_1 = 1$ şi $t = 1$, $t_1 = 0$.

Se numeşte *multiplicitate geometrică* a unui număr propriu $\lambda_0$ al matricei $A$ numărul maxim $s_0$ de vectori proprii liniar independenţi ai

matricei $A$ corespunzători acestui număr propriu. Multiplicitatea geometrică $s_0$ este întotdeauna egală sau mai mică decât multiplicitatea algebrică $m_0$ ($s_0 \leq m_0$) [2, pag. 228]. Dacă multiplicitatea algebrică este egală cu unitatea, atunci şi multiplicitatea geometrică este egală cu unitatea.

**Teorema 8.4.** *Mulţimea tuturor vectorilor proprii ai matricei $A$ ce aparţin unei şi aceleiaşi valori proprii $\lambda$, împreună cu vectorul nul, formează subspaţiu al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$.*

▷ Notăm prin $L$ mulţimea tuturor vectorilor proprii ai matricei $A$ cu valoarea proprie $\lambda$, luaţi împreună cu vectorul nul 0. Pentru ca $L$ să fie subspaţiu în $\mathbf{R}^n$, după cum se ştie, e suficient de demonstrat că:

1) dacă $X_1, X_2 \in L$, atunci $X_1 + X_2 \in L$ şi

2) dacă $X \in L$ şi $\alpha$ – un număr real arbitrar, atunci $\alpha X \in L$.

Ambele aceste condiţii sunt satisfăcute. Într-adevăr, din $X_1$, $X_2 \in L$ avem $AX_1 = \lambda X_1$ şi $AX_2 = \lambda X_2$, de unde

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 = \lambda(X_1 + X_2),$$

adică $X_1 + X_2 \in L$.

Dacă însă $X \in L$ şi $\alpha$ – orice număr real, atunci avem $AX = \lambda X$ şi $A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X)$, adică $\alpha X \in L$.

Prin urmare, $L$ este subspaţiu în $\mathbf{R}^n$. ◁

Drept consecinţă, din această teoremă rezultă că dacă $X$ este un vector propriu cu valoarea proprie $\lambda$ a matricei $A$, atunci vectorul $X_0 = \frac{1}{|X|}X$ de asemenea este vector propriu al matricei $A$, corespunzător aceleiaşi valori proprii $\lambda$, şi totodată, evident, avem $|X_0| = 1$.

Vectorul propriu $X_0$ pentru care $|X_0| = 1$ se numeşte *vector propriu normat.*

## 8.3. Valori proprii şi vectori proprii ai matricelor simetrice

Matricea simetrică posedă proprietăţi deosebite. Matricea pătratică $A = (a_{ij})$ se numeşte *matrice simetrică* dacă $A' = A$, unde $A'$ – matricea transpusă a matricei $A$.

Pentru matricea simetrică,

$$a_{ij} = a_{ji}$$

pentru orice $i$ şi $j$, adică elementele simetrice faţă de diagonala principală a matricei sunt egale.

Un rol important în matematică îl joacă valorile proprii şi vectorii proprii ai matricelor simetrice. Are loc teorema.

**Teorema 8.5.** *Toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice ale unei matrice simetrice cu elemente din* $\mathbf{R}$ *sunt numere reale.*

▷ Fie $\lambda_0$ o rădăcină caracteristică (pe care o putem presupune şi complexă) a matricei simetrice $A = (a_{ij})$, adică satisface ecuaţia caracteristică (8.5) din p. 8.2: $det(A - \lambda E) = 0$. Evident, $det(A - \lambda_0 E)$ este determinantul sistemului de ecuaţii liniare omogene (8.3) din p. 8.2, cu coeficienţi complecşi pentru $\lambda = \lambda_0$ şi care se poate rescrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda_0 x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Acest sistem omogen are determinantul egal cu zero, adică posedă o soluţie *nenulă*: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, care, în general, constă din numere complexe. În felul acesta,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = \lambda_0 \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1}$$

Înmulţind ambii membri ai fiecărei egalităţi $i$ din (8.1) cu numărul $\overline{\beta}_i$ conjugat cu numărul $\beta_i$ şi adunând membru cu membru toate egalităţile obţinute astfel, rezultă egalitatea

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\beta}_i. \tag{8.2}$$

Coeficientul pe lângă $\lambda_0$ în (8.2) este un număr real diferit de zero, deoarece reprezintă suma pătratelor unor numere reale, nu toate nule. Din (8.2) va rezulta că $\lambda_0$ este un număr real dacă vom demonstra că membrul stâng al egalităţii (8.2) este un număr real. Pentru aceasta este suficient de arătat că acest număr coincide cu conjugatul său.

Într-adevăr, folosind proprietăţile numerelor complexe conjugate şi faptul că matricea $A$ este simetrică cu elemente numere reale, adică $a_{ij} = a_{ji}$ şi $\overline{a}_{ij} = a_{ij}$, obţinem

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{\beta}_j\beta_i =$$

$$= \sum_{j,i=1}^{n} a_{ji}\overline{\beta}_i\beta_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i.$$

Observăm că penultima sumă a acestor egalităţi se obţine din cea precidentă prin substituirea reciprocă a indicilor $i$ şi $j$: $i \longleftrightarrow j$, ceea ce, evident, nu schimbă această sumă.

Aşadar, membrul stâng al egalităţii (8.2) este un număr real. Întrucât coeficientul pe lângă $\lambda_0$ în (8.2) este de asemenea real, rezultă că $\lambda_0$ este un număr real. ◁

C o n s e c i n ţ a 1. *Toate rădăcinile caracteristice ale matricei simetrice cu elemente numere reale sunt valori proprii ale acestei matrice.*

▷ Rezultă din teoremele 8.1 şi 8.5. ◁

C o n s e c i n ţ a 2. *Matricea simetrică totdeauna are vectori proprii.*

▷ Rezultă din definiţia 1 din p. 8.1 şi din consecinţa 1 a teoremei. ◁

**T e o r e m a 8.6.** *Vectorii proprii ai matricei simetrice cu elemente numere reale, corespunzători diferitelor valori proprii, sunt ortogonali.*

▷ Fie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ şi $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vectori proprii ai matricei simetrice $A$ de ordinul $n$, ale căror valori proprii corespunzătoare $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sunt diferite: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Atunci au loc relaţiile

$$AX = \lambda_1 X \qquad \text{şi} \qquad AY = \lambda_2 Y.$$

De aceea produsele scalare $(AX, Y)$ şi $(X, AY)$ sunt, respectiv, egale cu următoarele expresii:

$$\begin{aligned} (AX, Y) &= (\lambda_1 X, Y) = \lambda_1 (X, Y), \\ (X, AY) &= (X, \lambda_2 Y) = \lambda_2 (X, Y). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Pe de altă parte, notând

$$AX = Z, \qquad \text{sau} \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k;$$

$$AY = V, \qquad \text{sau} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad v_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i,$$

şi având în vedere că în $\mathbf{R}^n$ produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor coordonatelor corespunzătoare, obţinem

$$(AX, Y) = (Z, Y) = \sum_{i=1}^{n} z_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k) y_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_k y_i;$$

$$(X, AY) = (X, V) = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k = \sum_{k=1}^{n} x_k (\sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}x_k y_i.$$

Folosind faptul că matricea $A$ este simetrică, adică $a_{ik} = a_{ki}$, din aceste egalităţi avem că produsele scalare $(AX, Y)$ şi $(X, AY)$ sunt egale, adică are loc egalitatea caracteristică

$$(AX, Y) = (X, AY), \qquad \forall X, Y \in \mathbf{R}^n, \tag{8.4}$$

unde $A$ – matrice simetrică. Din egalităţile (8.3) şi (8.4) rezultă egalitatea:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(X, Y) = 0.$$

Deoarece $\lambda_2 \neq \lambda_1$, din această egalitate rezultă egalitatea cu zero a produsului scalar: $(X, Y) = 0$, adică vectorii $X$ şi $Y$ sunt ortogonali. ◁

Exemplul 1. Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei simetrice

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda E) = 0$ a matricei $A$ are forma

$$\begin{vmatrix} 11 - \lambda & -8 \\ -8 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Rezolvând-o obţinem că $-(11-\lambda)(1+\lambda)-64=0$, sau $\lambda^2-10\lambda-75=0$ are rădăcinile $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=15$, care sunt valori proprii ale matricei $A$.

Să aflăm vectorii proprii $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ corespunzători valorilor proprii aflate. Coordonatele $x_1$, $x_2$ ale vectorului $X$ se determină din ecuaţia matriceală $(A-\lambda E)X=0$, care în cazul dat se scrie sub forma

$$\begin{cases} (11-\lambda)x_1 - 8x_2 = 0, \\ -8x_1 - (1+\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda=\lambda_1=-5$ şi $\lambda=\lambda_2=15$, avem, corespunzător, două sisteme liniare:

$$\begin{cases} 16x_1-8x_2=0, \\ -8x_1+4x_2=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_1-8x_2=0, \\ -8x_1-16x_2=0. \end{cases}$$

Soluţiile generale ale acestor sisteme liniare sunt, respectiv, $x_1=\frac{1}{2}x_2$ şi $x_1=-2x_2$.

Notând $x_2=t$, obţinem vectorii proprii ai matricei $A$:

$$X_1=t\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad X_2=t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unde $t$ – orice număr ($t\neq 0$, $t\in\mathbf{R}$).

Aceşti vectori proprii sunt ortogonali, deoarece produsul scalar al lor este egal cu zero:

$$(X_1,X_2)=\frac{1}{2}t\cdot(-2t)+t\cdot t=0.$$

**T e o r e m a 8.7** (despre deplinătatea vectorilor proprii). *Pentru fiecare matrice simetrică de ordinul $n$ cu elemente din $\mathbf{R}$, există în spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ un sistem de $n$ vectori proprii ortogonali doi câte doi ai acestei matrice (bază în $\mathbf{R}^n$ formată din vectori proprii ortogonali).*

▷ Ne vom limita la demonstraţia teoremei pentru cazul $n=2$. În cazul general, această teoremă va rezulta ca o consecinţă a teoremei 9.16.

Aşadar, fie

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

o matrice simetrică de ordinul doi, adică $a_{12} = a_{21}$.

Din ecuaţia caracteristică a acestei matrice:

$$det(A - \lambda E) = 0, \qquad \text{sau} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}^2 + a_{11}a_{22} = 0$.

Rădăcinile acestei ecuaţii

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

sunt, evident, numere reale (ceea ce afirmă şi teorema 8.5). În baza consecinţei 1 a teoremei 8.5, $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sunt valori proprii ale matricei $A$. Dacă expresia de sub radical nu este egală cu zero, atunci $\lambda_1 \neq \lambda_2$ şi, conform teoremei 8.6, vectorii proprii $X_1$ şi $X_2$ ce aparţin valorilor proprii corespunzătoare $\lambda_1$ şi $\lambda_2$ sunt ortogonali (existenţa acestor vectori proprii rezultă din definiţia valorilor proprii). Dacă însă expresia de sub radical este egală cu zero, atunci $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11}$ şi matricea $A$ are forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Doi vectori proprii ortogonali ai acestei matrice, după cum e uşor de verificat, sunt

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{şi} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \triangleleft$$

Exemplul 2. Să se afle o bază a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^2$, formată din vectori proprii ortogonali normaţi ai matricei simetrice

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}.$$

În exemplul 1 am găsit că vectorii proprii ai matricei $A$ sunt:

$$X_1 = t\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{unde} \quad t \neq 0,\ t \in \mathbf{R}.$$

Pentru $t = 1$, avem următorii doi vectori proprii ai matricei $A$:

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aceşti vectori proprii, evident, sunt ortogonali (ceea ce confirmă şi teorema 8.6). Totodată, după cum se ştie, vectorii nenuli ortogonali sunt liniar independenţi. Normând aceşti vectori, obţinem o bază a spaţiului $\mathbf{R}^2$, formată din vectori proprii ortogonali normaţi. Aşadar, am aflat o bază ortonormată a spaţiului $\mathbf{R}^2$, formată din vectori proprii ai matricei simetrice $A$:

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad \overline{e}_2 = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

## 8.4. Matrice ortogonale

O matrice pătratică $A$ cu elemente numere reale se numeşte *matrice ortogonală* dacă

$$A'A = E, \tag{8.1}$$

unde $A'$ – matricea transpusă a matricei $A$; $E$ – matricea unitate de acelaşi ordin ca şi $A$.

Menţionăm că matricea unitate de orice ordin este ortogonală.

Matricea ortogonală posedă următoarele proprietăţi:

1) *Determinantul unei matrice ortogonale este egal cu* $\pm 1$:

$$det\, A = \pm 1.$$

▷ Fie $A$ matrice ortogonală. Conform teoremei despre determinantul produsului a două matrice, avem: $A'A = E$, $det\,(A'A) = det\, E$, $det\, A' \cdot det\, A = 1$. Deoarece $det\, A' = det\, A$, rezultă că $(det\, A)^2 = 1$, sau $det\, A = \pm 1$. ◁

2) *Matricea ortogonală este nedegenerată.*

▷ Rezultă din afirmaţia precedentă. ◁

3) *Condiţia* (8.1) *este echivalentă cu fiecare dintre următoarele condiţii:*

$$A' = A^{-1}; \tag{8.2}$$

$$AA' = E. \tag{8.3}$$

▷ Într-adevăr, înmulţind la dreapta ambii membri ai egalităţii (8.1) cu matricea inversă $A^{-1}$ a matricei $A$, în virtutea proprietăţii de asociativitate a înmulţirii matricelor şi a egalităţilor $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, avem $A'AA^{-1} = A^{-1}$, de unde rezultă $A' = A^{-1}$, iar din $AA^{-1} = E$ rezultă $AA' = E$. Şi reciproc, înmulţind la dreapta ambii membri ai egalităţii (8.2) cu $A$, rezultă egalitatea (8.1). Înmulţind la stânga ambii membri ai egalităţii (8.3) cu $A^{-1}$, obţinem egalitatea (8.2). ◁

4) *Matricea inversă a unei matrice ortogonale este ortogonală.*

▷ Dacă $A$ – matrice ortogonală, atunci avem:

$$A' = A^{-1}, \quad (A^{-1})'A^{-1} = (A')'A^{-1} = AA^{-1} = E,$$

adică $A^{-1}$ – matrice ortogonală. ◁

5) *Matricea transpusă a unei matrice ortogonale este ortogonală.*

▷ Dacă $A$ – matrice ortogonală, avem:

$$A' = A^{-1}, \quad (A')'A' = AA' = AA^{-1} = E,$$

adică matricea $A'$ – matrice ortogonală. ◁

6) *Produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.*

▷ Într-adevăr, dacă $A$ şi $B$ – matrice ortogonale de acelaşi ordin, atunci

$$(AB)'(AB) = B'A'AB = B'(A'A)B = B'EB = B'B = E,$$

adică $AB$ – matrice ortogonală. ◁

Ne amintim că în spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ produsul scalar a doi vectori arbitrari

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

l-am aflat prin formula

$$(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$

**Doi** vectori $X$ şi $Y$ sunt ortogonali dacă produsul scalar al lor este egal cu zero:

$$X \perp Y \Leftrightarrow (X, Y) = 0.$$

**T e o r e m a 8.8** (criteriu de ortogonalitate a unei matrice). *Ca o matrice pătratica cu elemente numere reale*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

să *fie ortogonală, este necesar şi suficient ca suma produselor binare ale elementelor corespunzătoare din coloanele distincte două câte două ale matricei A să fie egală cu zero, iar suma pătratelor elementelor oricărei coloane să fie egală cu unitatea:*

$$\sum_{k=1} a_{ki} a_{kj} = \begin{matrix} 0 & pentru & i \neq j, \\ 1 & pentru & i = j \end{matrix} \tag{8.5}$$

*oricare ar fi* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

▷ *Necesitatea.* Fie că matricea $A = (a_{kj})$ cu elemente numere reale, definită de tabloul (8.4), este ortogonală, adică este satisfăcută condiţia (8.1). Pentru matricea transpusă $A' = (a'_{ik})$, conform definiţiei, $a'_{ik} = a_{ki}$. Calculăm produsul $A'A = C = (c_{ij})$ cu ajutorul formulei înmulţirii matricelor:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}.$$

Luând în consideraţie formula (8.1), adică $A'A = C = E$, obţinem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{pentru} \quad i = j. \end{cases}$$

*Suficienţa.* Fie că elementele coloanelor matricei $A$ definite de tabloul (8.4) satisfac egalitatea (8.5). Aflăm produsul matricelor $A' = (a'_{ik})$ şi $A = (a_{kj})$, unde $a'_{ik} = a_{ki}$, adică matricea $A'A = C = (c_{ij})$. Conform condiţiei (8.5), avem

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{pentru} \quad i = j. \end{cases}$$

Aceasta înseamnă că $C = E$, sau $A'A = E$, adică $A$ – matrice ortogonală. ◁

În baza formulei (8.3), putem analog formula şi demonstra teorema 8.8 pentru linii:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq j, \\ 1 & \text{pentru } i = j, \end{cases} \tag{8.6}$$

oricare ar fi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Formulele (8.5) şi (8.6) înseamnă că în matricea ortogonală $A$ coloanele (liniile) distincte două câte două sunt ortogonale, iar lungimile lor (ca vectori) sunt egale cu unitatea. Însă, conform teoremei 3.21, un sistem ortogonal de vectori nenuli (adică în care orice doi vectori ai săi sunt ortogonali) este liniar independent. Deci, din cele expuse rezultă că toate coloanele (liniile) unei matrice ortogonale de ordinul $n$ pot fi considerate împreună drept *bază ortonormată* în $\mathbf{R}^n$.

Exemplul 1. Următoarele matrice sunt ortogonale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 8.9.** *Dacă $A$ este o matrice pătratică ortogonală de ordinul $n$, iar $X \in \mathbf{R}^n$ este un vector-coloană oarecare, atunci lungimea (sau norma) vectorului $AX$ este egală cu lungimea vectorului $X$:*

$$|AX| = |X|. \tag{8.7}$$

▷ Să demonstrăm, în prealabil, că pentru matricea ortogonală $A$ are loc egalitatea caracteristică:

$$(AX, AY) = (X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathbf{R}^n. \tag{8.8}$$

Într-adevăr, fie matricea ortogonală

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Considerăm în $\mathbf{R}^n$ baza canonică

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \overline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Această bază este ortonormată, deoarece

$$(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

În baza canonică $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ avem vectorii:

$$A\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \; A\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; A\overline{e}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Exprimând produsul scalar al vectorilor sistemului (8.9), obţinem egalitatea

$$(A\overline{e}_i, A\overline{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad i = j, \\ 0 & \text{pentru} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{8.10}$$

Pe de altă parte, pentru vectorii sistemului ortonormat $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ avem

$$(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad i = j, \\ 0 & \text{pentru} \quad i \neq j. \end{cases}$$

De aici şi din (8.10) rezultă egalitatea:

$$(A\overline{e}_i, A\overline{e}_j) = (\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad i = j, \\ 0 & \text{pentru} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{8.11}$$

Pentru vectorii arbitrari

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

în baza canonică $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$ avem:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i \qquad \text{şi} \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \overline{e}_j.$$

Pornind de la proprietăţile operaţiei de înmulţire a matricelor, avem

$$AX = \sum_{i=1}^{n} x_i (A\overline{e}_i) \qquad \text{şi} \qquad AY = \sum_{j=1}^{n} y_j (A\overline{e}_j),$$

de unde, în baza proprietăţilor produsului scalar şi a relaţiilor (8.11), rezultă egalităţile:

$$(AX, AY) = (\sum_{i=1}^{n} x_i (A\overline{e}_i), \sum_{j=1}^{n} y_j (A\overline{e}_j)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (X, Y).$$

Aşadar, pentru matricea ortogonală $A$ are loc formula (8.8). În particular, pentru $Y = X$,

$$(AX, AX) = (X, X) \quad \text{sau} \quad |AX| = |X|, \ \forall X \in \mathbf{R}^n. \ \triangleleft$$

C o n s e c i n ţ ă. *Toate valorile proprii ale unei matrice ortogonale $A$ sunt, în modul, egale cu unu:*

$$|\lambda| = 1.$$

$\triangleright$ Într-adevăr, dacă $\lambda$ este o valoare proprie cu vectorul propriu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ al matricei ortogonale $A$, atunci: $AX = \lambda X$, $|AX| = |\lambda X|$ şi, aplicând formula (8.7), obţinem $|\lambda X| = |X|$, unde $X \neq 0$.

Din ultima egalitate avem

$$(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \ldots + (\lambda x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

de unde rezultă

$$\lambda^2 = 1 \qquad \text{sau} \qquad |\lambda| = 1. \ \triangleleft$$

Să arătăm, prin exemple, că *matricea ortogonală poate să aibă, dar poate şi să nu aibă valori proprii reale, şi deci şi vectori proprii reali.*

Exemplul 2. Matricea ortogonală

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

are valori proprii, deoarece ea, în plus, este şi simetrică.

Ecuaţia caracteristică a acestei matrice are forma

$$det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (1-\lambda)^2 = 0,$$

de unde $\lambda = 1$ şi această rădăcină este valoare proprie a matricei $A$. Multiplicitatea acestui număr propriu este egală cu 2. Ecuaţia $(A - \lambda E)X = 0$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de unde se observă că orice pereche de numere $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ este soluţie a ei. Prin urmare, orice vector

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

unde $x_1, x_2$ – numere arbitrare ($|x_1| + |x_2| \neq 0$, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$), este vector propriu al matricei ortogonale $A$, corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$ a acestei matrice.

Exemplul 3. Matricea ortogonală

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

nu are valori proprii reale.

Într-adevăr, ecuaţia caracteristică a acestei matrice are forma

$$det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0,6-\lambda & -0,8 \\ 0,8 & 0,6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(0,6-\lambda)^2 + 0,64 = 0, \qquad \lambda^2 - 1,2\lambda + 1 = 0,$$

de unde $\lambda_{1,2} = 0,6 \pm \sqrt{-0,64} = 0,6 \pm 0,8i$, adică matricea $A$ nu are rădăcini caracteristice reale. Prin urmare, conform teoremei 8.1, matricea ortogonală $A$ nu are nici valori proprii reale. De aceea matricea $A$ nu are, de asemenea, nici vectori proprii reali.

## 8.5. Vectorii proprii ai matricelor nenegative

### 8.5.1. Matrice nenegativă, semipozitivă şi pozitivă

La cercetările matematice a proceselor economice, îndeosebi la analiza matematică a modelelor economice, se aplică pe larg matricele *cu elemente nenegative.*

O matrice $A = (a_{ij})$ de tipul $m \times n$ se numeşte *nenegativă* dacă toate elementele ei sunt nenegative, adică $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Această matrice o notăm simbolic astfel: $A \geqq 0$, unde $0$ – matricea nulă de acelaşi ordin ca şi $A$.

Matricea $A$ se numeşte *semipozitivă* dacă $A \geqq 0$ şi cel puţin un element $a_{ij} > 0$. Ea se notează simbolic astfel: $A \geq 0$.

Matricea $A$ se numeşte *pozitivă* dacă toate elementele ei sunt strict pozitive: $a_{ij} > 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Această matrice se notează prin simbolul $A > 0$.

Un vector se numeşte *pozitiv* dacă toate componentele sale sunt pozitive.

În cele ce urmează se admite ca valorile proprii ale matricei $A$ să fie complexe, adică toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice se consideră ca valori proprii.

### 8.5.2. Proprietăţile valorilor proprii şi ale vectorilor proprii ai unei matrice pozitive

1° **Teorema 8.10** (teorema lui Perron)[1]. *Dacă matricea pătratică $A$ este pozitivă ($A > 0$), atunci:*

1) *$A$ are o valoare proprie pozitivă $\lambda^*$ al cărei modul este strict mai mare decât modulele celorlalte valori proprii ale matricei $A$: $\lambda^* > 0$ şi $\lambda^* > |\lambda|$ pentru orice altă valoare proprie $\lambda$;*

2) *vectorul propriu $X^*$ corespunzător valorii proprii $\lambda^*$ poate fi ales pozitiv;*

3) *valoarea proprie $\lambda^*$ are multiplicitatea algebrică 1.*

2° *Pentru toate numerele $\mu > \lambda^*$, matricea $\mu E - A$ este nedegenerată, iar matricea $(\mu E - A)^{-1}$ este pozitivă.*

[1] O. Perron (1880–1975?) – matematician german.

3° *În afară de vectorii pozitivi $X^*$, nu există alţi vectori proprii cu componentele lor toate nenegative.*

Demonstraţia teoremei 8.10 poate fi găsită, de exemplu, în [25, pag. 260 – 261].

Să ilustrăm conţinutul acestei teoreme printr-un exemplu deja rezolvat.

Exemplu. Să se afle valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Această matrice este pozitivă: $A > 0$.

Pentru matricea dată (a se vedea exemplul 1 din p. 8.2.2) deja am găsit răspunsul că valorile proprii căutate ale ei sunt: $\lambda = \lambda_1 = 1$ şi $\lambda = \lambda_2 = 4$, iar vectorii proprii căutaţi ai acestei matrice, respectiv, sunt:

$$X = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

unde $t$ – variabilă independentă ($t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$).

De aici rezultă că valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei pozitive $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ posedă următoarele proprietăţi:

1. Avem:

   1) $\lambda^* = \lambda_2 = 4 > 0$ şi $\lambda^* = 4 > |\lambda_1| = 1$;

   2) $X^* = t\binom{1}{2}$ – vector pozitiv pentru $t > 0$;

   3) valoarea proprie $\lambda^* = 4$ are multiplicitatea 1.

2. Pentru $\mu > \lambda^* = 4$, de exemplu $\mu = 4,1$, avem:

$$\mu E - A = 4,1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,1 & -1 \\ -2 & 1,1 \end{bmatrix},$$

$$det\,(\mu E - A) = \begin{vmatrix} 2,1 & -1 \\ -2 & 1,1 \end{vmatrix} = 0,31 \neq 0.$$

Deci matricea $\mu E - A$ este nedegenerată.

Calculând inversa $(\mu E - A)^{-1}$ cu ajutorul matricei adjuncte, obţinem:

$$(\mu E - A)^{-1} = \frac{1}{det\,(\mu E - A)}(\mu E - A)^{a} = \frac{1}{0,31}\begin{bmatrix} 1,1 & 1 \\ 2 & 2,1 \end{bmatrix}.$$

Aşadar, $(\mu E - A)^{-1} > 0$.

3. Vectorii $X \neq X^*$ ai matricei $A$, adică $X = t\binom{1}{2}$ pentru $t < 0$ şi $X = t\binom{-1}{1}$, $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$, au unele dintre componentele lor negative.

### 8.5.3. Matrice reductibilă şi ireductibilă

O matrice $P$ de tipul $n \times n$ o vom numi *matrice permutare* dacă în fiecare linie şi fiecare coloană a ei este exact o unitate, iar toate celelalte elemente sunt egale cu zero.

De exemplu,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

este o matrice permutare. Matricea permutare, evident, poate fi obţinută din matricea unitate $E$ de acelaşi ordin printr-o permutare convenabilă a coloanelor sau liniilor ei. Nemijlocit poate fi verificată egalitatea $P'P = E$, adică matricea permutare numaidecât este *ortogonală*. Transformarea matricei $A$ de forma $P'AP$, unde $P$ – matrice permutare ($A$ şi $P$ sunt necesar de acelaşi tip $n \times n$), are ca rezultat simpla permutare a elementelor matricei $A$ şi, totodată, liniile şi coloanele se permută corespunzător.

Exemplu. Pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

avem:

$$P'AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Definiţie.** O matrice pătratică $A$ de ordinul $n$, pentru $n \geq 2$, se numeşte *matrice reductibilă* dacă există o astfel de matrice permutare $P$, încât

$$P'AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

unde $A_{11}$, $A_{22}$ – matrice pătratice (blocuri) de ordin mai mic decât $n$ (nu numaidecât de acelaşi ordin); 0 – matrice din zerouri. Dacă o astfel de matrice $P$ nu există, atunci matricea pătratică $A$ se numeşte *matrice ireductibilă*. De exemplu, matricea pătratică pozitivă $A > 0$ este ireductibilă, iar matricea $E$ – reductibilă.

Să formulăm fără demonstraţie următoarele proprietăţi de bază ale valorilor proprii şi ale vectorilor proprii ai matricelor nenegative.

Următoarea teoremă se referă la matricele semipozitive şi ireductibile. Ea reprezintă o generalizare a rezultatelor lui Perron ([25, pag. 260-261], [11, pag. 188]).

**Teorema 8.11** (teorema lui Frobenius)[2]. *Dacă o matrice pătratică semipozitivă $A \geq 0$ este ireductibilă, atunci:*

1) *$A$ are o valoare proprie pozitivă $\lambda^*$ a cărei multiplicitate (algebrică) este egală cu unitatea şi al cărei modul nu este mai mic decât modulele celorlalte valori proprii ale matricei $A$: $\lambda^* > 0$ şi $\lambda^* \geq |\lambda|$ pentru orice valoare proprie $\lambda$;*

2) *vectorul propriu $X^*$ corespunzător valorii proprii $\lambda^*$ poate fi ales pozitiv;*

3) *fie că $A$ are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (admise ca complexe). Dacă avem $k$ şi numai $k$ valori proprii $\lambda_1 = \lambda^*, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, egale în modul cu $\lambda^*$, atunci toate aceste valori proprii sunt distincte între ele şi sunt rădăcini ale ecuaţiei binome $\lambda^k - \lambda^{*k} = 0$.*

*Pentru $k > 1$, există o astfel de matrice permutare $P$, încât $P'AP$ are următoarea formă de matrice-bloc:*

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

[2] G. Frobenius (1849–1917) – matematician german.

*în care zerourile de pe diagonala principală reprezintă submatrice pătratice nule, care pot fi de ordine diferite.*

In teoremele 8.10 şi 8.11 se clarifică că structura matricei nenegative şi ireductibile $A$ depinde de numărul $k$ de valori proprii, egale, în modul, cu valoarea proprie maximă $\lambda^* = \max|\lambda_i|$, $1 \leq i \leq n$ (raza spectrală a matricei *A).*

Din teorema 8.10 şi din ultima parte a teoremei 8.11 rezultă că pentru $A > 0$ trebuie să avem $k = 1$.

Dacă $k = 1$, matricea ireductibilă $A \geq 0$ se numeşte *primitivă,* iar dacă $k > 1$, atunci ea se numeşte *ciclică* (sau *imprimitivă);* numărul natural $k \geq 1$ se numeşte indice de *ciclicitate* (sau *indice de imprimitivitate)* al matricei $A$. Dacă $A \geq 0$ este ireductibilă, atunci şi $A' \geq 0$ este ireductibilă. Dacă $A \geq 0$ este ireductibilă, iar $B > 0$, atunci $AB > 0$.

**Teorema 8.12.** *Matricea pătratică nenegativă $A \geq 0$ {nu numaidecât ireductibilă) are o valoare proprie nenegativă $\lambda^*$, care, în modul, nu este mai mică decât celelalte valori proprii ale matricei A: $\lambda^* \geq 0$ şi $\lambda^* \geq |\lambda|$ pentru orice valoare proprie $\lambda$. Vectorul propriu X* corespunzător valorii proprii $\lambda^*$ poate fi ales semipozitiv.*

Numărul propriu $\lambda^*$ se numeşte *maximal* sau *număr Perron* al matricei $A \geq 0$, vectorul propriu X* - *vectorul Perron al* matricei $A \geq 0$.

### 8.5.4- Matrice productivă şi stocastică

Referitor la vectorii $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ şi $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ din $R^n$, vom scrie

$X > Y$ clacă $X\{ > yi$ pentru toţi $i = 1,2,\ldots, n$.

O matrice pătratică $A \geq 0$ se numeşte *productivă* dacă există un vector $X \geq 0$, astfel că $X > AX$. Din ultima inegalitate rezultă imediat că $X > 0$. Matricele de acest fel se folosesc în programarea liniară.

Dacă matricea $A$ este productivă, atunci matricea $E - A$ este nedegenerată.

Pentru ca matricea $A \geq 0$ să fie productivă, este necesar şi suficient **ca $(E - A)^{-1} \geq 0$.**

O matrice pătratică $P \geq O$ se numește *stocastică* dacă suma elementelor fiecărei linii a matricei $P$ este egală cu unitatea. Matricele de acest tip apar în probleme din teoria probabilităților.

O matrice pătratică $P \geq 0$ este stocastică atunci și numai atunci când vectorul $(1, 1, \ldots, 1)'$ este propriu, corespunzând valorii proprii 1.

In modul, toate valorile proprii ale matricei stocastice $P$ sunt mai mici sau egale cu unu.

## Exerciții

**1.** Sa se afle valorile proprii și vectorii proprii ai matricei:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix};$$

$$c)\ A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Sa se demonstreze că vectorii

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad X_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unde $t \in \mathbf{R}, t \neq 0$, sunt vectori proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sa se afle valorile proprii ale acestor vectori proprii.

3. Sa se afle o baza ortonormată a spațiului $\mathrm{R}^2$, formată din vectori proprii ai matricei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Fie A o matrice patratica de ordinul *n*. Să se demonstreze că matricele $A'A$ și $AA'$ au aceleași valori proprii nenule.

CAPITOLUL 9

# Forme patratice

## 9.1. Noţiunile de baza. Scrierea matriceală a unei forme pătratice

La rezolvarea unor probleme practice şi teoretice deseori e necesar de a examina funcţii de tip special - aşa-numitele forme pătratice.

Considerăm $n$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (cărora li se pot atribui valori reale sau complexe). Compunem suma produselor lor $x_i x_j$, înmulţite cu numere oarecare $a_{ij}$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{9.1}$$

* **Definiţie.** Se numeşte *formă pătratică* de $n$ variabile (sau formă pătratică în $n$ nedeterminate) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o sumă (expresie, funcţie) de tipul (9.1), sau prescurtat:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{9.2}$$

adică un polinom omogen de gradul doi în aceste variabile cu coeficienţi numerici.

Uneori forma pătratică se scrie astfel

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Numerele $a_{ij}$ din (9.1) se numesc *coeficienții* formei pătratice. Unii dintre ei pot fi egali cu zero.

Întrucât $x_i x_j = x_j x_i$, rezultă că în suma termenilor asemenea

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j \quad (i \neq j),$$

coeficienților $a_{ij}$ și $a_{ji}$ ce figurează în (9.1), păstrând suma lor, li se pot atribui diferite valori. In virtutea acestui fapt, forma pătratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pentru $n \geq 2$, poate fi. scrisa sub forma de sumă (9.1) în o mulțime infinită de feluri. Insă *fiecare formă pătratică de n variabile admite o scriere univocă de tipul* (9.1), *unde* $a_{ij} = a_{ji}$ Într-adevăr, aceasta totdeauna se poate obține, de exemplu, adunând termenii asemenea $a_{ij}x_i x_j$ și $a_{ji}x_j x_i$ și împărțind suma lor la 2:

$$a_{ij}x_i x_j + a_{ji}x_j x_i = (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}x_i x_j +$$

$$+\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}x_j x_i = a'_{ij}x_i x_j + a'_{ji}x_j x_i,$$

unde $a'_{ij} = a'_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$. Este clar că la o astfel de redefinire a coeficienților, valoarea $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ va rămâne aceeași.

Univocitatea acestei scrieri rezultă din definiția egalității polinoamelor, care înseamnă egalitatea coeficienților termenilor asemenea.

Așadar,(fără a. restrânge generalitatea,) chiar de la început coeficienții *aij* și *a,ji* pot fi consideraţi egali:

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{9.3}$$

pentru *i,j* = 1,2,..., *n*.

Formula (9.1) sau (9.2) cu coeficienții care satisfac condiția (9.3) o vom numi *forma pătratică simetrică* $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Exemplul 1. Pentru forma pătratică

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 5x_1x_2 + 4x_1x_3$$

avem $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 5/2$, $a_{13} = a_{31} = 2$ $a_{22}$ 0 , $a_{23}$ $a_{32}$ = 0, $a_{33}$ = -1. Prin urmare, forma pătratică simetrică Q $(x_1, x_2, x_3)$ va $1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{5}{2}x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{5}{2}x_2x_1 + 2x_3x_1 - x_3^2$

Compunem matricea din coeficienții formei patratice (9.1):

$$A = (a,ij) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

În virtutea condiției (9.3), matricea $A$ este simetrică (elementele ei simetrice față de diagonala principală sunt egale între ele).

într-adevăr, dacă matricea $A$ din coeficienții formei pătratice $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nu este simetrică, atunci $1/2(A + A') = A_1$ este matrice simetrică, unde $A'$ - matricea transpusă a matricei $A$. Atunci forma $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ poate fi transformată în forma pătratică cu matricea simetrică $A_1$

De obicei, forma pătratică $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se scrie anume cu ajutorul matricei simetrice și, în felul acesta, fiecare formă pătratică o vom presupune simetrică.

Matricea simetrică $A = (a_{ij})$ compusă din coeficienții formei pătratice o vom numi *matricea atașata* formei pătratice, sau *matricea formei pătratice."* Formei pătratice (9.1) de $n$ variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$ îi corespunde unica matrice simetrică $A$. Reciproc, fiecărei matrice simetrice (9.4) (cu exactitate de până la notarea variabilelor) îi corespunde unica formă pătratică (9.1), având elementele matricei $A$ drept coeficienții ei. Cu alte cuvinte, se spune că expresia $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, prezentară prin formula (9.1), este *forma pătratică de matrice A.*

Evident, matricea $A$ este simetrică atunci și numai atunci când ea coincide cu matricea transpusă $A'$, adică

$$A' = A. \quad (9.5)$$

Forma pătratică $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește *reală* dacă matricea, simetrică $A$ a sa are elementele numere reale, adică dacă toți coeficienții formei pătratice simetrice $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sunt numere reale, și *complexă,* dacă acești coeficienți sunt numere complexe.

In cele ce. urmează, dacă nu va li făcută o mențiune deosebită, totdeauna forma pătratică o vom considera reală.

Se numește *rangul formei pătratice* rangul $r$ al matricei sale.

Forma pătratică de $n$ variabile se numește *nedegenerată* dacă matricea ei este nedegenerată, adică $r = n$, și *degenerată,* dacă $r < n$.

E x e m p l u l 2. Să se scrie matricea atașată formei pătratice
$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2$

și să se afle rangul ei.

în cazul dat, $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 3$, $a_{13} = a_{31} = -2$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = a_{32} = 4$, $a_{33} = -1$, de aceea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rangul acestei matrice este egal cu trei: $r = 3$. Prin urmare, și rangul formei pătratice $Q(x_1, x_2, x_3)$ este egal cu trei.

Forma pătratică (9.2) poate fi scrisă sub formă matriceală în următorul fel:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX, \tag{9.6}$$

unde $A = (a_{ij})$ - matricea atașată acestei forme pătratice, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ matricea-coloană din necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $X'$ matricea obținută prin transpunerea matricei $X$, adică matricea-linie din aceleași variabile. Expresia $X'AX$ se numește *scrierea matriceală a formei pătratice* (9.2), într-adevăr,

$$X'AX = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n,$$

$$\ldots, a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

adică avem formula (9.6).

In baza (9.6), forma pătratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o vom nota uneori -scurt prin simbolul $Q(X)$, adică

$$Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX,$$

unde $X' = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A$ - matricea acestei forme pătratice.

Noțiunea de formă pătratică poate fi generalizată în următorul mod. Polinomul $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numește *formă de gradul p* (sau *polinom omogen)* de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dacă toți termenii săi au unul și același grad $p$ în raport cu totalitatea acestor necunoscute. Formele de gradul întâi se numesc *liniare,* de gradul doi - *pătratice,* de gradul trei - *cubice* etc.

Vom examina numai forme liniare și pătratice.

## 9.2. Transformare liniară a variabilelor

**Definiție.** Se numește *transformare liniară omogenă a variabilelor,* sau simplu *transformare liniară* (sau *substituție liniară),* operația prin care se trece de la un sistem de $n$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la un sistem de $n$ variabile $y_1, y_2, \ldots, y_n$, trecerea fiind definită prin relații de forma:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n, \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n, \end{cases} \tag{9.1}$$

sau prescurtat

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.2;}$$

unde variabilele "vechi" se exprimă liniar prin cele "noi" cu coeficienți numerici $b_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Formulele (9.1) pot fi scrise sub forma matriceală în felul următor:

$$\boldsymbol{X = BY,} \tag{9.3}$$

unde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

De menționat că fiecare dintre formele (9.1), (9.2), (9.3) transformă sistemul de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în sistemul de variabile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Totodată, dacă se examinează o formă pătratică reală. *Q(X),* atunci transformarea liniară (9.1) totdeauna o vom presupune reală, adică coeficienții ei *bij* sunt numere reale.

Matricea pătratică

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

compusă din coeficienții transformării liniare a variabilelor (9.1) se numește *matricea atașata* transformării liniare (9.1), sau *matricea transformării liniare* (9.1).

*Transformarea liniară a variabilelor* (9.1) *se determină pe deplin* (cu exactitate de până la notarea, variabilelor) *de către matricea sa B.*

Într-adevăr, două transformări liniare ale necunoscutelor cu una și aceeași matrice *B* pot să se deosebească una de cealaltă numai prin literele admise pentru notarea variabilelor. Reciproc, fiind dată o matrice pătratică *B* de ordinul *n,* putem scrie transformarea liniară a variabilelor pentru care această matrice servește ca matrice a coeficienților ei. ◁

**Teorema 9.1.** *Rezultatul a două transformări liniare succesive a variabilelor cu matricele B și P, respectiv, va fi de asemenea o transformare liniară a variabilelor cu matricea BP.*

t> Fie transformarea liniară a variabilelor $x_i$ în variabilele $y_j$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.4}$$

cu matricea. $B = (b_{ij})$. Fie că după transformarea, liniară (9.4) este efectuată transformarea liniară a variabilelor $y_j$ în variabilele *Zk*-

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} p_{jk} z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.5}$$

cu matricea $P = (p_{jk})$. înlocuind în (9.4) expresiile pentru $y_j$ din (9.5), obținem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{jk} z_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ij} p_{jk} z_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_{jk}\right) z_k. \quad (9.6)$$

Sub formă matriceală egalitățiile (9.4)—(9.6) pot fi scrise în felul următor: $X = BY$, $Y = PZ$, $X = B(PZ) = (BP)Z$ sau $X = QZ$, unde $Q = BP$., De aici se observă că variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se exprimă liniar prin variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_n$, adică (9.6) este o transformare liniară a variabilelor $x_i$ în variabilele $z_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ cu matricea $BP$. ◁

Exemplul 1. Rezultatul transformărilor liniare succesive

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + 3y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_2, \\ y_2 = 4z_1 + 2z_2 \end{cases}$$

cu matricele $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ și $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, respectiv, va fi transformarea liniară

$$\begin{cases} x_1 = 2(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2) = -2z_1, \\ x_2 = (z_1 + z_2) + 3(4z_1 + 2z_2) = 13z_1 + 7z_2 \end{cases}$$

cu matricea $Q = BP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}$.

Exemplul 2. Să se afle rezultatul transformărilor liniare succesive

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ x_2 = y_1 + 3y_2, \\ x_3 = 5y_2 - y_3 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} y_1 = 2z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = -2z_2. \end{cases}$$

înmulțind matricele acestor transformări, avem

$$BP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix},$$

de aceea transformarea liniară căutată are forma

$$\begin{cases} x_1 = 2z_1 - 5z_2, \\ x_2 = 2z_1 + 3z_2 - 4z_3, \\ x_3 = 7z_2 - 5z_3. \end{cases}$$

## 9.3. Modificarea formei pătratice prin intermediul transformării liniare a variabilelor

Să clarificăm cum se va, schimba forma pătratică (9.1) din p. 9.1, dacă în ea în loc de necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vom scrie expresiile, lor în $y_1, y_2, \ldots, y_n$, conform formulelor (9.1) din p. 9.2. Răspuns ne dă următoarea teoremă.

**Teorema 9.2.** *Forma pătratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de matrice. A după aplicarea asupra ei a transformării liniare $X = BY$ de matrice $B$ se transformă în forma pătratică $L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de matrice $C = B'AB$.*

▷ Substituirea variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în forma pătratică (9.1) din p. 9.1 prin expresiile lor în $y_1, y_2, \ldots, y_n$, conform formulelor (9.1) din p. 9.2 (scrise sub forma matriceală), înseamnă că în forma pătratică $Q(X) = X'AX$ substituim $X = BY$ (a se vedea formulele (9.6) din p. 9.1 şi (9.3) din p. 9.2). Avem $Q(X) = X'AX = (BY)'A(BY) = Y'(B'AB)Y$, sau

$$Q(X) = Y'CY, \tag{9.1}$$

unde $C = B'AB$.

Matricea $C$ e simetrică, deoarece luând în considerație (9.5) din p. 9.1, urmează egalitățile

$$C = (B'AB)' = B'A'B = B'AB = C.$$

In baza formulei (9.6) din p. 9.1, membrul drept al egalității (9.1) este scrierea matriceală a formei pătratice $L(Y) = Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de matrice $C$. în felul acesta, avem $Q(X) = X'AX = Y'CY = L(Y)$, unde $C = B'AB$. ◁

Să introducem următoarele noțiuni importante:

Transformarea liniară (9.1) din p. 9.2 cu matricea $B$ se numește *nedegenerată* dacă $\det B \neq 0$.

Forma pătratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *congruentă*[1] cu forma pătratică $L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi scriem

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim L(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{9.2}$$

*congruentis* (lat.) - care coincide.

dacă există o transformare nedegenerată liniară (omogenă) a variabilelor care transformă $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în $L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

In baza teoremei 9.2, relația (9.2) înseamnă că pentru formele pătratice $Q(X)$ și $L(Y)$ de matrice $A$ și $C$, respectiv, există o anumită transformare nedegenerată liniara $X = BY$, $det\ B \neq 0$, încât are loc

$$Q(X) = X'AX = Y'CY = L(Y), \qquad (9.3)$$

unde $C = B'AB$.

Noțiunea de congruență a formelor pătratice posedă următoarele proprietăți:

1) $Q(X) \sim Q(X)$ *(reflexivitate);*

2) *dacă* $Q(X) \sim L(Y)$, *atunci* $L(Y) \sim Q(X)$ *(simetrie);*

3) *dacă* $Q\{X) \sim L(Y)$, $L(Y) \sim M(Z)$, afunci $Q(A') \sim M(Z)$ *(tranzitivitate).*

Adevărul primei proprietăți este evident: forma pătratică se transformă în ea însăși de către transformarea identică, care este nedegenerată.

A doua proprietate rezulta din faptul că dacă forma pătratică $Q(X)$ se transformă în forma, pătratică $L(Y)$ de către substituția liniară $X = BY$, $det\ B \neq 0$, atunci reciproc $L(Y)$ se transformă în $Q(X)$ de către substituția liniară inversă $Y = B^{-1}X$, $det\ B^{-1} \neq 0$, deoarece efectuarea succesivă a acestor substituții liniare este substituția identică: $X = BY = B(B^{-1}X) = EX$. A treia proprietate rezultă din faptul că dacă $Q(X)$ se transformă în $L(Y)$ de către substituția liniară $X = B_1Y$, $det\ B_1 \neq 0$, iar $L(Y)$ în $M(Z)$ de către substituția liniară $Y = B_2Z$, $det\ B_2 \neq 0$, atunci, în baza teoremei 9.1, $Q(X)$ se transforma nemijlocit în $M(Z)$ de către substituția $X = CZ$, unde $C = B_1B_2$, $\det C = \det B_1 \cdot det\ B_2 \neq 0$ (a se vedea teorema 5.4.).

Sunt adevărate următoarele proprietăți ale formelor pătratice:

4) *Determinanții matricelor formelor pătratice congruente nedegenerate reale au același semn.*

Intr-adevăr, deoarece conform teoremei 9.2 matricele $A$ și $C$ a două forme pătratice congruente sunt legate prin relația $C = B'AB$, unde $B$ - matricea transformării liniare care transformă una dintre aceste forme în cealaltă și totodată $B$ - matrice nedegenerată, deducem că

$det\ C = det\ (B'AB) = det\ B' * det\ A * det\ B = (detB)^2 * det\ A,$

de unde rezultă $det\ C \cdot det\ A > 0$. ◁

5) *Formele pătratice congruente au același rang.*

Într-adevăr, deoarece rangul matricei nu se schimbă la înmulțirea ei la stânga sau la dreaptă cu o matrice nedegenerată [24, pag. 101] și fiindcă conform teoremei 9.2 $C = B'AB$, rezultă că $r(C) = r(A)$. ◁

## 9.4. Reducerea formei pătratice la forma canonică

Forma patratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *formă canonica*[2] (sau are *forma canonică* sau *diagonală)* dacă ea conține numai termenii cu pătratele variabilelor (și deci $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$), adică

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2,$$

unde unii dintre coeficienții $a_{ii}$ pot să fie nuli.

Matricea atașată acestei forme pătratice, evident, este o matrice diagonală.

0 formă canonică se numește *formă normală* (sau are *forma normala)* dacă coeficienții ei, diferiți de zero, ai pătratelor variabilelor sunt egali cu +1 sau cu - 1.

Exemplu. Forma patratică $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 + 6x_3^2 - 7x_4^2$, pentru care $a_{11} = 5$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 6$, $a_{44} = -7$, are forma canonică. Forma patratică $Q1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 - x_4^2$ este normală, deoarece $a_{11} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 1$, $a_{44} = -1$.

Aflarea după forma patratică dată a formei canonice congruente cu ea se numește *reducerea* (sau *aducerea) formei pătratice la forma canonică.*

Presupunem, mai întâi, că forma patratică $Q(X)$ printr-o transformare nedegenerată liniară oarecare $X = BY$ este redusă la forma canonică:

$$Q(X) \sim L_1(Y) = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + \ldots + b_{nn} y_n^2. \qquad (9.1)$$

[2] canon (grec) - model, tip.

Unii dintre coeficienții $b_{ii}$ se poate întâmpla să fie egali cu zero. Are loc

**Teorema 9.3.** *Numărul coeficienților diferiți de zero în forma pătratică canonică, la care printr-o transformare nedegenerată liniară se reduce forma pătratică Q(X), este egal cu rangul r al formei pătratice Q(X).*

▷ Fie că rangul formei pătratice $Q(X)$ este $r$. In baza proprietăților formelor pătratice congruente (p. 9.3), rangurile formelor pătratice congruente $Q(X)$ și $L1(Y)$ din (9.1) sunt egale între ele. Deoarece matricea atașată formei canonice $L1(Y)$ este diagonală și rangul ei este de asemenea egal cu r, aceasta înseamnă că numărul coeficienților diagonali diferiți de zero ai acestei matrice este egal cu r.

Efectuând în forma canonică (9.1) o renumerotare convenabilă a variabilelor (care este o substituție liniară nedegenerată) și a coeficienților respectivi, vom izbuti ca forma canonică $Q(X)$ să capete următoarea formă definitivă

$$Q(X) \sim L(Y) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_r y_r^2, \tag{9.2}$$

unde $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $r$ - rangul formei Q(X), $r \leq n$, $n$ - numărul necunoscutelor formei $Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ◁

**Teorema** 9.4 (teorema fundamentală despre formele pătratice). *Orice formă pătratică se poate aduce la forma canonică efectuând asupra ei o transformare liniară nedegenerată. Dacă se examinează o formă pătratică reală, atunci toți coeficienții transformării liniare indicate pot fi considerați reali.*

Vom demonstra prin metoda inducției după numărul de variabile. Pentru $n = 1$, teorema este adevărată, deoarece forma pătratică de o singură variabilă are aspectul $Q(xi) = a_{11}x_1^2$, adică este canonică. In acest caz, transformarea liniară nedegenerată despre care este vorba în teoremă este transformarea identică $\varepsilon$: $x_1 = \varepsilon x_1$

Să demonstrăm teorema pentru forme pătratice de $n$ variabile, considerând că ea este deja demonstrată pentru formele cu un număr mai mic de variabile. Fie forma pătratică de $n$ variabile

$$Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{9.3}$$

Sunt posibile două cazuri: a) forma conține pătratul cel puțin a uneia dintre variabile; b) forma nu conține pătrate ale variabilelor,

Cazul a) are loc când printre coeficienții $a_{ii}$ ai pătratelor necunoscutelor $x_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, adică printre elementele situate pe diagonala principală a matricei formei $Q(X)$, sunt și diferite de zero. Fără a restrânge generalitatea, putem admite că este diferit de zero coeficientul $a_{11}$. Intr-adevăr, dacă $a_{11} = 0$, dar $a_{ii} \neq 0$ pentru un $i$ oarecare, putem schimba numerotarea variabilelor (ceea ce este o substituție liniară nedegenerată) și a coeficienților respectivi, în urma căreia obținem forma congruentă cu cea inițială, în care deja va fi. $a_{11} \neq 0$.

Așadar, considerăm, cazul a), când $a_{11} \neq 0$. Reprezentăm forma pătratică $Q(X)$ astfel

$$Q(X) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{\lambda>1,\mu>1} a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu =$$

$$= a_{11}(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n) + \sum_{\lambda>1,\mu>1} a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu =$$

$$= a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + \mathcal{J},$$

unde $J$ - diferența dintre $Q(X)$ și acest pătrat complet. Expresia

$$a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 k \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2,$$

care este o formă pătratică de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, conține aceiași termeni cu variabila $x_1$ ca și $Q(X)$, de aceea diferența

$$Q(X) - a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 = \mathcal{J}$$

va fi o formă pătratică care nu conține $x_1$, dar numai $x_2, \ldots, x_n$, de unde rezultă

$$Q(X) = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 + \mathcal{J}(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Efectuăm substituția liniară prin formulele

$$\begin{cases} t_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ t_i = x_i \quad \text{pentru} \quad i = 2,3,\ldots,n. \end{cases} \tag{9.4}$$

Formulele (9.4) reprezintă, evident, o transformare liniară ce exprimă $t_i$ prin $x_j$ și totodată este nedegenerată, fiindcă determinantul ei este egal cu $1 \neq 0$. Transformarea inversă transformării (9.4) de asemenea va fi o transformare liniară nedegenerată care exprimă $x_j$ prin $t_i$: ea transformă forma pătratică $Q(X)$ de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în forma pătratică congruentă cu ea, de variabilele $t_1, t_2, \ldots, t_n$, adică

$$Q(X) \sim a_{11}t_1^2 + J(t_2, t_3, \ldots, t_n). \tag{9.5}$$

Întrucât forma pătratică $J$ depinde de un număr mai mic de variabile, după presupunerea inducției, printr-o transformare liniară

$$t_i = \sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_j \ (i = 2,3,\ldots,n)$$

ea poate fi redusă la forma canonică de variabilele $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Prin urmare, transformarea liniară nedegenerată

$$t_1 = y_1, \quad t_i = \sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_j \ (i = 2,3,\ldots,n) \tag{9-6}$$

transformă forma pătratică (9.5) de variabilele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ în forma pătratică canonică congruentă cu ea. de variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$Q(X) \sim L(Y) = c_{11}y_1^2 + c_{22}y_2^2 + \ldots + c_{nn}y_n^2, \tag{9.7}$$

unde $c_{ii}$ - coeficienți numerici.

Cazul b) are loc când în forma pătratică $Q(X)$ toți coeficienții $a_{ii} = 0 \ (i = 1,2,\ldots,n)$. Însă printre ceilalți coeficienți ai ei sunt și diferiți de zero: $a_{kj} \neq 0$ pentru unii indici $k$ și $j$, $k \neq j$., Fără a restrânge generalitatea, putem admite că $a_{12} \neq 0$. într-adevăr, dacă e necesar, atunci, schimbând numerotarea variabilelor și a coeficienților respectivi, putem considera $a_{12} \neq 0$.

Așadar, fie $a_{12} \neq 0$. Acest caz cu ajutorul transformării liniare a variabilelor

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_i = z_i \quad (i = 3,4,\ldots,n) \tag{9.8}$$

se reduce la cel precedent. Intr-adevăr, această transformare este nedegenerată, deoarece determinantul ei este egal cu $2 \neq 0$. Ea transformă

forma pâtratică $Q(X)$ în forma congruentă cu ea $Q_1(Z)$ : $Q(X) \sim Q_1(Z)$. Termenul $2a_{12}x_1x_2$ al acesteia devine după transformare

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2,$$

adică în forma pătratică $Q_1(Z)$ vor apărea coeficienți diferiți de zero ai pătratelor variabilelor $z_1$ și $z_2$ și ei nu pot să se reducă nici cu unul din ceilalți termeni, deoarece în fiecare din ultimii intră cel puțin una dintre necunoscutele $z_3, \ldots, z_n$. Acum forma pătratică $Q_1(Z)$ ține de cazul examinat a), adică încă prin una sau două transformări liniare nedegenerate, efectuate succesiv, forma $Q_1(Z)$ poate fi adusă la forma (9.7). In felul acesta, forma pătratică $Q(X)$ prin două sau trei transformări liniare nedegenerate, care pot fi înlocuite cu o singură transformare liniară a variabilelor - produsul lor, se aduce la forma canonică, adică la forma de sumă a pătratelor variabilelor cu coeficienți corespunzători. Numărul acestor pătrate nenule este egal (conform teoremei 9.3) cu rangul $r$ al formei $Q(X)$.

Dacă, în plus, forma pătratică $Q(X)$ este reală, atunci coeficienții, atât în forma canonică (9.7) a formei $L(Y)$, cât și în transformarea liniară care aduce $Q(X)$ la această formă, vor fi reali. Într-adevăr, și transformarea liniară inversă la (9.4), și transformările liniare (9.6) și (9.8) au coeficienți reali. Prin acești coeficienți se exprimă coeficienții produsului acestor transformări, adică ai transformării variabilelor care reduce nemijlocit forma pătratică $Q(X)$ la forma canonică $L(Y)$. În baza teoremei 9.2, coeficienții formei $L(Y)$ de asemenea sunt reali. ◁

Conform definiției, forma normală a formei pătratice reale reprezintă o sumă algebrică a câtorva pătrate ale variabilelor cu coeficienții $+1$ sau $-1$.

Teorema 9.5. *Orice formă pătratică reală se poate aduce prvntr-o transformare liniară nedegenerată convenabilă, cu coeficienți reali, la forma normală.*

▷ Pe baza teoremei 9.4, o formă pătratică reală $Q(X)$ printr-o transformare liniară nedegenerată reală

$$X = BY \tag{9.9}$$

poate fi adusă la forma canonică. Schimbând, dacă trebuie, numerotarea variabilelor, reprezentăm această formă canonică în felul

următor:

$$Q(X) \sim L(Y) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2$$

($0 \leq k \leq r$, $r$ - rangul formei pătratice $Q(X)$, $r \leq n$), unde toate numerele $c_i$ ($i = 1,2,\ldots,r$) sunt pozitive. Atunci transformarea liniară nedegenerată

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}} z_i \ (i = 1,2,\ldots,r), \quad y_j = z_j (j = r+1,\ldots,n) \tag{9.10}$$

aduce forma pătratică obținută la forma normală:

$$Q(X) \sim z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{9-11}$$

Numărul pătratelor de aici este egal cu rangul $r$ al formei inițiale. Rezultatul îndeplinirii succesive a celor trei transformări liniare nedegenerate: (9.9), renumerotarea variabilelor și (9.10) - produsul lor, va fi, la rândul său, iarăși o transformare liniară nedegenerată cu coeficienți reali și ea reduce forma $Q(X)$ nemijlocit la forma normală. (9.11). ◁

## 9.5. Reducerea formei pătratice la forma canonică prin metoda separării succesive a pătratelor complete (metoda lui Lagrange)[3]

Metoda folosită la demonstrarea teoremei fundamentale 9.4 poate fi. aplicată în exemple concrete pentru aducerea efectivă a formei pătratice $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la forma canonică. Pentru aceasta trebuie numai după procesul a) în loc de inducție din nou de aplicat procesul a) sau b). Astfel, aplicând succesiv procesul a) și completandu-l în cazuri necesare cu procesul b), peste un număr finit de r pași ($r \leq n$) vom putea aduce forma pătratică dată la forma canonică. Această metodă simplă de aducere a formei pătratice la forma canonică se numește *metoda separării pătratelor* (sau *metoda lui Lagrange),*. Metoda lui Lagrange constă în separarea în forma pătratică a pătratelor complete.

Exemplul 1. Este dată forma pătratică

$$Q(X) = Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 9x_2x_3. \tag{9-1}$$

[3] J. Lagrange (1736-1813) - matematician francez.

Să se afle forma pătratică canonică congruentă cu forma dată şi transformarea care aduce forma $Q(X)$ la forma canonică aflată.

Aplicăm metoda lui Lagrange. Deoarece printre coeficienţii $a_{ii}$ sunt şi diferiţi de zero, avem cazul a) $a_{ii} \neq 0$ pentru unii indici $i$. Folosim inegalitatea cu zero a coeficientului lui $x_1^2$: $a_{11} = 2 \neq 0$. Forma pătratică o reprezentăm sub forma

$$Q(X) = 2(x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 9x_2x_3 =$$

$$= 2(x_1^2 - 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2) +$$

$$+ 2x_2^2 + 8x_3^2 - 9x_2x_3 = 2(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2x_3.$$

Aplicând substituţia liniară

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

adică efectuând transformarea liniară pentru care inversa va avea matricea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

vom aduce forma $Q(X)$ la forma $Q(X) \sim 2y_1^2 - y_2y_3$. Deocamdată s-a separat pătratul variabilei $y_1$ şi forma pătratică nouă $Q_1(y_2, y_3) = -y_2y_3$. Deoarece în forma $Q_1(Y)$ lipsesc pătratele necunoscutelor, avem cazul b) $a'_{ii} = 0$ $(i = 2, 3)$, $a'_{kj} = a'_{23} = -1/2 \neq 0$. îndeplinim transformarea liniară nedegenerată

$$y_2 = z_2 - z_3, \quad y_3 = z_2 + z_3, \quad y_1 = z_1$$

cu matricea

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obţinem

$$Q(X) \sim 2z_1^2 - z_2^2 + z_3^2, \tag{9.2}$$

adică forma iniţială $Q(X)$ este adusă la forma canonică.

Transformarea liniară care aduce (9.1) îndată la forma (9.2) va avea matricea sa - produsul

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin verificare nemijlocită ne putem convinge că transformarea liniară nedegenerată (deoarece *det (BC)* $= 2 \neq 0$)

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - 3z_3, \\ x_2 = \quad z_2 - \quad z_3, \\ x_3 = \quad z_2 + \quad z_3 \end{cases}$$

preface (9.1) în (9.2).

Exemplul 2. Să se aducă la forma canonică forma pătratică

$$Q(X) = Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 5x_2x_3.$$

Aplicăm metoda lui Lagrange. întrucât în această formă lipsesc pătratele variabilelor, efectuăm mai întâi transformarea liniară nedegenerată - procesul b):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

în urma căreia obținem

$$Q(X) \sim Q_1(Y) = 2y_1^2 - 2y_1y_3 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Acum coeficientul $y_1^2$ este diferit de zero și de aceea din această formă se poate separa pătratul unei necunoscute, adică îndeplinim procesul a). Reprezentăm forma $Q_1(Y)$ în modul următor

$$Q_1(Y) = 2(y_1^2 - y_1y_3 + (\frac{1}{2}y_3)^2 - (\frac{1}{2}y_3)^2) - 2y_2^2 - 8y_2y_3 =$$

$$= 2(y_1 - \frac{1}{2}y_3)^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - 2y_2^2 - 8y_2y_3.$$

Efectuând substituția

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

aducem forma $Q_1(Y)$ la următoarea forma

$$Q(X) \sim Q_1(Y) \sim Q_2(Z) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}z_3^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3.$$

Deocamdată s-a separat numai pătratul variabilei $z_1$, întrucât forma mai conține încă produsul celorlalte două variabile. Utilizând inegalitatea cu zero a coeficientului lui $z_2^2$, încă o dată aplicăm procesul a) indicat mai sus. Reprezentăm forma $Q_2(Z)$ astfel

$$Q_2(Z) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}z_3^2 - 2(z_2^2 + 4z_2z_3 + (2z_3)^2 - (2z_3)^2) =$$

$$= 2z_1^2 - 2(z_2 + 2z_3)^2 + \frac{15}{2}z_3^2.$$

Prin substituția

$$\begin{cases} t_2 = z_2 + 2z_3, \\ t_1 = z_1, \\ t_3 = z_3 \end{cases}$$

reducem, în sfârșit, forma inițială $Q(X)$ la forma canonică

$$Q)X) \sim Q_2(Z) \sim Q_3(T) = 2t_1^2 - 2t_2^2 + \frac{15}{2}t_3^2.$$

## 9.6. Legea inerției formelor pătratice reale

Forma canonică la care este redusă forma pătratică nu este pentru ea determinată în mod univoc: fiecare formă pătratică poate fi adusă la forma canonică prin diverse moduri și totodată aceste forme canonice sunt diferite. Așa, de exemplu, forma pătratică examinată anterior $Q(X) = 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 5x_2x_3$ prin transformarea liniară nedegenerată a variabilelor

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + 5t_2 - t_3, \\ x_2 = \quad 3t_2, \\ x_3 = t_1 - 2t_2 + t_3 \end{cases}$$

se reduce la forma canonică

$$Q(X) \sim 3t_1^2 + 30t_2^2 - 3t_3^2$$

distinctă de cea obținută anterior. Forma patratică reala $Q(X)$ prin diferite moduri, adică prin diferite transformări liniare reale nedegenerate ale variabilelor, poate fi redusa de asemenea și la forma normală, însă cu exactitate de până la numerotarea și notarea variabilelor ea se

reduce numai la o singură formă normală, ceea ce confirma următoarea teorema importantă.

T e o r e m a 9.6 (l e g e a i n e r ț i e i). *Numărul de pătrate pozitive și al celor negative din forma normală, la care este redusa forma pătratică reală data printr-o transformare liniara reală nedegenerată, nu depinde de alegerea acestei transformări.*

▷ Fie că forma pătratică reală $Q(X)$ de rangul $r$ prin două moduri este redusă la forma normală:

$$Q(X) \sim y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2 \sim z_1^2 + z_2^2 + \\ + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{9.1}$$

întrucât, conform teoremei 9.4, trecerea de la variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a fost o transformare liniară reală nedegenerată, exista transformarea inversă a variabilelor $yi$ prin $x_s$:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} b_{is} x_s \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.2}$$

care de asemenea este reală nedegenerată. In mod analog,

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.3}$$

va fi de asemenea o transformare liniară reală nedegenerată. Presupunem acum că $p < l$ și scriem sistemul de egalități

$$y_1 = 0, \ y_2 = 0, \ \ldots, \ y_p = 0, \\ z_{l+1} = 0, \ \ldots, \ z_r = 0, \ \ldots, \ z_n = 0. \tag{9.4}$$

Daca membrii stângi ai acestor egalități se înlocuiesc corespunzător prin expresiile (9.2) și (9.3), atunci vom obține un sistem de $n - l + p$ ecuații liniare omogene cu $n$ necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fiindcă $n - l + p < n$ (deoarece $p <$ i), adică numărul de ecuații ale sistemului omogen este mai mic decât numărul necunoscutelor, sistemul are o soluție reală nenulă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. In egalitatea (9.1) în loc de y$i$, $z_j$ substituim corespunzător expresiile lor din (9.2) și (9.3), iar apoi în locul necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dacă

pentru prescurtare prin *yi(a)* și *zi(a)* notăm valorile variabilelor *yi* și *zi,* care se obțin după o astfel de substituție, atunci (9.1), ținând seama de (9.4), se transformă în egalitatea

$$-y_{p+1}^2(\alpha) - \ldots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \ldots + z_l^2(\alpha). \qquad (9.5)$$

întrucât toți coeficienții în (9.2) și (9.3) sunt numere reale, toate pătratele din egalitatea (9.5) sunt nenegative, adică implică egalitatea lor cu zero, în particular

$$z_1(\alpha) = 0,\ z_2(\alpha) = 0, \ldots, z_l(\alpha) = 0. \qquad (9.6)$$

Pe de altă parte, nemijlocit după alegerea numerelor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$z_{l+1}(\alpha) = 0, \ldots, z_n(\alpha) = 0. \qquad (9.7)$$

Prin urmare, sistemul de *n* ecuații liniare

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji}x_i = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are, în baza (9.6) și (9.7), soluția nenulă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. După cum se știe, determinantul sistemului de acest fel trebuie să fie egal cu zero. Aceasta contrazice faptul că transformarea (9.3) este nedegenerată. Presupunerea că $l < p$ duce la o contrazicere similară. De aici rezultă că $p = l$, ceea ce și demonstrează teorema. ◁

Vom numi *indexul pozitiv de inerție p* - numărul de pătrate pozitive din forma normală a formei pătratice date, iar *indexul negativ de inerție q* - numărul de pătrate negative ale acestei forme. Numerele *p* și *q* sunt deci invarianți numerici ai formei pătratice date. Vom numi diferența

$$p - q = s$$

*signatura formei pătratice* date. Evident, întrucât $p+q = r$ și $p - q = s$ daca este cunoscut rangul r al formei pătratice $Q(X)_y$ atunci fiind dat oricare din trei numere arătate mai sus *p, q,* s, vom avea că el le determină pe celelalte două.

T e o r e m a 9.7. *Două forme pătratice reale de n variabile sunt congruente atunci și numai atunci când au același rang și aceeași signatură.*

▷ Fie că formele pătratice $Q(X)$ și $L(Y)$ sunt congruente. Prin urmare, forma $Q(X)$ se transformă în forma $L(Y)$ printr-o transformare liniară reală nedegenerată. La această transformare, după cum se știe, rangul formei nu se schimbă. Această transformare nu modifică nici signatura, deoarece, în caz contrar, formele $Q(X)$ și $L(Y)$ s-ar reduce la diferite forme normale, dar atunci forma $Q(X)$ s-ar reduce la ambele forme normale, ceea ce contrazice legea de inerție a formelor pătratice. Reciproc, dacă formele pătratice $Q(X)$ și $L(Y)$ au același rang și aceeași signatură, atunci ele se reduc la una și aceeași formă normală și de aceea pot fi transformate una în cealaltă, adică $Q(X) \sim L(Y)$. ◁

Fie forma patratică. reală $L(Y)$ de forma, canonică

$$L(Y) = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_r y_r^2 \qquad (9.8)$$

cu coeficienții diferiți de zero, $b_i \neq 0$ (i = 1,2, ..., r; $r \leq n$). în baza teoremei 9.3, rangul acestei forme $L(Y)$ este egal cu $r$. întrebare: când o formă patratică $Q(X)$ va fi congruentă cu forma (9.8), adică va avea forma canonică a sa anume forma (9.8)? Răspuns dă următoarea

C o n s e c i n ț ă. *O formă patratică $Q(X)$ de n variabile atunci și numai atunci va avea forma* (9.8) *ca formă canonică a sa când rangul formei $Q(X)$ este egal cu r, iar indexul pozitiv de inerție ai acestei forme coincide cu numărul de coeficienți pozitivi din* (9.8).

▷ într-adevăr, folosind metoda deja aplicata la demonstrația teoremei 9.5 de a reduce forma $L(Y)$ la forma normală, conchidem că indexul pozitiv de inerție al formei $L(Y)$ este egal cu numărul coeficienților pozitivi ai membrului drept al egalității (9.8). De aici și din teorema 9.7 rezultă adevărul consecinței date. ◁

## 9.7. Forme pătratice pozitiv definite și negativ definite

Una dintre cele mai importante clase de forme pătratice este clasa formelor pătratice pozitiv definite. Sistemul de valori (complexul de numere) $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ se numește *nenul,* dacă cel puțin una dintre valori este diferită de zero, și *nul,* dacă $x_1^\circ = \ldots = x_n^\circ = 0$.

**Definiție.** **O** formă patratică reala, $Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *pozitiv definită* dacă pentru orice sistem nenul de valori reale $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ ale variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forma ia valori strict pozitive, adică $Q(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) > 0$.

T e o r e m a 9.8. *Forma pătratică reală* $Q(X) = Q(x1,x2,..., x_n)$ *este pozitiv definită atunci şi numai atunci când ea, printr-o transformare liniară reală nedegenerată, se reduce la forma normala ce constă din n pătrate toate pozitive:*

$$Q(X) > 0 \Leftrightarrow Q(X) \sim L(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2, \qquad (9.1)$$

*adică dacă şi rangul r, şi indexul pozitiv de inerţie p ai acestei forme sunt egali cu numărul de necunoscute n.*

▷ Fie că forma pătratică, reală $Q(X) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se reduce la forma normală ce constă din *n* pătrate pozitive prin transformarea liniară reală nedegenerată:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \ (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9.2)$$

(cu matricea. $B = (b_{ij})$, pentru care *det* $B \neq 0$) sau sub forma matriceală $X = BY$, *det* $B \neq 0$. Fixăm un oarecare sistem nenul de valori $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Substituind acest sistem de valori în (9.2), vom obţine sistemul corespunzător de valori $y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ$, care, evident, de asemenea va fi nenul. Fiindcă $Q(X) \sim L(Y) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ înseamnă $Q(X) = L(Y)$, unde $X = BY$, *det* $B \neq 0$, rezultă că la substituirea acestui sistem de valori în expresia $Q(X)$ obţinem

$$Q(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) = Q(\sum_{j=1}^{n} b_{1j} y_j^\circ, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_{nj} y_j^\circ) =$$

$$= L(y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ) = y_1^{\circ 2} + \ldots + y_n^{\circ 2} > 0.$$

Astfel, pentru orice sistem nenul de valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avem $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, adică forma $Q(X)$ este pozitiv definită.

Reciproc, fie forma reală $Q(X)$ pozitiv definită, adică $Q(X) > 0$ pentru orice sistem nenul de valori ale necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Presupunem că forma $Q(X)$ printr-o transformare liniara reală nedegenerată este redusă la forma normală $L(Y)$, care nu constă din *n* pătrate pozitive, adică sau rangul ei r, sau indexul pozitiv de inerţie *p* este mai mic decât *n*. Aceasta înseamnă că în forma normală la care prin transformarea liniară nedegenerată (9.2) se reduce această formă,, pătratul cel puţin al uneia din variabilele noi, de

exemplu $y_n$, sau lipseşte în genere, sau este cu semnul minus, adică $L(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2$, sau $L(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2$. În acest caz, există sistemul nenul de valori $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$, pentru care $Q(X) = 0$ sau $Q(X) < 0$; un astfel de sistem nenul de valori va fi, de exemplu, acela care se obţine din sistemul (9.2) pentru $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = 0$, $y_n = 1$. Într-adevăr, sistemul corespunzător de valori $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$ este nenul, deoarece, în caz contrar, am avea că sistemul liniar omogen cu determinantul sistemului diferit de zero are soluţie nenulă, ceea ce contrazice faptul real că un aşa sistem omogen are unica soluţie nulă. Pentru un astfel de sistem de valori ale variabilelor $x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$, forma $Q(X)$ este egală cu zero, dacă $y_n^2$ nu intră în forma normală a acestei forme, şi este egală cu $-1$, dacă $y_n^2$ intră în forma normală cu semnul minus, adică $Q(X) \leq 0$, ceea ce contrazice că forma $Q(X)$ este pozitiv definită. Prin urmare, forma normală la care se reduce forma pozitiv definită $Q(X)$ constă din $n$ pătrate pozitive ale variabilelor. ◁

Să demonstrăm teorema care admite după coeficienţii formei pătratice de a stabili dacă această formă va fi sau nu va fi pozitiv definită. În prealabil să introducem o noţiune auxiliară. Fie dată forma pătratică $Q(X)$ de matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dacă în matricea $A$ alegem $k$ linii şi $k$ coloane ($1 \leq k \leq n$), atunci la intersecţia acestor linii şi coloane se obţine o matrice pătratică de ordinul $k$. Determinantul acestei matrice se numeşte *minor de ordinul* $k$ al matricei $A$ (sau al determinantului *det* $A$).

Numim *minori principali* ai formei pătratice $Q(X)$ de matrice $A$ minorii:

$$a_{11},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

adică minorii de ordinul $1, 2, 3, \ldots, n$ ai matricei $A$, situaţi în partea stângă de sus; ultimul dintre ei coincide cu determinantul matricei.

**Teorema 9.9** (criteriul lui Sylvester)[4]. *Ca o formă pătratică reală să fie pozitiv definită, este necesar şi suficient ca toţi minorii principali ai acestei forme să fie strict pozitivi.*

▷ Pentru $n = 1$, teorema este adevărată, deoarece forma are în acest caz scrierea $a_{11}x^2$ şi de aceea ea este pozitiv definită atunci numai când $a_{11} > 0$. Vom demonstra teorema pentru cazul formei de $n$ variabile, presupunând că pentru formele pătratice de $n-1$ ($n \geq 2$) necunoscute ea este adevărată. Forma pătratică de $n$ variabile $Q(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ se poate scrie astfel:

$$Q(X) = Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n + a_{nn}x_n^2, \qquad (9.3)$$

unde $Q_1 = Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ - formă pătratică de $n-1$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, compusă din acei termeni ai formei $Q$ care nu conţin variabila $x_n$. Evident, matricea $A_1$ a formei $Q_1$ poate fi obţinută din matricea $A$ a formei $Q(X)$ suprimând linia $n$ şi coloana $n$ ale acestei matrice. De aceea minorii principali ai formei $Q_1$ coincid cu minorii principali ai formei $Q(X)$, în afară de ultimul.

Fie forma pătratică $Q(X)$ pozitiv definită. Atunci forma $Q_1$ va fi de asemenea pozitiv definită. Într-adevăr, dacă ar exista sistemul nenul de valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pentru care $Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leq 0$, atunci, în virtutea (9.3), am avea un sistem nenul de valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, unde $x_n = 0$, pentru care $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$, ceea ce contrazice condiţia că $Q(X)$ este formă pozitiv definită. Prin urmare, după presupunerea inductivă, toţi minorii principali ai formei $Q_1$, adică toţi minorii principali ai formei $Q(X)$, în afară de ultimul, sunt pozitivi. Ultimul minor principal al formei $Q(X)$ coincide cu determinantul matricei $A$ şi deci de asemenea este pozitiv. Într-adevăr, forma $Q(X)$ poate fi adusă la forma normală, ce constă din $n$ pătrate pozitive, determinantul căreia este pozitiv (el este egal cu unitatea):

$$Q(X) \sim L(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Pe baza proprietăţilor de congruenţă a formelor pătratice (a se vedea p. 9.3), determinanţii formelor pătratice $Q(X)$ şi $L(Y)$ au acelaşi semn

[4] J.J. Sylvester (1814–1897) – matematician englez.

pozitiv. Aşadar, toţi minorii principali ai formei pătratice pozitiv definite sunt pozitivi.

Reciproc, fie că toţi minorii principali ai formei pătratice $Q(X)$ sunt pozitivi. Atunci pozitivi vor fi şi toţi minorii principali ai formei $Q_1$ din egalitatea (9.3). De aceea forma $Q_1$, după presupunerea inductivă, este pozitiv definită şi deci, în baza teoremei 9.8, există o aşa transformare liniară reală nedegenerată a variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ care reduce forma $Q_1$ la forma normală:

$$Q_1 \sim L_1(Y) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2.$$

Această transformare liniară poate fi completată până la transformarea liniară reală nedegenerată a tuturor variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, punând $x_n = y_n$. Conform (9.3), forma $Q(X)$ prin transformarea arătată se aduce la forma

$$Q(X) \sim \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2, \tag{9.4}$$

unde $b_{in}$ – coeficienţi reali. Întrucât

$$y_i^2 + 2b_{in} y_i y_n = (y_i + b_{in} y_n)^2 - b_{in}^2 y_n^2,$$

transformarea liniară nedegenerată a variabilelor $z_i = y_i + b_{in} y_n$, $z_n = y_n$ reduce, la rândul său, forma pătratică din membrul drept al relaţiei (9.4) la forma canonică, adică avem:

$$Q(X) \sim \Phi(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + c z_n^2, \tag{9.5}$$

unde $c$ – un număr real. Să ne convingem de faptul că $c > 0$. Într-adevăr, determinantul formei pătratice $\Phi(Z)$ este egal cu $c$. Forma $\Phi(Z)$ este obţinută din forma $Q(X)$ prin două transformări liniare reale nedegenerate ale variabilelor, iar determinantul formei $Q(X)$, ca ultimul dintre minorii principali ai acestei forme, este pozitiv. Conform proprietăţilor de congruenţă a formelor pătratice (p. 9.3), rezultă că determinantul formei $\Phi(Z)$ de asemenea este pozitiv, adică $c > 0$. De aici, în baza (9.5) şi a teoremelor 9.5 şi 9.8, conchidem că forma $Q(X)$ este pozitiv definită. ◁

Exemple.

1. Forma pătratică

$$Q(X) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

este pozitiv definită, deoarece minorii principali ai ei sunt pozitivi:

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

2. Forma pătratică

$$Q(X) = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

nu va fi pozitiv definită, deoarece al doilea minor principal este negativ:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Uneori este necesar de a studia şi aşa-numitele forme negativ definite. Forma pătratică reală $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte *negativ definită* dacă pentru orice sistem nenul de valori reale $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ ale variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forma ia valori strict negative, adică $q(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) < 0$. Uşor se constată că forma pătratică $Q(X)$ de matrice $A$ este negativ definită atunci şi numai atunci când forma $Q_1(X) = -Q(X)$ de matrice $(-A)$ este pozitiv definită. Aceasta înseamnă că $Q(X)$ este o formă negativ definită atunci şi numai atunci când ea se reduce la forma normală congruentă ei, ce constă din $n$ pătrate negative ale variabilelor:

$$Q(X) < 0 \Leftrightarrow Q(X) \sim L(Y) = -y_1^2 - \ldots - y_n^2.$$

Evident, pentru forma pătratică negativ definită de $n$ variabile, determinantul ei va fi pozitiv pentru $n$ par şi negativ pentru $n$ impar. Să formulăm fără demonstrare următoarea teoremă despre condiţia necesară şi suficientă ca forma pătratică să fie negativ definită.

**Teorema 9.10.** *O formă pătratică reală este negativ definită atunci şi numai atunci când minorii principali de ordin par ai ei sunt pozitivi, iar cei de ordin impar – negativi.*

Pentru a clarifica dacă forma pătratică este pozitiv definită, negativ definită sau că nu este de acest fel, după criteriile arătate mai sus, este necesar de a reduce această formă la forma canonică după metoda lui Lagrange sau prin metoda calculării minorilor principali ai matricei acestei forme. Există şi alte criterii pentru a determina dacă forma dată este pozitiv sau negativ definită. Să citãm fără demonstrare unul dintre ele.

**T e o r e m a 9.11** (criteriul de definire pozitivă şi de definire negativă). *Forma pătratică reală de matrice $A$ este pozitiv definită sau negativ definită atunci şi numai atunci când valorile proprii $\lambda_j$ ale matricei $A$ sunt, respectiv, toate pozitive sau toate negative.*

## 9.8. Reducerea formei pătratice la forma canonică cu ajutorul unei transformări ortogonale a variabilelor

### 9.8.1. Transformare ortogonală a variabilelor

Unul dintre procedeele de aducere a formei pătratice la forma canonică este arătat în p. 9.5 – aceasta e metoda lui Lagrange. Vom demonstra că forma pătratică reală poate fi redusă la forma canonică şi prin altă metodă – cu ajutorul transformărilor ortogonale ale variabilelor.

**Definiţie.** Transformarea liniară (omogenă) a variabilelor vom numi-o *transformare ortogonală* dacă matricea acestei transformări este ortogonală (a se vedea p. 8.4, cap. 8).

**T e o r e m a 9.12.** *O transformare liniară reală a $n$ variabile $X = BY$ este ortogonală atunci şi numai atunci când ea transformă suma pătratelor variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în suma pătratelor variabilelor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, adică*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \sim y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \tag{9.1}$$

*sau, altfel spus, lasă suma pătratelor variabilelor invariantă.*

▷ Fie $X = BY$ o transformare ortogonală a variabilelor. Luând în consideraţie că $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ este o formă pătratică de forma normală, matricea ataşată ei este matricea unitate $E$. Atunci,

conform teoremei 9.2, forma pătratică $Q(x_1, \ldots, x_n)$ de matrice $E$, după aplicarea transformării ortogonale a variabilelor $x = BY$, se transformă în forma pătratică $L(y_1, \ldots, y_n)$ de matrice $C = B'EB$. Deoarece $B$ este matrice ortogonală, rezultă că $B' = B^{-1}$. De aici urmează $C = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$, adică forma $L(y_1, \ldots, y_n)$ are forma normală, ceea ce înseamnă că are loc egalitatea (9.1).

Reciproc. Dacă transformarea liniară reală $X = BY$ transformă forma pătratică normală $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în forma pătratică normală $L(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, adică are loc egalitatea (9.1), şi având în vedere că matricele ataşate acestor forme normale sunt egale cu $E$, conform teoremei 9.2, obţinem $B'EB = E$, $B'B = E$, adică, conform definiţiei, matricea $B$ este ortogonală. ◁

Reducerea formei pătratice reale la forma canonică cu ajutorul unei transformări ortogonale a variabilelor se numeşte de asemenea şi *aducerea acestei forme la axele principale.* Această denumire este legată de faptul că la reducerea ecuaţiilor liniilor şi suprafeţelor de ordinul doi, cu ajutorul transformării ortogonale, la forma canonică, axele noi de coordonate sunt paralele axelor de simetrie, care se numesc axe principale ale figurii respective.

**T e o r e m a 9.13** (despre aducerea formei pătratice reale la axele principale). *Orice formă pătratică reală $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se poate aduce, printr-o transformare ortogonală, la forma canonică (diagonală).*

▷ Teorema este adevărată pentru forma pătratică de o singură variabilă $Q(x_1) = a_{11}x_1^2$ care, evident, are forma canonică; transformarea ortogonală căutată este transformarea identică. Presupunem că teorema este adevărată pentru formele pătratice de $n-1$ $(n \geq 2)$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ şi o vom demonstra pentru formele pătratice de $n$ variabile.

Fie $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o formă pătratică reală de matrice $A = (a_{ij})$. Întrucât $A$ este matrice simetrică, toate rădăcinile caracteristice sunt valori proprii ale matricei date. Fie $\lambda$ unul dintre numerele proprii ale acestei matrice şi

$C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$ – vectorul propriu normat al matricei $A$ cu valoarea

proprie $\lambda$. Vom scrie acest vector-coloană de asemenea şi sub formă de linie: $\overline{c}_1 = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1})$. Conform teoremei 3.15, fiecare sistem liniar independent de vectori ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ se poate completa până la o bază a acestui spaţiu. Prin urmare, vectorul $\overline{c}_1$ poate fi inclus într-o bază oarecare $\overline{c}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ a spaţiului $\mathbf{R}^n$. După cunoscutul proces de ortogonalizare a sistemului de vectori, această bază poate fi ortogonalizată astfel, încât primul vector $\overline{c}_1$ va intra în sistemul ortogonal de vectori ce se construieşte. Mai departe, normăm vectorii bazei ortogonale construite. Obţinem baza ortonormată

$$\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_n$$

a spaţiului $\mathbf{R}^n$. Din coloanele de coordonate ale acestor vectori construim matricea $C = (c_{ij})$, prima coloană a căreia este coloana de coordonate arătată $C_1$ a vectorului $\overline{c}_1$. Conform criteriului de ortogonalitate a matricei (a se vedea teorema 8.8), matricea $C$, evident, este ortogonală. Examinăm transformarea variabilelor

$$X = CY, \tag{9.2}$$

care transformă forma $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în forma $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Dacă $D$ este matricea ataşată formei $\Phi$, atunci, conform teoremei 9.2, $D = C'AC$ şi totodată $D$ este o matrice simetrică. Aflăm această matrice definind mai întâi $B = C'A$, iar apoi $D = BC$. Pentru termenii $b_{1j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ai primei linii a matricei $B = (b_{ij})$, avem

$$b_{1j} = c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + \ldots + c_{n1}a_{nj} \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.3}$$

Pe de altă parte, întrucât după admiterea teoremei $C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$ este vector propriu al matricei simetrice $A = (a_{ij})$ cu valoarea proprie $\lambda$, rezultă că $AC_1 = \lambda C_1$, de unde $a_{j1}c_{11} + a_{j2}c_{21} + \ldots + a_{jn}c_{n1} = \lambda c_{j1}$, şi deoarece $a_{ij} = a_{ji}$, avem

$$c_{11}a_{1j} + c_{21}a_{2j} + \ldots + c_{n1}a_{nj} = \lambda c_{j1}. \tag{9.4}$$

Din egalităţile (9.3) şi (9.4) rezultă $b_{1j} = \lambda c_{j1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Aflăm elementele $d_{1j}$ ale primei linii a matricei $D = BC$:

$$d_{1j} = b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \ldots + b_{1n}c_{nj} = \lambda(c_{11}c_{1j} + c_{21}c_{2j} + \ldots + c_{n1}c_{nj}).$$

Întrucât $C$ este matrice ortogonală, rezultă că $d_{1j} = \lambda$ pentru $j = 1$ şi $d_{1j} = 0$ pentru $j \neq 1$. Prin urmare, matricea simetrică $D$ are forma

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & d_{2n} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

de aceea, în baza definiţiei, forma pătratică $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se poate scrie astfel

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda y_1^2 + \Phi_1(y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Conform presupunerii inductive, pentru forma pătratică $\Phi_1(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ de $n-1$ variabile $y_2, y_3, \ldots, y_n$ există transformarea ortogonală

$$\begin{cases} y_2 = k_{22}z_2 + k_{23}z_3 + \ldots + k_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = k_{n2}z_2 + k_{n3}z_3 + \ldots + k_{nn}z_n, \end{cases}$$

care o aduce pe ea la forma canonică $\Phi_2(z_2, z_3, \ldots, z_n) = \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$. Transformarea

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = k_{22}z_2 + k_{23}z_3 + \ldots + k_{2n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = k_{n2}z_2 + k_{n3}z_3 + \ldots + k_{nn}z_n, \end{cases} \tag{9.5}$$

este ortogonală; ea reduce forma pătratică $\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la forma canonică $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$.

Din teorema 9.1 şi din proprietatea că produsul matricelor ortogonale este o matrice ortogonală rezultă că produsul transformărilor (9.2) şi (9.5) este o transformare ortogonală.

Aşadar, forma pătratică $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(X)$ se reduce la forma canonică $L(Z)$, adică $Q(X) \sim L(Z) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2$ prin transformarea ortogonală a variabilelor egală cu produsul transformărilor (9.2) şi (9.5). ◁

### 9.8.2. Despre aducerea unei matrice la forma diagonală

Ne reamintim că o matrice pătratică $A = (a_{ij})$ se numeşte matrice diagonală dacă toate elementele ei din afara diagonalei principale sunt egale cu zero: $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$.

Vom spune că *o matrice $A$ poate fi adusă la forma diagonală* (sau este *diagonalizabilă*) dacă există o matrice $T$ nedegenerată, astfel încât matricea $\Lambda = T^{-1}AT$ să fie o matrice diagonală. Vom mai spune de asemenea în acest caz că *matricea $T$ aduce matricea $A$ la forma diagonală.*

**Teorema 9.14.** *Dacă matricea $A$ poate fi adusă la forma diagonală:*

$$\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

*atunci pe diagonala principală a matricei obţinute $\Lambda$ vor fi situate rădăcinile caracteristice ale matricei $A$, repetate conform cu multiplicităţile lor* (a se vedea p. 8.2.1, cap. 8).

▷ Fie că matricea pătratică $A$ este diagonalizabilă, adică există o matrice $T$ nedegenerată, aşa încât $\Lambda = T^{-1}AT$ este o matrice diagonală. Întrucât matricea scalară $\lambda E$ de ordinul $n$ comutează cu orice matrice pătratică de ordinul $n$ şi deoarece $det\ T^{-1} \cdot det\ T = 1$ (vezi teorema 5.4), avem $det\ (\Lambda - \lambda E) = det\ (T^{-1}AT - \lambda E) = det\ (T^{-1}(A - \lambda E)T) = det\ T^{-1} \cdot det\ (A - \lambda E) \cdot det\ T = det\ (A - \lambda E)$. Deci am demonstrat că *pentru matricele $A$ şi $\Lambda = T^{-1}AT$, polinoamele lor caracteristice coincid*: $det\ (A - \lambda E) = det\ (\Lambda - \lambda E)$, adică $A$ şi $\Lambda$ au unele şi aceleaşi rădăcini caracteristice. Rezolvând ecuaţia caracteristică $det\ (\Lambda - \lambda E) = 0$ a matricei diagonale $\Lambda$, aflăm rădăcinile caracteristice $\lambda_i$ ale acestei matrice: $\lambda_1 = d_{11}$, $\lambda_2 = d_{22}, \ldots, \lambda_n = d_{nn}$, unde $d_{ii}$ sunt elementele diagonale ale matricei $\Lambda$. Având în vedere aceste egalităţi, încheiem demonstraţia teoremei. ◁

**Teorema 9.15.** *Pentru orice matrice simetrică $A$ cu elemente numere reale există o aşa matrice ortogonală $T$ care aduce matricea $A$ la forma diagonală, adică $T^{-1}AT$ este o matrice diagonală.*

▷ Fie $A$ o matrice simetrică de ordinul $n$ cu elemente numere reale, $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – forma pătratică de matrice $A$. Conform teoremei 9.13, există o transformare ortogonală care aduce această formă la forma canonică. Matricea acestei transformări o notăm prin $T$. Atunci, în virtutea teoremei 9.2, $T'AT = D$, unde $D$ – matrice diagonală. Întrucât $T$ este matrice ortogonală, $T' = T^{-1}$, de unde rezultă $T^{-1}AT = D$ – matrice diagonală. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Orice matrice simetrică cu elemente numere reale poate fi adusă la forma diagonală.*

Deşi pot exista diferite transformări ortogonale care aduc forma pătratică dată la forma canonică, totuşi această formă canonică (cu exactitate de până la notarea variabilelor) se determină în mod univoc.

**T e o r e m a 9.16.** *Oricare ar fi transformarea ortogonală de matrice $C$ care aduce forma pătratică reală $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de matrice $A$ la forma canonică:*

$$Q(X) \sim L(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \tag{9.6}$$

*avem:*

1) *coeficienţii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ai acestei forme canonice vor fi rădăcinile caracteristice ale matricei $A$, luate cu a lor multiplicitate;*

2) *matricea $C$ are următoarea structură: coloanele ei reprezintă $n$ vectori proprii ortonormaţi ai matricei $A$ cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectiv.*

▷ Fie că, conform teoremei 9.13, transformarea ortogonală $X = CY$ aduce forma pătratică reală $Q(X)$ de matrice $A$ la forma canonică (9.6). Atunci matricea formei $L(Y)$ are forma diagonală:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

unde $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sunt coeficienţii formei canonice (9.6). În baza teoremei 9.2, avem $\Lambda = C'AC$. Fiindcă $C$ este matrice ortogonală, rezultă că $C' = C^{-1}$ şi deci $C$ este nedegenerată. Prin urmare, $\Lambda = C^{-1}AC$, unde $C$ – matrice nedegenerată, adică, conform definiţiei, matricea $A$ poate fi adusă la forma diagonală $\Lambda$. Dar atunci, conform teoremelor 9.14 şi 8.5, pe diagonala principală a acestei matrice $\Lambda$ sunt situate numerele caracteristice $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale matricei $A$, luate cu a lor multiplicate, care alcătuiesc întregul spectru al matricei $A$.

Să demonstrăm partea a doua a teoremei. Înmulţind matricea $\Lambda$ la stânga cu $C$ şi luând în consideraţie că $\Lambda = C^{-1}AC$, obţinem $C\Lambda = C(C^{-1}AC) = AC$, iar în baza (9.7), avem

$$AC = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{9.8}$$

Pentru elementele $b_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale matricei $B = AC$, conform regulii de înmulţire a matricelor $A = (a_{ik})$ şi $C = (c_{kj})$, avem

$$b_{ij} = a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj}.$$

Pe de altă parte, din egalitatea (9.8) rezultă că $b_{ij} = c_{ij}\lambda_j$, de aceea

$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj} = \lambda_j c_{ij} \tag{9.9}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, sau

$$A \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix},$$

unde $\lambda_j$ – coeficienţii formei canonice (9.6).

Aşadar, coloana $j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a matricei $C$ este vector propriu al matricei $A$ cu valoarea proprie $\lambda_j$. Întrucât $C$ este o matrice ortogonală, după cum rezultă din teorema 8.8, coloanele ei reprezintă $n$ vectori ortonormaţi, adică $n$ vectori proprii ortonormaţi ai matricei $A$ cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, respectiv. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Pentru fiecare matrice simetrică de ordinul $n$ cu elemente din $\mathbf{R}$ există în spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ o bază alcătuită din vectori proprii ortogonali ai acestei matrice.*

▷ Într-adevăr, din teoremele 9.13 şi 9.16 rezultă că pentru matricea simetrică dată $A$ de ordinul $n$ cu elemente numere reale există matricea ortogonală $C$ de ordinul $n$, ale cărei coloane sunt $n$ vectori proprii ortonormaţi ai matricei $A$. Conform teoremelor 3.21 şi 3.14, vectorii-coloană ai matricei $C$ formează o bază în $\mathbf{R}^n$, adică o bază din vectori proprii ortonormaţi ai matricei $A$. ◁

Consecinţa de mai sus reprezintă întocmai teorema 8.7.

## 9.9. Aflarea transformării ortogonale care reduce forma pătratică la forma canonică (la axele principale)

Se poate demonstra că pentru rădăcina caracteristică $\lambda_0$ cu multiplicitatea $m_0$ a matricei simetrice date $A$ cu elemente numere reale există un sistem care constă din numărul maxim $m_0$ de vectori proprii liniar independenţi, ce aparţin valorii proprii $\lambda_0$ [24, pag. 228]. Demonstraţia acestei afirmaţii rezultă, de asemenea, din teoremele 9.13, 9.16, 8.6, 3.21 şi 3.14.

Fie $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ forma pătratică reală de matrice $A$. Pentru a afla transformarea ortogonală $X = CY$ care reduce forma pătratică $Q(X)$ la forma canonică, este necesar *de a efectua* succesiv următoarele:

1) de scris matricea $A$ a formei pătratice date şi de aflat rădăcinile caracteristice $\lambda_i$ ale ei;

2) pentru fiecare rădăcină caracteristică $\lambda_0$ de multiplicitatea $m_0$ de aflat $m_0$ soluţii liniar independente (sistem fundamental de soluţii) ale sistemului de ecuaţii liniare omogene:

$$(A - \lambda_0 E)X = 0; \tag{9.1}$$

3) aceste soluţii determină $m_0$ vectori proprii liniar independenţi ai matricei $A$, definiţi prin coordonate . De scris aceşti vectori, apoi de ortogonalizat şi de normat;

4) de luat pe rând în calitate de $\lambda_0$ toate rădăcinile caracteristice distincte ale matricei $A$. Ca rezultat vom obţine sistemul căutat ortonormat din $n$ vectori proprii $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ ai matricei simetrice $A$;

5) de compus matricea $C$ ale cărei coloane sunt aceşti $n$ vectori proprii ortonormaţi ai matricei $A$.

De scris transformarea ortogonală căutată cu ajutorul matricei aflate $C$:

$$X = CY.$$

Exemplul 1. Să se afle transformarea ortogonală care reduce la forma canonică forma pătratică de două variabile $x_1, x_2$:

$$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Matricea $A$ a acestei forme pătratice şi ecuaţia caracteristică a ei $det\ (A - \lambda E) = 0$ le scriem astfel:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ecuaţia caracteristică $(3 - \lambda)^2 - 5^2 = 0$, sau $\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$, are rădăcinile $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, care sunt valori proprii ale matricei $A$.

Aflăm vectorii proprii $X$ corespunzători valorilor proprii. Coordonatele $(x_1, x_2)$ ale acestor vectori $X$ în baza canonică a spaţiului euclidian $\mathbf{R}^2$ se determină din ecuaţia matriceală $(A - \lambda E)X = 0$, care în cazul de faţă reprezintă următorul sistem de ecuaţii liniare omogene:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = \lambda_1 = 8$ şi $\lambda = \lambda_2 = -2$, avem două sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Soluţia generală a primului sistem este $x_2 = x_1$, iar a celui de al doilea este $x_2 = -x_1$. Notând $x_1 = t$, găsim vectorii proprii $X_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ şi $X_2 = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$, unde $t \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Deoarece produsul scalar al acestor vectori este egal cu zero, $X_1$ şi $X_2$ sunt ortogonali. Normând aceşti vectori, obţinem sistemul de vectori ortonormaţi:

$$X_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \qquad X_2^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Compunem matricea $C$ ale cărei coloane sunt aceşti vectori proprii ortonormaţi $X_1^*$, $X_2^*$ ai matricei $A$:

$$C = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Cu ajutorul matricei $C$ scriem transformarea ortogonală căutată a variabilelor:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2), \end{cases}$$

sau sub formă matriceală: $X = CY$. Această transformare reduce forma pătratică dată $Q(x_1, x_2)$ la forma canonică

$$L(y_1, y_2) = 8y_1^2 - 2y_2^2.$$

Exemplul 2. Printr-o transformare ortogonală să se aducă la forma canonică următoarea formă pătratică:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

Matricea $A$ a acestei forme pătratice are aspectul

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aflăm polinomul caracteristic

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 3 =$$

$$= (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Aşadar, matricea $A$ are rădăcina caracteristică 1 de multiplicitatea trei ($m_0 = 3$) şi rădăcina caracteristică simplă $-3$ ($m_0 = 1$). Prin urmare, conform teoremei 9.16, deja putem scrie acea formă canonică la care se reduce forma $Q(X)$ prin transformarea ortogonală căutată:

$$Q(X) \sim L(Y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

Să aflăm transformarea ortogonală $X = CY$ care realizează această reducere. Mai întâi aflăm sistemul din patru vectori proprii liniar independenţi ai matricei $A$ (bază alcătuită din vectori proprii ai spaţiului euclidian $\mathbf{R}^4$), apoi *ortogonalizăm* şi normăm aceşti vectori.

Pentru a afla coordonatele vectorilor proprii iniţiali, urmează a rezolva sistemul de ecuaţii liniare omogene (9.1), care pentru $\lambda = \lambda_0 = 1$ devine

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Rangul sistemului (9.2) este egal cu 1, iar dimensiunea spaţiului soluţiilor ale acestui sistem omogen este egală cu $m_0 = n - r = 4 - 1 = 3$, de aceea se poate afla un sistem din trei soluţii liniar independente ale sale. În calitate de atare sistem de soluţii poate fi considerat, de exemplu, sistemul fundamental al sistemului omogen (9.2) (a se vedea p. 7.4, cap. 7). Pentru aceasta, în cazul dat, în ecuaţia $x_1 = -x_2 + x_3 + x_4$, echivalentă cu sistemul (9.2), în locul necunoscutelor $(x_2, x_3, x_4)$ trebuie de substituit consecutiv valorile $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Obţinem vectorii proprii $\overline{a}_1 = (-1,1,0,0)$, $\overline{a}_2 = (1,0,1,0)$, $\overline{a}_3 = (1,0,0,1)$. Ortogonalizăm acest sistem de vectori. După cum este arătat în exemplul din p. 3.13.2, cap. 3, din acest sistem de vectori liniar independenţi se construieşte următorul sistem de vectori ortogonali:

$$\overline{b}_1 = \overline{a}_1 = (-1,1,0,0);$$
$$\overline{b}_2 = (1/2;1/2;1;0);$$
$$\overline{b}_3 = (1/3;1/3;-1/3;1).$$

Luând în consideraţie expresiile din procesul de ortogonalizare şi având în vedere proprietăţile vectorilor proprii (vezi teorema 8.4), conchidem că vectorii $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3$ (scrişi sub formă de coloane) de asemenea sunt vectori proprii ai matricei $A$. Pe de altă parte, sistemul de ecuaţii liniare omogene (9.1), pentru $\lambda = \lambda_0 = -3$, devine

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Rangul acestui sistem este egal cu 3, iar dimensiunea spaţiului soluţiilor lui este egal cu $m_0 = 4 - 3 = 1$. Rezolvând acest sistem (de exemplu prin metoda Jordan-Gauss), aflăm că pentru $x_4 = 1$, soluţia sa este vectorul

$$\overline{b}_4 = (-1;-1;1;1).$$

Conform teoremei 8.6, sistemul de vectori proprii $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \overline{b}_4$ este ortogonal. Normând aceşti vectori, obţinem (în virtutea teoremei 8.4) sistemul ortonormat ce constă din următorii patru vectori proprii ai matricei $A$:

$$X_1^* = \overline{b}_1/|\overline{b}_1| = (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)',$$
$$X_2^* = \overline{b}_2/|\overline{b}_2| = (1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}; 0)',$$
$$X_3^* = \overline{b}_3/|\overline{b}_3| = (1/2\sqrt{3}; 1/2\sqrt{3}; -1/2\sqrt{3}; \sqrt{3}/2)',$$
$$X_4^* = \overline{b}_4/|\overline{b}_4| = (-1/2; -1/2; 1/2; 1/2)'.$$

În felul acesta, forma $Q(X)$ se reduce la forma canonică (la axele principale) prin transformarea ortogonală a variabilelor cu matricea ataşată acestei transformări

$$C = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

adică transformarea ortogonală căutată $X = CY$ are forma

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}y_3 - \dfrac{1}{2}y_4, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}y_3 - \dfrac{1}{2}y_4, \\ x_3 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

Urmează să menţionăm că alegerea sistemului de vectori proprii liniari independenţi, care aparţin valorii proprii $\lambda_0$, este foarte neunivocă şi de aceea există multe transformări ortogonale diferite ale variabilelor, care aduc forma $Q(X)$ la forma canonică. Am găsit numai una dintre ele. În baza teoremei 9.16, forma canonică la care se reduce forma $Q(X)$ prin oricare transformare ortogonală a variabilelor este univocă (cu exactitate de până la notarea variabilelor).

## 9.10. Despre aplicarea formelor pătratice în programarea matematică

Programarea matematică cuprinde toate problemele de aflare a extremului unei funcţii, fiind date restricţiile necesare.

În cazul în care suma formei pătratice şi a formei liniare:

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} c_ix_i \tag{9.1}$$

este funcţie obiectiv a problemei extremale cu restricţii liniare, avem problema *programării pătratice* – capitol al programării neliniare unde

se studiază problemele în care trebuie de aflat maximul global al funcţiei (9.1) pe o mulţime poliedrică convexă. Fiecare *problemă de programare pătratică* se poate scrie sub formă matriceală în modul următor [11, pag. 182]:
de aflat maximul funcţiei

$$X'DX + C'X, \tag{9.2}$$

fiind date condiţiile

$$AX = B,\ X \geq 0, \tag{9.3}$$

unde $X$ – matrice-coloană de înălţimea $n$, $X'$ – transpusa matricei $X$, adică matrice-linie de lungimea $n$; $C'$ – matrice-linie de lungimea $n$; $B$ – matrice-coloană de înălţimea $m$; $A$ – matrice de tipul $m \times n$; $D$ – matrice pătratică simetrică de ordinul $n$; $X'DX$ – scrierea matriceală a formei pătratice $\sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}x_ix_j$, care intră în funcţia obiectiv a problemei extremale date. Dacă $D = 0$, atunci avem problema programării liniare.

Pentru $C' = 0$, problema (9.2)–(9.3) este foarte aproape de problema programării liniare şi se deosebeşte de ea numai prin faptul că funcţia obiectiv aici nu este liniară, ci formă pătratică. În legătură cu aceasta, este elaborat un şir întreg de metode care rezolvă problema programării pătratice ca o consecutivitate de probleme ale programării liniare. La rândul său, ultimele probleme se rezolvă prin metodele de calcul numeric cunoscute în programarea liniară: metoda simplex, metoda bazei artificiale şi alte metode.

Menţionăm în încheiere că izvorul oricărui tip de probleme de extrem este orice domeniu de activitate practică şi în primul rând producerea, distribuirea, schimbul şi consumul bunurilor materiale, adică sfera economiei.

## Exerciţii

**1.** Să se afle matricea ataşată şi rangul formei pătratice:

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_1x_2$;

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3$.

**2.** Este dată matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

compusă dun coeficienţii formei pătratice $Q(x_1, x_2, x_3)$. Să se scrie această formă ca formă pătratică simetrică.

**3.** Să se scrie fiecare dintre următoarele forme pătratice sub forma matriceală:

a) $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$;

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3$;

c) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_3 + 5x_1x_4$.

**4.** Să se prezinte scrierea matriceală a formei pătratice, fiind dată matricea sa:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**5.** Să se afle rezultatul efectuării succesive a transformărilor liniare ale variabilelor

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \quad\quad + y_3, \\ x_2 = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ x_3 = \quad\; 3y_2 + 5y_3 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} y_1 = z_1 - z_2, \\ y_2 = \quad - 5z_2 - z_3, \\ y_3 = \quad - 3z_2. \end{cases}$$

**6.** Este dată forma pătratică

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + x_2x_3.$$

Să se afle forma pătratică $L(y_1, y_2, y_3)$ la care se aduce forma $Q(x_1, x_2, x_3)$, efectuând asupra ei transformarea liniară:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = 2y_1 \quad\quad + y_3, \\ x_3 = \quad - 5y_2. \end{cases}$$

**7.** Este dată forma pătratică $Q(X)$. Prin metoda separării pătratelor complete (metoda lui Lagrange) să se afle forma pătratică canonică congruentă cu cea dată şi transformarea liniară care aduce forma $Q(X)$ la forma canonică aflată.

a) $Q(X) = Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 5x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.

b) $Q(X) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

**8.** Să se cerceteze dacă forma pătratică este pozitiv definită.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3.$$

**9.** Să se afle transformarea ortogonală care reduce la forma canonică următoarea formă pătratică:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2.$$

**10.** Să se afle matricea ortogonală care aduce matricea simetrică dată la forma diagonală.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

# PARTEA A II-A
# ALGEBRĂ VECTORIALĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

## CAPITOLUL 10

## Noțiuni de algebră vectorială

### 10.1. Metoda coordonatelor

*Metoda coordonatelor* este o metodă generală de studiu al obiectelor geometrice (puncte, linii, suprafețe), precum, și de rezolvare a problemelor geometrice în mod analitic, prin metodele algebrei și analizei matematice, adică cu ajutorul calculului numeric. La baza acestei metode este pusa noțiunea de coordonate.

Numerele (sau alte simboluri) care determină poziția punctului (obiectului) pe o dreaptă, în plan, în spațiu, pe o suprafață etc. se numesc *coordonatele* acestui punct. De exemplu, aviatorul își determină poziția sa în spațiu cu ajutorul numerelor evaluate de aparate, adică prin coordonate.

Metoda coordonatelor a fost introdusa în știința în anii 30 ai secolului al XVII-lea, aproape concomitent și independent unul de altul, de către Descartes[1] și Fermat[2].

[1] Rene Descartes (1596-1650) - matematician și filozof francez.

[2] Pier re Fermat (1601-1665) - matematician francez, de profesie jurist.

Această metodă permite de a traduce problemele geometrice în limbajul analizei matematice şi reciproc, de a da diferitelor rezultate ale analizei matematice o interpretare geometrică.

## 10.2. Coordonate pe linia dreaptă

### 10.2.1. Segmente orientate. Mărimea segmentului orientat pe o axă

Considerăm o dreaptă arbitrară. Pe dreaptă se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei) contrare. Alegem unul dintre ele (arbitrar) şi-l numim *pozitiv*, iar sensul contrar – *negativ*. Sensul pozitiv se indică pe dreaptă printr-o săgeată şi convenim să-l notăm cu $(+)$, iar cel negativ – cu $(-)$ (fig. 10.1). Fie, în afară de acestea, aleasă o unitate de scară pentru măsurarea segmentelor situate pe dreapta dată.

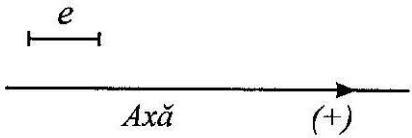



Fig. 10.1

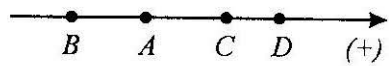



Fig. 10.2

O dreaptă pe care s-a fixat un sens de parcurs se numeşte *axă* sau *dreaptă orientată*.

Considerăm pe o axă două puncte arbitrare $A$ şi $B$. Segmentul mărginit de punctele $A$ şi $B$ se numeşte *segment orientat* dacă se indică care dintre aceste puncte este considerat ca origine şi care ca extremitate a segmentului. Segmentul cu originea în punctul $A$ şi extremitatea în $B$ îl vom nota cu simbolul $\overline{AB}$ şi vom considera că el are sensul orientat de la originea $A$ spre extremitatea $B$. Menţionăm că în notarea $\overline{AB}$ litera care reprezintă originea segmentului orientat se scrie *prima*, iar litera care reprezintă extremitatea lui – *a doua*. Prin *lungimea* lui $\overline{AB}$ înţelegem lungimea segmentului neorientat $[AB]$, adică distanţa dintre punctele $A$ şi $B$. Lungimea segmentului orientat $\overline{AB}$ se notează cu $|\overline{AB}|$.

Pentru segmentele orientate situate pe o axă (sau paralele aceleiaşi axe) se introduce noţiunea de mărimea segmentului. Se numeşte *mărimea $AB$ a segmentului orientat* $\overline{AB}$ numărul egal cu $|\overline{AB}|$, dacă

sensul segmentului coincide cu sensul axei, şi egal cu $-|\overline{AB}|$, dacă aceste sensuri sunt contrare: $AB = \pm|\overline{AB}|$ (luată corespunzător cu unul dintre semne). De exemplu, pentru segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ reprezentate în fig. 10.2, avem: $AB = -|\overline{AB}|$, $CD = |\overline{CD}|$.

Dacă $A$ şi $B$ coincid, atunci mărimea segmentului $|\overline{AB}|$ vom considera-o egală cu zero.

*Pentru orice poziţie a trei puncte $A$, $B$, $C$ de pe axă este adevărată identitatea:*

$$AB + BC = AC, \tag{10.1}$$

*unde $AB$, $BC$ şi $AC$ sunt, respectiv, mărimile segmentelor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ şi $\overline{AC}$.*

Această egalitate vom numi-o *indentitatea de bază* (ea va fi folosită ulterior deseori).

▷ Admitem, mai întâi, că punctele $A, B, C$ sunt puncte distincte. Pentru a demonstra egalitatea (10.1), trebuie să examinăm aparte fiecare dintre cele şase cazuri posibile reprezentate în fig. 10.3 (I – VI).

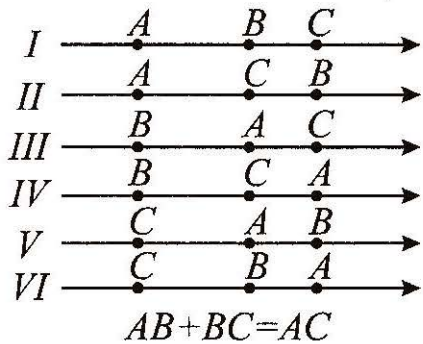



Fig. 10.3

Pentru fiecare caz, avem $AB + BC = AC$. De exemplu, pentru cazul II, avem: $AB = |\overline{AB}|$, $BC = -|\overline{BC}|$, $AC = |\overline{AC}|$, de unde rezultă $|\overline{AB}| - |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$ sau $AB + BC = AC$.

Observăm nemijlocit că indentitatea (10.1) este justă şi în cazul când unele puncte $A$, $B$, $C$ coincid. ◁

### 10.2.2. Reprezentarea geometrică a numerelor reale prin puncte ale axei de coordonate

Considerăm o dreaptă oarecare. Stabilim pe ea sensul de parcurs pozitiv (atunci dreapta devine axă). Apoi fixăm un punct oarecare al ei $O$ (punct inițial) și alegem ca unitate de măsură un segment (segment unitate sau unitate de scară) pentru măsurarea oricăror segmente situate pe această axă.

O dreaptă, împreună cu o alegere a sensului de parcurs pozitiv, a unui punct inițial $O$ și a unei unități de scară a ei, vom numi-o *axă de coordonate* sau *dreaptă de coordonate.* Această axă de coordonate o notăm cu $Ox$. Punctul fixat $O$ se numește *origine* (sau *originea coordonatelor*).

Fie $M$ un punct arbitrar pe dreapta dată (fig. 10.4, a). Punctului $M$ îi asociem numărul $x$ egal cu mărimea $OM$ a segmentului orientat $\overline{OM}$. Acest număr unic $x = OM$ se numește *coordonata punctului* $M$ pe axa de coordonate considerată $Ox$ (sau pe dreapta de coordonate).

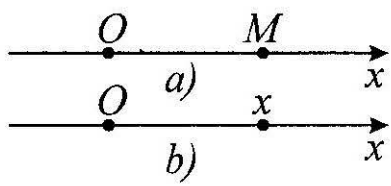



Fig. 10.4

Faptul că punctul $M$ are coordonata $x$ îl vom nota cu $M(x)$.

În felul acesta, fiecărui punct al axei de coordonate $O$ i se asociază un număr real unic $x$ – coordonata punctului. Este adevărată și afirmația reciprocă: fiecărui număr real $x$ i se asociază acel unic punct $M$ de pe axa de coordonate, astfel încât coordonata lui este egală cu $x$.

Așadar, fixarea unei axe de coordonate $Ox$ pe dreapta dată determină o corespondență bijectivă între toate punctele dreptei date (axei de coordonate) și numerele reale: fiecărui punct $M \in Ox$ i se atașează coordonata sa $x \in \mathbf{R}$.

Această corespondență bijectivă dă posibilitate de a interpreta punctele axei de coordonate ca numere reale și reciproc: ca numerele reale să fie reprezentate geometric prin puncte ale axei de coordonate. De aceea, în dreptul punctului pe axa de coordonate deseori se scrie numărul – coordonata $x$ a acestui punct (fig. 10.4, b).

Originea $O$ împarte axa de coordonate în două părţi – *semiaxe*, pozitivă şi negativă. Semiaxa pozitivă reprezintă mulţimea punctelor $M(x) \in Ox$ a căror coordonată este nenegativă, adică $x \geq 0$, iar semiaxa negativă – pentru care $x \leq 0$.

Mărimea segmentului orientat şi lungimea sa pot fi exprimate prin coordonatele originii şi ale extremităţii acestui segment.

**Teorema 10.1.** *Dacă $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ sunt două puncte de pe axa de coordonate (adică $x_1 = OM_1$ şi $x_2 = OM_2$), atunci mărimea segmentului orientat $\overline{M_1M_2}$ şi lungimea sa se exprimă, respectiv, prin formulele:*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1; \tag{10.2}$$

$$|\overline{M_1M_2}| = |x_2 - x_1|. \tag{10.3}$$

▷ Scriind indentitatea de bază referitor la punctele $O$, $M_1$, $M_2$, obţinem egalitatea $OM_1 + M_1M_2 = OM_2$. Dar $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ (fig. 10.5).

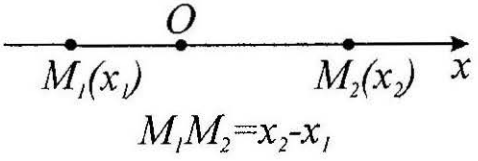



Fig. 10.5

Deci avem $x_1 + M_1M_2 = x_2$, de unde rezultă formula $M_1M_2 = x_2 - x_1$. Fiindcă $M_1M_2 = \pm|\overline{M_1M_2}|$, deducem că $|\overline{M_1M_2}| = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$. ◁

**Exemplu.** Se dau punctele $M_1(3)$ şi $M_2(-5)$. Să se afle mărimea segmentului orientat $\overline{M_1M_2}$ şi distanţa dintre aceste puncte.

În cazul dat, $x_1 = 3$, $x_2 = -5$; conform formulelor (10.2) şi (10.3), aflăm $M_1M_2 = -5 - 3 = -8$, $\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = |-5 - 3| = 8$.

## 10.3. Sistem rectangular de coordonate în plan

Vom spune că în plan este introdus un sistem de coordonate, dacă este descris ansamblul de condiţii conform cărora poate să fie determinată poziţia punctului cu ajutorul numerelor (sau al altor simboluri).

Sistemul de coordonate în plan poate fi introdus în modul următor.

Considerăm în plan două axe perpendiculare. Admitem punctul $O$ de intersecţie a axelor ca origine comună a ambelor axe. Notăm aceste axe pin $Ox$ şi $Oy$.

Sistemul ordonat format din două axe de coordonate reciproc perpendiculare $Ox$ şi $Oy$ cu originea comună $O$ (fig. 10.6), pentru care este aleasă o unitate de scară – una şi aceeaşi pentru ambele axe –, determină în mod unic un *sistem de coordonate cartezian rectangular* (după numele matematicianului Descartes), sau *sistem rectangular de coordonate* în plan.

Punctul $O$ se numeşte *originea* sistemului de coordonate sau *originea de coordonate*; axa $Ox$ se consideră prima şi se numeşte *axa absciselor*, iar axa $Oy$ – a doua şi se numeşte *axa ordonatelor*.

Introducerea unităţii de scară pe axele $Ox$ şi $Oy$ se efectuează, de obicei, prin fixarea pe fiecare din ele, respectiv, a câte un punct $E_1$ şi $E_2$ diferit de $O$, numite *puncte unitare*, care totodată determină şi sensurile de parcurs ale acestor axe: $OE_1 = 1$, $OE_2 = 1$.

Planul în care sunt situate axele $Ox$ şi $Oy$ se numeşte *planul de coordonate* şi îl notăm cu $Oxy$. Însuşi sistemul de coordonate de asemenea îl vom nota prin $Oxy$.

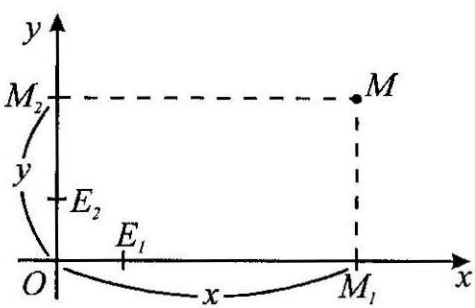



Fig. 10.6

Fie $M$ un punct arbitrar din plan. Ducem din punctul $M$ perpendiculare pe axele $Ox$ şi $Oy$. Notăm punctele de intersecţie ale acestor perpendiculare cu axele $Ox$ şi $Oy$, respectiv, prin $M_1$ şi $M_2$.

**Definiţie.** Se numesc *coordonatele carteziene rectangulare*, sau simplu *coordonatele rectangulare*, ale punctului $M$ (faţă de sistemul ortogonal de axe considerat) în plan mărimile $OM_1$ şi $OM_2$ ale seg-

mentelor orientate $\overline{OM_1}$ şi $\overline{OM_2}$:

$$x = OM_1, \quad y = OM_2.$$

Faptul că punctul $M$ are coordonatele $x$ şi $y$ se notează prin scrierea alăturată a punctului şi a coordonatelor sale, adică $M(x, y)$. Prima coordonată $x$ se numeşte *abscisa*, iar a doua $y$ – *ordonata* punctului $M$.

Din definiţia coordonatelor punctului $M$ rezultă nemijlocit rezolvarea următoarelor două probleme de bază.

**Problema I.** Se dă punctul $M$ în plan. Să se afle coordonatele lui.

Rezolvarea se obţine ducând din $M$ perpendiculara $MM_1$ pe axa absciselor $Ox$. Atunci $OM_1 = x$, $M_1M = y$ (fig. 10.6). Obţinem $M(x, y)$.

În felul acesta, fiecărui punct $M$ al planului $Oxy$ i se asociază o pereche ordonată unică de numere reale $(x, y)$ – coordonatele lui.

**Problema II.** Fiind dată perechea de numere reale $(x, y)$ – coordonatele punctului $M$ din plan, de construit acest punct.

Pentru a rezolva această problemă, construim un punct $M_1$ pe axa $Ox$, astfel încât $|\overline{OM_1}| = |x|$. Punctul $M_1$ se ia pe $Ox$ la dreapta de $O$, dacă $x > 0$, şi – la stânga de $O$, dacă $x < 0$. Punctul $M_1$ este unic. În mod analog construim un singur punct $M_2$ pe $Oy$. Avem $OM_1 = x$, $OM_2 = y$ – mărimile segmentelor $\overline{OM_1}$ şi $\overline{OM_2}$. Ducând prin $M_1$ şi $M_2$ drepte paralele la axele de coordonate, obţinem la intersecţia lor punctul unic $M$.

În acest fel, perechii de numere $(x, y)$ i se asociază acel punct unic $M$ din planul $Oxy$, încât abscisa lui este egală cu $x$, iar ordonata – cu $y$.

Constatăm deci că fixarea unui sistem rectangular de axe reciproc perpendiculare $Ox$ şi $Oy$ în plan determină o corespondenţă bijectivă între toate punctele planului şi perechile ordonate de numere reale: fiecărui punct $M$ din plan i se ataşează perechea de coordonate ale sale $(x, y)$. Această bijecţie se numeşte *sistem de coordonate cartezian rectangular* în plan.

Axele împart planul în patru regiuni: I: $x > 0$, $y > 0$; II: $x < 0$, $y > 0$; III: $x < 0$, $y < 0$; IV: $x > 0$, $y < 0$, numite *cadrane deschise*. În fiecare cadran punctul $M(x, y)$ are semnele coordonatelor arătate

în fig. 10.7. Mulţimea $\{M(x,y)|x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ se numeşte *semiplanul superior*, iar $\{M(x,y)|x \in \mathbf{R}, y < 0\}$ se numeşte *semiplanul inferior*.

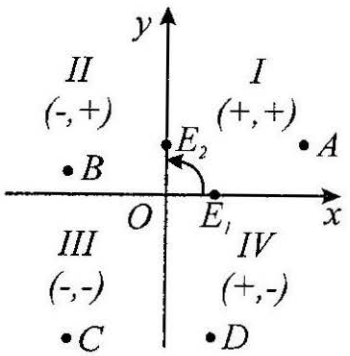



Fig. 10.7

Dacă punctul $M$ este situat pe axa $Ox$, atunci ordonata lui $y = 0$, adică $M(x,0)$, iar dacă pe $Oy$, atunci $M(0,y)$. Pentru originea coordonatelor avem $O(0,0)$.

E x e m p l u. În figura 10.7 avem $A(3,1)$, $B(-2,\frac{1}{2})$, $C(-2,-3)$, $D(1,-3)$, $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$.

Vom conveni în viitor să spunem că "este dat un punct M" dacă sunt date coordonatele lui.

R e m a r c a 1. Pe axele de coordonate $Ox$ şi $Oy$ se pot lua unităţi de scară diferite, ceea ce e comod uneori la construirea graficilor. Atunci obţinem un "sistem rectangular de coordonate generalizat". Însă în aşa sistem formulele geometriei analitice se complică.

R e m a r c a 2. Sunt posibile două tipuri de sisteme rectangulare de coordonate – *sistem drept* şi *sistem stâng* de coordonate. În sistemul drept de coordonate în plan axele se orientează astfel, încât rotirea axei $Ox$ în jurul punctului $O$ cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ împotriva sensului mişcării acelor de ceasornic suprapune semiaxa pozitivă a axei absciselor $Ox$ cu semiaxa pozitivă a axei ordonatelor $Oy$ (fig. 10.7). În caz contrar, sistemul este stâng.

În viitor, dacă nu se va menţiona contrariul, totdeauna vom considera că sistemul de coordonate în plan este drept.

## 10.4. Distanţa dintre două puncte în plan

**T e o r e m a 10.2.** *Distanţa $d$ dintre două puncte $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ ale planului este dată de formula*

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (10.1)$$

▷ Fie $A_1$, $B_1$ şi $A_2$, $B_2$ punctele de intersecţie ale perpendicularelor duse, respectiv, din punctele $A$ şi $B$ pe axele de coordonate $Ox$ şi $Oy$ (fig. 10.8) şi $C$ – punctul de intersecţie al dreptelor $AA_2$ şi $BB_1$.

În baza definiţiei coordonatelor punctului, avem $x_1 = OA_1$, $x_2 = OB_1$, $y_1 = OA_2$, $y_2 = OB_2$, iar punctul $C$ are coordonatele $(x_2, y_1)$.

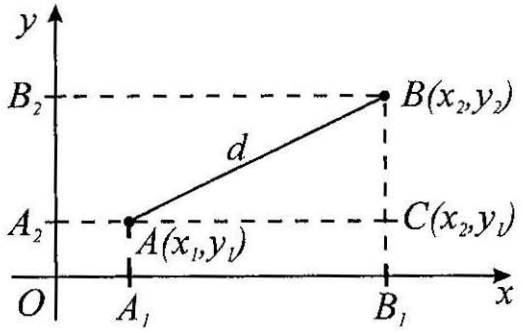



Fig. 10.8

Dacă $x_1 = x_2$, atunci dreapta $AB$ este paralelă cu axa $Oy$ şi $x_2 - x_1 = 0$. În acest caz, conform teoremei 10.1, formula rezultă astfel:

$$d = |\overline{AB}| = |y_2 - y_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Cazul $y_2 = y_1$ se demonstrează în mod analog.

Să presupunem că $x_1 \neq x_2$ şi $y_1 \neq y_2$. În acest caz, triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $C$, iar pe baza teoremei 10.1, avem: $|\overline{AC}| = |\overline{A_1B_1}| = |x_2 - x_1|$ şi $|\overline{CB}| = |\overline{A_2B_2}| = |y_2 - y_1|$. Conform teoremei lui Pitagora[3], $d^2 = |\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$, de unde rezultă formula (10.1). ◁

E x e m p l u. Să se afle distanţa dintre punctele $A(-3, 2)$ şi $B(5, -4)$.

Aplicând formula (10.1), obţinem

$$d = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

[3]Pitagora (Pythagoras) – sec. VI î.Hr. – filozof şi matematician grec. Tradiţia îi atribuie descoperirea tabelei de înmulţire şi a teoremei ce-i poartă numele.

## 10.5. Sistem rectangular de coordonate în spaţiu

Considerăm în spaţiul fizic obişnuit, real, trei axe perpendiculare două câte două, care se intersectează într-un punct $O$. Admitem punctul $O$ ca origine comună a axelor şi notăm aceste axe cu $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Sistemul ordonat de trei axe de coordonate reciproc perpendiculare $Ox$, $Oy$, $Oz$ cu originea comună $O$(fig. 10.9), pentru care este aleasă o unitate de scară – una şi aceeaşi pentru toate axele –, determină în mod unic un *sistem de coordonate cartezian rectangular*, sau *sistem rectangular de coordonate*, în spaţiu. Sistemul indicat de axe, precum şi însuşi sistemul de coordonate se notează prin simbolul $Oxyz$. Punctul $O$ se numeşte *originea de coordonate*; axele $Ox$, $Oy$, $Oz$ se numesc, respectiv, *axa absciselor*, *axa ordonatelor* şi *axa aplicatelor*. Planul în care sunt situate axele $Ox$ şi $Oy$ se notează prin $Oxy$. Planele $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$ se numesc *plane de coordonate*. Ele împart tot spaţiul în opt părţi, numite *octante*.

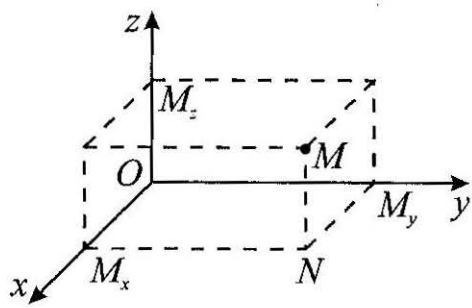



Fig. 10.9

Fie $M$ un punct arbitrar din spaţiu (fig. 10.9). Ducem prin punctul $M$ plane perpendiculare pe axele de coordonate. Punctele de intersecţie a acestor plane cu axele de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$ le notăm, respectiv, cu $M_x$, $M_y$, $M_z$.

**Definiţie.** Se numesc *coordonatele carteziene rectangulare*, sau simplu *coordonatele rectangulare*, ale punctului $M$ (faţă de sistemul ortogonal de axe considerat) în spaţiu numerele:

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

adică mărimile segmentelor orientate $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$; în acest caz, $x$ se numeşte *abscisa*, $y$ – *ordonata*, iar $z$ – *aplicata* punctului $M$.

Faptul că punctul $M$ are coordonatele $x$, $y$, $z$ ($x$ – prima, $y$ – a doua, $z$ – a treia) se notează prin scrierea alăturată a punctului $M$ şi

a coordonatelor sale, adică $M(x, y, z)$.

În felul acesta, în raport cu sistemul rectangular de axe $Oxyz$ în spaţiu, fiecărui punct $M$ al spaţiului i se asociază un triplet ordonat de numere reale $(x, y, z)$ – coordonatele spaţiale ale punctului. Reciproc, fiecărui triplet ordonat de numere reale $(x, y, z)$ i se asociază acel unic punct $M$ din spaţiu, astfel încât abscisa lui este egală cu $x$, ordonata – cu $y$, iar aplicata – cu $z$. Pentru a construi acest punct, construim pe axele de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$ punctele $M_x$, $M_y$, $M_z$ după coordonatele $x$, $y$, $z$ şi prin ele ducem plane paralele respectiv la planele de coordonate $Oyz$, $Oxz$, $Oxy$. La intersecţia acestor plane obţinem punctul căutat $M$. Punctul $M$, după coordonatele sale, mai poate fi construit şi astfel: mai întâi construim în planul $Oxy$ punctul $N$ cu coordonatele $x = OM_x$ şi $y = OM_y$, iar apoi în $N$ aplicăm segmentul $\overline{NM}$ de mărimea $NM = z$, perpendicular pe planul $Oxy$.

Constatăm deci că fixarea unui sistem de axe $Ox, Oy, Oz$ perpendiculare două câte două în spaţiu determină o corespondenţă bijectivă între toate punctele spaţiului şi tripletele ordonate de numere reale: fiecărui punct $M$ al spaţiului i se ataşează tripletul de coordonate spaţiale ale sale $(x, y, z)$. Această bijecţie este numită *sistem de coordonate cartezian rectangular* în spaţiu.

Pentru toate punctele planului $Oxy$, avem $z = 0$, adică $M(x, y, 0)$; pentru toate punctele axei $Ox$, avem $y = 0$, $z = 0$, adică $M(x, 0, 0)$. În mod analog şi pentru celelalte axe şi plane de coordonate.

R e m a r c ă. Axele $Ox$, $Oy$, $Oz$ pot forma un sistem drept sau stâng de coordonate.

Sistemul rectangular de coordonate se numeşte *sistem drept* de coordonate dacă axele lui sunt orientate astfel, încât observatorul care priveşte la planul $Oxy$ dintr-un punct al semiaxei pozitive a axei aplicatelor $Oz$ vede rotirea semiaxei pozitive a axei absciselor $Ox$ în jurul punctului $O$ către semiaxa pozitivă a axei ordonatelor $Oy$ cu unghiul $\pi/2$ ca fiind efectuată împotriva sensului mişcării acelor de ceasornic. În caz contrar, sistemul se numeşte *sistem stâng* de coordonate.

## 10.6. Vectori liberi în spaţiu. Operaţii liniare cu vectori

### 10.6.1. Mărimi scalare şi vectoriale

În matematică şi în aplicaţiile ei se deosebesc două tipuri de mărimi: scalare şi vectoriale. O mărime se numeşte *mărime scalară*,

sau simplu *scalar*, dacă ea se determină pe deplin numai prin valoarea numerică (număr) ce exprimă raportul acestei mărimi către unitatea corespunzătoare de măsură. Mărimi de acest tip sunt, de exemplu, masa unui corp, densitatea, temperatura, volumul lui etc. Se numeşte *mărime vectorială*, sau simplu *vector*, orice mărime care în afară de valoarea numerică se caracterizează încă şi prin direcţia şi sensul ei. Exemple de astfel de mărimi sunt: forţa, viteza, acceleraţia, sisteme ordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de numere reale în economie etc.

### 10.6.2. Noţiunea de vector liber

Vom supune examinării spaţiul fizic, real. În spaţiul de două şi de trei dimensiuni, vectorul (în particular vectorul aritmetic respectiv) poate fi reprezentat geometric sub formă de *segment orientat*, adică printr-un segment de dreaptă la care se deosebesc între ele *originea* şi *extremitatea* lui. Dacă $A$ este originea vectorului (a segmentului orientat), iar $B$ – extremitatea lui, atunci vectorul se notează prin simbolul $\overline{AB}$. Vectorul se mai notează şi printr-o literă mică cu liniuţă deasupra, de exemplu $\overline{a}$. Pe desen vectorul $\overline{AB}$ se reprezintă grafic prin săgeata care uneşte $A$ cu $B$ şi are vârful ei în $B$ (fig. 10.10).

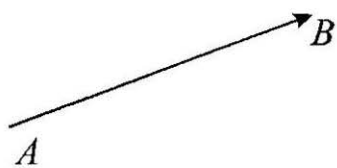



Fig. 10.10

Dreapta determinată de segmentul $\overline{AB}$ se numeşte *dreapta suport* a lui $\overline{AB}$ şi se notează cu $AB$. Direcţia dreptei $AB$ determină direcţia segmentului orientat $\overline{AB}$. Simbolul $\overline{BA}$ va însemna, evident, segmentul cu originea în punctul $B$ şi extremitatea în punctul $A$. Segmentul orientat este numit de asemenea şi *vector geometric*, sau simplu *vector*. Mai departe vom folosi vectorii geometrici la studierea geometriei analitice. Prin noţiunea de *lungimea* (sau *modulul*) *vectorului* vom înţelege distanţa dintre originea şi extremitatea sa. Lungimea vectorului $\overline{a} = \overline{AB}$ vom nota-o prin simbolul $|\overline{AB}|$ sau $|\overline{a}|$. Evident, vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ au aceeaşi lungime (adică $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$), aceeaşi direcţie şi sensuri opuse.

Menţionăm că vectorul pe deplin se determină de originea şi extremitatea sa. Vectorul poate fi dat de asemenea numai prin originea (punctul de aplicaţie), lungimea, direcţia şi sensul lui. Însă pentru o serie de probleme punctul de aplicaţie al vectorului nu importă – are însemnătate numai lungimea vectorului, direcţia şi sensul lui. Aceasta conduce la definirea noţiunii de vector liber.

**Definiţie.** Doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se numesc *egali* şi se scrie $\overline{a} = \overline{b}$, dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$) şi aceeaşi lungime ($|\overline{a}| = |\overline{b}|$) (fig. 10.11).

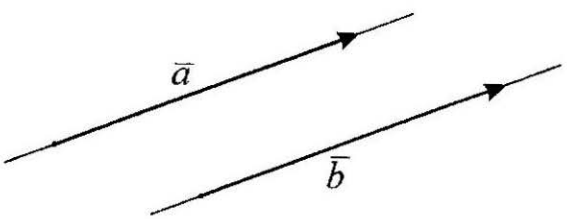



Fig. 10.11

Din definiţia egalităţii vectorilor rezultă că dacă vectorul dat este deplasat paralel cu sine însuşi, alegând un punct nou de aplicaţie a vectorului, obţinem un alt vector egal cu cel dat. Cu alte cuvinte, dacă punctul de aplicaţie al vectorului nu are însemnatate, atunci vectorul dat poate fi deplasat păstrându-i lungimea, direcţia şi sensul, punând originea sa în orice punct al spaţiului. Astfel de vector se numeşte *vector liber*. Vectorii egali nu îi vom deosebi unul de altul. În felul acesta, vectorul liber reprezintă mulţimea tuturor vectorilor geometrici egali între ei în sensul arătat. În mod intuitiv, vectorul liber poate fi considerat ca un segment orientat care migrează în spaţiu păstrându-şi lungimea, direcţia şi sensul. În geometria analitică vom examina numai vectori geometrici liberi, de aceea cuvântul "liber" îl omitem, dar totdeauna îl vom subînţelege.

Vom introduce câteva noţiuni care se întâlnesc des în algebra vectorială.

Vectorii liberi care au aceeaşi direcţie se numesc *vectori coliniari*. Vectorii coliniari, evident, sunt situaţi pe aceeaşi dreaptă sau pe drepte paralele.

Un vector cu lungimea unu se numeşte *versor* sau *vector unitar* (*unitate*).

Vom admite de asemenea şi vectori nuli. Vectorul liber la care originea coincide cu extremitatea sa se numeşte *vector nul.* El se notează cu $\overline{0}$. Vectorul nul se reprezintă grafic prin orice punct al spaţiului. Lungimea vectorului nul este egală cu zero, iar direcţia şi sensul sunt nedeterminate. De aceea se consideră că vectorul nul este coliniar cu orice alt vector.

Doi vectori coliniari care au aceeaşi lungime, însă sunt de sensuri opuse se numesc *vectori opuşi.* Dacă unul dintre ei este notat cu $\overline{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\overline{a}$ (fig. 10.12).

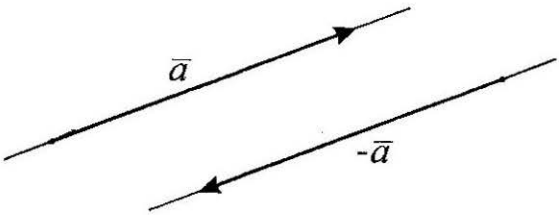



Fig. 10.12

### 10.6.3. Adunarea vectorilor geometrici

După cum deja ne este cunoscut din p. 10.6.2, din definiţia egalităţii vectorilor rezultă că vectorul poate fi deplasat paralel punând originea sa în orice punct al spaţiului. Acum operaţia adunării vectorilor o definim în modul următor.

**Definiţie.** Fie vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$; deplasăm în spaţiu vectorul $\overline{b}$ paralel cu sine însuşi, astfel încât originea sa să coincidă cu extremitatea primului vector $\overline{a}$. Atunci vectorul $\overline{s}$ originea căruia coincide cu originea primului vector $\overline{a}$, iar extremitatea – cu extremitatea vectorului al doilea $\overline{b}$ se numeşte *suma vectorilor* $\overline{a}$ *şi* $\overline{b}$ şi se notează $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$ (fig. 10.13).

Notăm cu $V_3$ mulţimea tuturor vectorilor geometrici liberi. Aplicaţia

$$V_3 \times V_3 \to V_3, \quad (\overline{a}, \overline{b}) \mapsto \overline{a} + \overline{b}$$

se numeşte *adunarea vectorilor liberi.* Regula de adunare a doi vectori liberi care se conţine în definiţia precedentă se numeşte *regula triunghiului.*

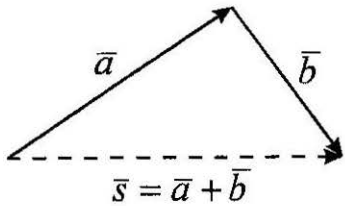



Fig. 10.13

Dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vor fi aplicaţi din originea comună $O$ şi pe ei se va construi paralelogramul $OABC$ ca pe laturi, atunci diagonală $\overline{OB}$ a acestui paralelogram, evident, este egală cu suma acestor vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, adică $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$. Aceasta e aşa-numita *regula paralelogramului* de adunare a doi vectori (fig. 10.14).

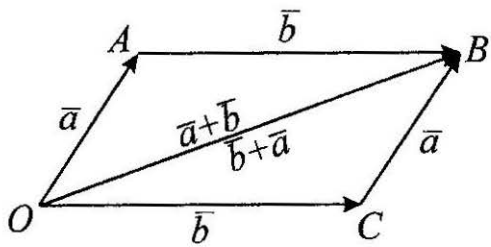



Fig. 10.14

Operaţia introdusă "+" de adunare a vectorilor geometrici este *comutativă* şi *asociativă*, adică oricare ar fi $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, avem:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (comutativitate);

2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (asociativitate), ceea ce uşor rezultă examinând figurile 10.14 şi 10.15.

Există *vectorul nul* $\bar{0}$, astfel încât

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \quad \text{pentru orice vector } \bar{a}.$$

Pentru orice vector $\bar{a}$, există *vectorul opus* $-\bar{a}$, astfel încât

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}.$$

Verificarea acestor proprietăţi ale adunării vectorilor este lăsată drept temă.

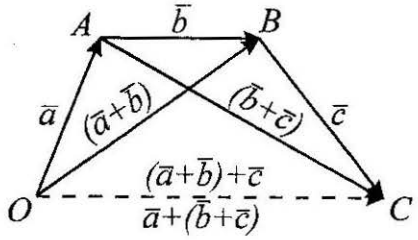



Fig. 10.15

Operaţia $(-)$ de *scădere* a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se defineşte prin formula: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, adică diferenţa $\bar{a}-\bar{b}$ este suma vectorilor $\bar{a}$ şi $(-\bar{b})$.

### 10.6.4. Înmulţirea unui vector geometric cu un număr

**Definiţie.** Prin *produsul dintre vectorul geometric $\bar{a}$ şi numărul real (scalarul) $\alpha$* vom înţelege vectorul $\alpha\bar{a}$ definit astfel:

a) vectorii $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{a}$ sunt coliniari;

b) $|\alpha\bar{a}|=|\alpha|\cdot|\bar{a}|$, adică lungimea vectorului $\alpha\bar{a}$ este de $|\alpha|$ ori "mai mare" ca lungimea vectorului $\bar{a}$;

c) $\alpha\bar{a}$ şi $\bar{a}$ au acelaşi sens, dacă $\alpha>0$, şi sensuri contrare, dacă $\alpha<0$ (fig. 10.16).

Se spune, de asemenea, că $\alpha\bar{a}$ este produsul vectorului $\bar{a}$ cu numărul $\alpha$ (sau prin scalarul $\alpha$), sau produsul lui $\alpha$ cu $\bar{a}$. Corespondenţa

$$\mathbf{R}\times V_3\to V_3,\quad (\alpha,\bar{a})\mapsto\alpha\bar{a}$$

se numeşte *înmulţirea vectorilor liberi cu numere reale*, sau simplu *înmulţirea prin scalar.*

Operaţia de înmulţire a vectorului cu un număr (scalar), pentru orice numere reale $\alpha$ şi $\beta$ şi oricare vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, posedă următoarele proprietăţi:

1. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$;
2. $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$ (asociativitatea înmulţirii prin scalari a vectorului);

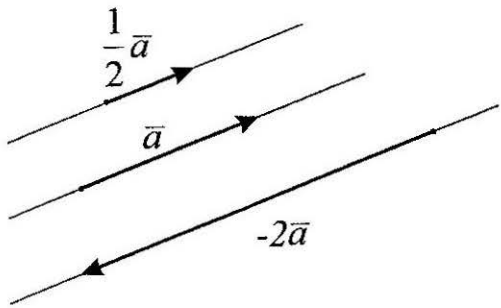



Fig. 10.16

3. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (distributivitatea înmulţirii prin vector a sumei scalarilor);

4. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (distributivitatea înmulţirii prin scalar a sumei vectorilor).

La înmulţirea vectorului $\bar{a}$ prin numărul $-1$ se obţine vectorul opus $-\bar{a}$, adică $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$.

Toate aceste proprietăţi se demonstrează uşor dacă se consideră înmulţirea vectorului $\bar{a}$ prin numărul $\alpha$ ca operaţie de "întindere" a vectorului $\bar{a}$ de $|\alpha|$ ori.

Operaţiile definite mai sus: adunarea, scăderea vectorilor şi înmulţirea vectorului cu un scalar sunt numite *operaţii liniare*.

## 10.7. Proiecţia ortogonală a unui vector pe o axă

Să introducem mai întâi noţiunea de unghi dintre doi vectori nenuli.

**Definiţia 1.** Se numeşte *unghiul dintre doi vectori* (sau *dintre un vector şi o axă*, sau dintre două axe) cel mai mic unghi $\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ cu care trebuie să rotim în jurul unui punct $O$ unul dintre aceşti vectori (axe), astfel încât el (ea) să coincidă după direcţie şi sens cu celălalt vector (sau axă) (fig. 10.17, a, b). Unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se notează $\widehat{(\bar{a}, \bar{b})}$

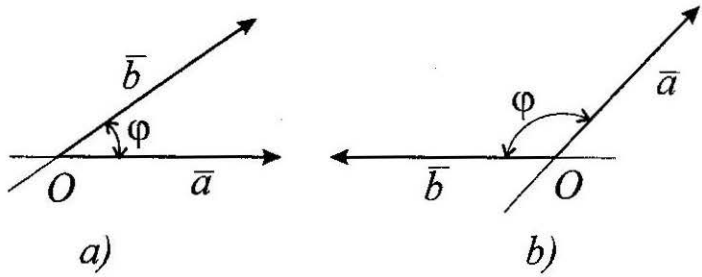



Fig. 10.17

**Definiţia 2.** Se numeşte *proiecţie* a unui punct $A$ pe o axă $l$ piciorul $A'$ al perpendicularei $AA'$ duse din punctul $A$ pe axa $l$ (fig. 10.18).

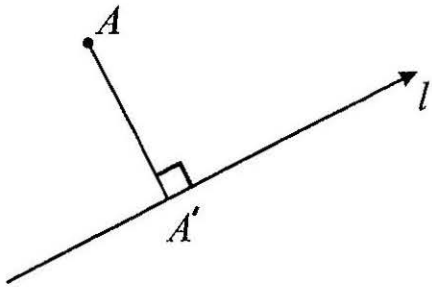



Fig. 10.18

Proiecţia $A'$ este de asemenea punctul de intersecţie a planului, ce trece prin punctul $A$ şi este perpendicular pe axa $l$, cu această axă.

Expresia "proiecţia vectorului pe o axă" se foloseşte în două sensuri diferite, geometric şi algebric.

Fie dat în spaţiu un vector oarecare $\overline{AB}$ şi o axă $l$. Prin punctele $A$ şi $B$ ducem planele $\alpha$ şi $\beta$, respectiv perpendiculare pe axa $l$. Aceste plane intersectează $l$, respectiv, în punctele $A'$ şi $B'$ – proiecţiile punctelor $A$ şi $B$ pe axa $l$ (fig. 10.19).

**Definiţia 3.** Se numeşte *proiecţia ortogonală* (geometrică) a unui vector $\overline{AB}$ pe o axă $l$ vectorul $\overline{A'B'}$, unde $A'$ este proiecţia originii $A$ a vectorului pe axa $l$, iar $B'$ – proiecţia extremităţii $B$ a vectorului pe aceeaşi axă.

Proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{AB}$ pe axa $l$ vom nota-o cu $\pi_l\overline{AB}$. Deci $\pi_l\overline{AB} = \overline{A'B'}$ (fig. 10.19). Proiecţia geometrică a vectorului pe o axă $l$ se mai numeşte şi *componenta* vectorului considerat pe axa $l$.

**Definiţia 4.** Se numeşte *proiecţia algebrică*, sau simplu *proiecţia*, a unui vector $\overline{AB}$ pe o axă $l$ mărimea $A'B'$ a segmentului orientat $\overline{A'B'}$ pe axă, cuprins între proiecţiile $A'$ şi $B'$, respectiv a originii şi a extremităţii vectorului $\overline{AB}$ pe această axă (fig 10.19).

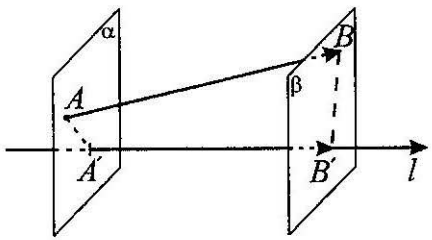



Fig. 10.19

Se notează această proiecţie prin simbolul $pr_l\overline{AB}$. Aşadar,

$$pr_l\overline{AB} = A'B' = \pm|\overline{A'B'}| \tag{10.1}$$

(luată, corespunzător, cu unul dintre semne).

Să expunem proprietăţile de bază ale proiecţiilor vectorilor pe o axă.

**T e o r e m a 10.3.** *Proiecţia unui vector pe o axă este egală cu produsul dintre lungimea acestui vector şi cosinusul unghiului dintre vector şi axă:*

$$pr_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi, \tag{10.2}$$

*unde* $\varphi = (\widehat{l,\overline{a}})$ (fig. 10.20, a, b).

▷ Să demonstrăm această proprietate pentru cazul $\varphi > 90°$ (fig. 10.20, b). Din triunghiul dreptunghic $ABB_1$ avem $|\overline{AB_1}| = |\overline{AB}|\cos(180° - \varphi) = -|\overline{AB}|\cos\varphi$; de aceea $pr_l\overline{a} = A'B' = -|\overline{A'B'}| = -|\overline{AB_1}| = |\overline{AB}|\cos\varphi = |\overline{a}|\cos\varphi$.

Cazul $\varphi < 90°$ se demonstrează în mod analog. ◁

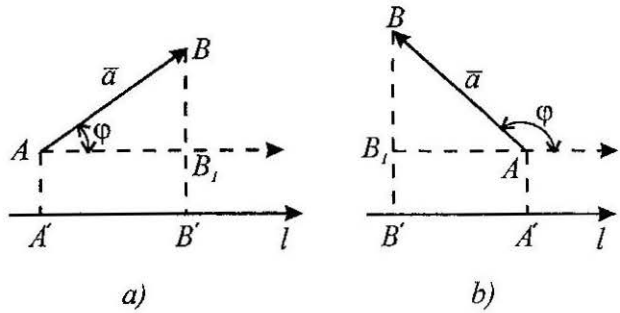



Fig. 10.20

C o n s e c i n ţ ă. *Proiecţiile vectorilor egali pe una şi aceeaşi axă sunt egale între ele* (fig. 10.21):

$$\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow pr_l\overline{a} = pr_l\overline{b}. \tag{10.3}$$

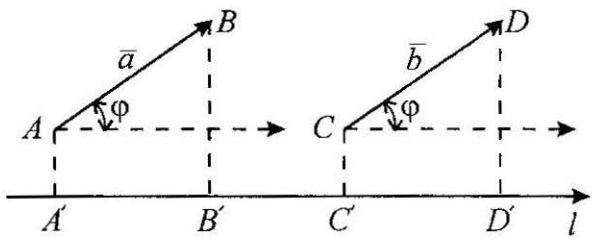



Fig. 10.21

▷ Pentru $\overline{a} = \overline{b}$, avem $(\widehat{l,\overline{a}}) = (\widehat{l,\overline{b}}) = \varphi$, $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ şi atunci din (10.2) rezultă formula (10.3). ◁

**T e o r e m a 10.4.** *Proiecţia unei sume de vectori pe o axă este egală cu suma proiecţiilor termenilor pe aceeaşi axă:*

$$\pi_l(\overline{a} + \overline{b}) = \pi_l\overline{a} + \pi_l\overline{b}; \tag{10.4}$$

$$pr_l(\overline{a} + \overline{b}) = pr_l\overline{a} + pr_l\overline{b}. \tag{10.5}$$

▷ Construim vectorii $\overline{AB} = \overline{a}$ şi $\overline{BC} = \overline{b}$ (fig. 10.22). Atunci $\overline{a} + \overline{b} = \overline{AC}$. Proiectăm ortogonal aceşti vectori pe axa $l$. Fie $A'$,

$B'$, $C'$ proiecţiile punctelor $A$, $B$, $C$ pe axa $l$. Atunci avem $\overline{A'C'} = \pi_l\overline{AC} = \pi_l(\bar{a} + \bar{b})$; $\overline{A'B'} = \pi_l\overline{AB} = \pi_l\bar{a}$; $\overline{B'C'} = \pi_l\overline{BC} = \pi_l\bar{b}$. Conform regulii triunghiului (a se vedea p. 10.6.3), aplicată asupra vectorilor $\overline{A'B'}$ şi $\overline{B'C'}$, rezultă $\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$.

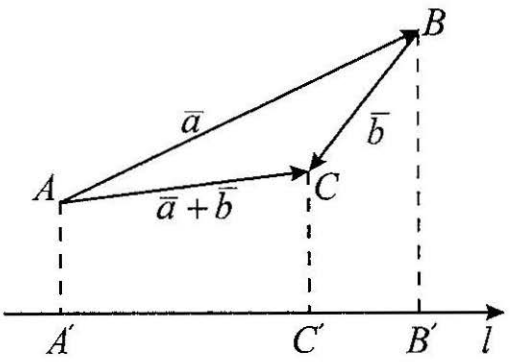



Fig. 10.22

Substituind aici expresiile vectorilor din egalităţile precedente, obţinem relaţia (10.4). Mai departe, relaţia (10.5) rezultă din examinarea figurii 10.22. Avem: $pr_l\bar{a} = pr_l\overline{AB} = A'B'$, $pr_l\bar{b} = pr_l\overline{BC} = B'C'$ şi $pr_l(\bar{a}+\bar{b}) = pr_l\overline{AC} = A'C'$. Scriind identitatea de bază referitoare la punctele $A'$, $B'$, $C'$ de pe axa $l$ (a se vedea (10.1) p. 10.2.1), avem $A'B' + B'C' = A'C'$. De aici rezultă $pr_l(\bar{a} + \bar{b}) = pr_l\bar{a} + pr_l\bar{b}$. ◁

**Teorema 10.5.** *La înmulţirea vectorului cu un număr (scalar) proiecţia sa se înmulţeşte prin acelaşi număr:*

$$\pi_l(\alpha\bar{a}) = \alpha\pi_l\bar{a}; \tag{10.6}$$

$$pr_l(\alpha\bar{a}) = \alpha pr_l\bar{a}. \tag{10.7}$$

▷ Fixăm un punct $O$ al axei $l$ şi construim vectorii $\overline{OA} = \bar{a}$ şi $\overline{OB} = \alpha\bar{a}$ (fig. 10.23, a, b). Fie $A'$, $B'$ proiecţiile ortogonale ale punctelor $A$, $B$ pe axa $l$. Avem

$$\overline{OB} = \alpha\overline{OA}, \tag{10.8}$$

unde $\alpha$ - un număr real; $\pi_l\bar{a} = \pi_l\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\pi_l(\alpha\bar{a}) = \pi_l\overline{OB} = \overline{OB'}$.

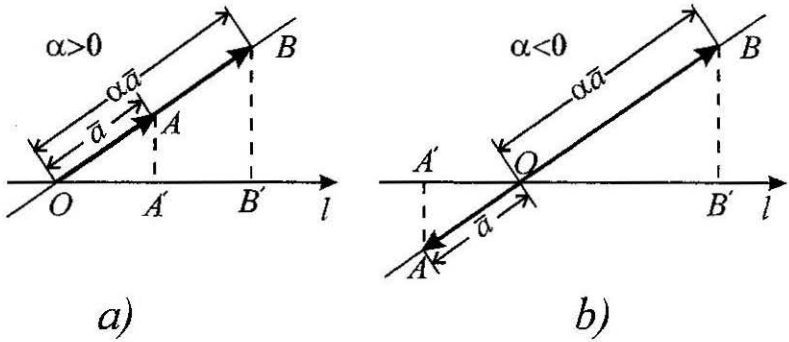



Fig. 10.23

1. Dacă $\alpha > 0$, atunci $\overline{OB}$ şi $\overline{OA}$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens (ca în fig. 10.23, a, $\alpha = 2$); deci, corespunzător, au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens şi vectorii $\overline{OB'}$ şi $\overline{OA'}$. Prin urmare, în baza definiţiei înmulţirii vectorului cu un scalar, conchidem că există un aşa număr pozitiv $\beta$, încât are loc egalitatea

$$\overline{OB'} = \beta \overline{OA'}. \tag{10.9}$$

Tot în acest fel demonstrăm că dacă $\alpha < 0$, atunci vectorii $\overline{OB'}$ şi $\overline{OA'}$ sunt legaţi prin relaţia (10.9), unde $\beta$ – un număr negativ. Din (10.8) rezultă că valoarea absolută a numărului $\alpha$ este

$$|\alpha| = |\overline{OB}| : |\overline{OA}|. \tag{10.10}$$

În mod analog, din (10.9) avem:

$$|\beta| = |\overline{OB'}| : |\overline{OA'}|. \tag{10.11}$$

Ca urmare a asemănării triunghiurilor $OAA'$ şi $OBB'$, membrii ai doilea din egalităţile (10.10) şi (10.11) sunt egali între ei: deci $|\alpha| = |\beta|$. Întrucât numerele $\alpha$ şi $\beta$ au acelaşi semn, rezultă că $\alpha = \beta$. Prin urmare, egalitatea (10.9) se poate transcrie astfel: $\overline{OB'} = \alpha \cdot \overline{OA'}$, adică $\pi_l(\alpha\overline{a}) = \alpha\pi_l\overline{a}$. Pentru $\alpha = 0$, egalitatea (10.6) este evidentă. Formula (10.6) este dedusă.

2. Formula (10.7) o vom deduce în felul următor. Notăm $(\widehat{l, \overline{a}}) = \varphi$. Atunci, pentru $\alpha > 0$, avem $pr_l(\alpha\overline{a}) = |\alpha\overline{a}| \cos(\widehat{l, \alpha\overline{a}}) = |\alpha\overline{a}| \cos\varphi = \alpha|\overline{a}| \cos\varphi = \alpha pr_l\overline{a}$, iar pentru $\alpha < 0$, $pr_l(\alpha\overline{a}) = |\alpha\overline{a}| \cos(\widehat{l, \alpha\overline{a}}) = |\alpha\overline{a}| \cos(\pi - \varphi) = -\alpha|\overline{a}| \cos(\pi - -\varphi) = \alpha|\overline{a}| \cos\varphi = \alpha pr_l\overline{a}$. Pentru $\alpha = 0$, egalitatea (10.7) este evidentă. ◁

## 10.8. Coordonatle unui vector în spaţiu. Reper cartezian

### 10.8.1. Coordonatele vectorului

Fie $Oxyz$ un sistem de coordonate cartezian rectangular (determinat de un sistem ortogonal de axe) în spaţiu şi $\overline{AB}$ un vector oarecare. Considerăm proiecţiile acestui vector pe axele de coordonate:

$$X = pr_x\overline{AB}, \quad Y = pr_y\overline{AB}, \quad Z = pr_z\overline{AB}.$$

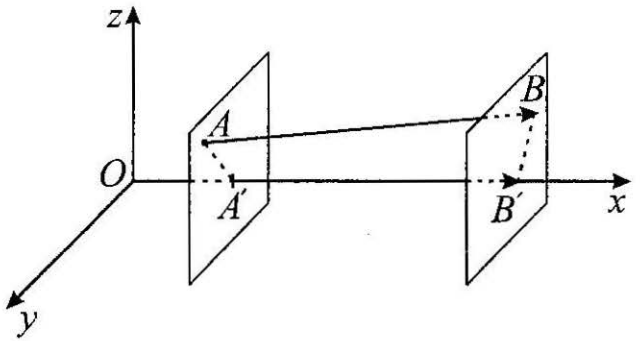



Fig. 10.24

De exemplu, în fig. 10.24 este reprezentată proiecţia $X = pr_x\overline{AB} = A'B'$. În mod analog pot fi reprezentate şi celelalte două proiecţii.

**Definiţie.** Proiecţiile $X$, $Y$, $Z$ ale vectorului $\overline{AB}$ pe axele de coordonate respective $Ox$, $Oy$, $Oz$ se numesc *coordonatele carteziene rectangulare* ale vectorului, sau simplu *coordonatele vectorului* $\overline{AB}$ (în sistemul considerat $Oxyz$).

În acest caz, vom scrie $\overline{AB} = \{X, Y, Z\}$ (sau $\overline{AB} = (X, Y, Z)$). Fiecare dintre aceste notaţii, precum şi notaţia $\overline{AB}(X, Y, Z)$, înseamnă că vectorul $\overline{AB}$ are cooronatele $X, Y, Z$.

Fie $M$ un punct arbitrar din spaţiu. Vectorul $\overline{OM}$ îl vom numi *vectorul de poziţie* al punctului $M$ faţă de punctul origine $O$ (sau *rază vectoare* a punctului $M$).

Proiectăm ortogonal vectorul de poziţie $\overline{OM}$ pe axele de coordonate. Pentru aceasta, prin punctul $M$ ducem plane perpendiculare

pe axele de coordonate. La intersecţia acestor plane cu axele de coordonate obţinem punctele $M_x$, $M_y$, $M_z$ – proiecţiile ortogonale ale punctului $M$ pe axele $Ox$, $Oy$, $Oz$, respectiv (fig. 10.25).

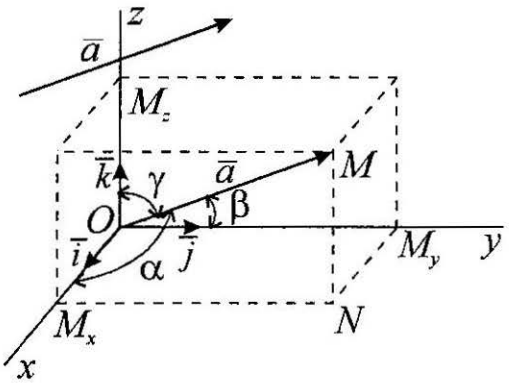



Fig. 10.25

Fie $M(x,y,z)$ şi $\overline{OM} = \{X,Y,Z\}$. Din definiţia coordonatelor $x$, $y$, $z$ ale punctului $M$, avem: $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, iar din definiţiile coordonatelor $X$, $Y$, $Z$ ale vectorului şi a proiecţiei vectorului pe o axă, avem:

$$X = pr_x\overline{OM} = OM_x, Y = pr_y\overline{OM} = OM_y, Z = pr_z\overline{OM} = OM_z.$$

Din aceste egalităţi rezultă că e justă următoarea afirmaţie: *coordonatele vectorului de poziţie $\overline{OM}$ al punctului $M$ faţă de punctul origine $O$ sunt egale cu coordonatele $x$, $y$, $z$ ale extremităţii sale $M$:*

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z.$$

Vom scrie $M(x,y,z)$ şi $\overline{OM} = \{x,y,z\}$.

Dacă $\overline{a}$ este un vector liber arbitrar al spaţiului, atunci, deplasând paralel cu sine însuşi acest vector, aplicăm originea lui în originea de coordonate $O$ şi notăm extremitatea lui prin $M$, adică construim vectorul de poziţie $\overline{OM}$ al punctului $M$, astfel încât $\overline{OM} = \overline{a}$. Proiecţiile vectorului $\overline{a}$ pe axele de coordonate nu se schimbă (deoarece vectorii egali au proiecţii egale pe aceeaşi axă). Proiectând vectorul $\overline{OM}$ pe axele de coordonate, aflăm proiecţiile unice ale acestui vector, adică coordonatele $X$, $Y$, $Z$ ale vectorului $\overline{a} = \overline{OM}$ în sistemul de coordonate $Oxyz$: $\overline{a} = \overline{OM} = \{X,Y,Z\}$ (sau $\overline{a} = \overline{OM} = (X,Y,Z)$).

Reciproc, fiecărui triplet ordonat de numere $\{X, Y, Z\}$ îi corespunde un punct unic $M$ în spaţiu, care, la rândul său, determină vectorul de poziţie unic $\overline{OM}$ al său, astfel încât coordonatele acestui vector sunt, respectiv, egale cu $X$, $Y$, $Z$.

Aşadar, din cele expuse mai sus ajungem la concluzia că fiecărui punct $M$ al spaţiului (sau vectorului de poziţie $\overline{OM}$ al punctului $M$) îi corespunde un triplet ordonat de numere reale $(x, y, z)$ – coordonatele acestui punct. Reciproc, fiecare triplet ordonat de numere $(x, y, z)$ reprezintă geometric un punct unic $M$ (sau vectorul de poziţie $\overline{OM}$ al acestui punct $M$). De aceea tripletul de numere $(x, y, z)$ este numit punctul $M$ (sau vectorul $\overline{a} = \overline{OM}$) care are aceste numere drept coordonatele sale. Respectiv, câteodată se scrie $M = (x, y, z)$ (sau $\overline{a} = (x, y, z)$). Dar $(x, y, z)$ este element al spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^3$. Din această cauză, spaţiul punctual (fizic) tridimensional se identifică într-un anumit sens cu spaţiul $\mathbf{R}^3$. Mulţimea vectorilor liberi ai spaţiului vom nota-o uneori prin acelaşi simbol $\mathbf{R}^3$ ca şi însuşi spaţiul. Mulţimile vectorilor din plan şi de pe dreaptă le vom nota, respectiv, prin $\mathbf{R}^2$ şi $\mathbf{R}$.

### 10.8.2. Descompunerea vectorului în reperul $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$

Fie

$$\overline{a} = \{X, Y, Z\} \tag{10.1}$$

un vector liber oarecare din spaţiul $Oxyz$. Luăm originea de coordonate $O$ drtept punctul de aplicaţie al vectorului $\overline{a}$, adică construim vectorul de poziţie $\overline{OM}$ al unui punct $M$, astfel încât $\overline{a} = \overline{OM}$ (fig. 10.25). Deci $\overline{OM} = \{X, Y, Z\}$.

Considerăm trei vectori $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ cu originea $O$, lungimile cărora sunt egale cu unitatea ($|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$), iar sensurile lor coincid, respectiv, cu sensurile pozitive ale axelor de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$. Vom numi aceşti vectori *vectori unitate*, sau *versori*, ai axelor respective de coordonate, iar sistemul ordonat $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ format din trei versori perpendiculari doi câte doi (ortogonali) – *bază ortonormată de coordonate* a spaţiului $\mathbf{R}^3$.

Ansamblul $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ compus dintr-un punct $O$ şi o bază ortonormată $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ în $\mathbf{R}^3$ se numeşte *reper cartezian* în spaţiu. Reperul $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ determină în mod unic un sistem rectangular de coordonate $Oxyz$ în spaţiu, adică defineşte aceeaşi noţiune ca şi sistemul

rectangular de trei axe în spaţiu. Însuşi sistemul rectangular de axe $Oxyz$ reprezintă reperul cartezian (reperul sistemului de coordonate), urmând ca versorii ortogonali $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ să rezulte din context. $O$ se numeşte *originea reperului*, iar tripletul $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – *baza reperului*. De asemenea, reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ reprezintă un sistem rectangular de coordonate $Oxy$ în plan. Din examinarea fig. 10.25 rezultă că vectorul arbitrar $\bar{a} = \overline{OM}$ poate fi reprezentat sub formă de sumă: $\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{M_xN} + \overline{NM}$. Dar, $\overline{M_xN} = \overline{OM_y}$, $\overline{NM} = \overline{OM_z}$. Prin urmare,

$$\bar{a} = \overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z}, \tag{10.2}$$

unde $M_x$, $M_y$, $M_z$ – proiecţiile punctului $M$ pe axele $O_x$, $O_y$, $O_z$, respectiv. Întrucât $\overline{OM_x}$ este coliniar cu vectorul $\bar{i}$, în baza înmulţirii vectorului cu un scalar, avem: $\overline{OM_x} = \pm|\overline{OM_x}| \cdot \bar{i} = X\bar{i}$, unde $X = \pm|\overline{OM_x}| = pr_x\overline{OM} = pr_x\bar{a}$. În mod analog, $\overline{OM_y} = Y\bar{j}$, $\overline{OM_z} = Z\bar{k}$. Atunci egalitatea (10.2) se scrie sub forma

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}, \tag{10.3}$$

unde $X$, $Y$, $Z$ – coordonatele vectorului $\bar{a}$, adică proiecţiile vectorului $\bar{a}$ pe axele de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$, respectiv. Formula (10.3) se numeşte *descompunerea vectorului $\bar{a}$ în reperul $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$*, sau *descompunerea vectorului $\bar{a}$ după vectorii bazei $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$* (sau *descompunerea vectorului $\bar{a}$ după axele de coordonate*). Vectorii $X\bar{i}$, $Y\bar{j}$, $Z\bar{k}$ se numesc *componentele* vectorului $\bar{a}$ pe axele de coordonate $Ox, Oy, Oz$, respectiv. Descompunerea (10.3) a vectorului $\bar{a}$ după versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ se determină în mod univoc. Aceasta rezultă din faptul că proiecţia ortogonală a vectorului pe o axă se determină în mod unic.

Din (10.1) şi (10.3) se observă că coordonatele vectorului, definite ca proiecţiile sale pe axele de coordonate, servesc simultan şi drept coeficienţi ai descompunerii acestui vector după versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor de coordonate şi reciproc. De aceea coordonatele $X$, $Y$, $Z$ ale vectorului $\bar{a}$ pot fi definite de asemenea ca fiind coeficienţii descompunerii (10.3) a acestui vector după versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor de coordonate. Expresiile (10.1) şi (10.3) sunt echivalente şi înseamnă una şi aceeaşi, şi anume: că $X$, $Y$, $Z$ sunt coordonatele vectorului $\bar{a}$.

### 10.8.3. Modulul vectorului. Cosinusurile directoare ale vectorului

*Modulul (lungimea) vectorului $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ se exprimă prin formula*

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{10.4}$$

▷ Aceasta formulă rezultă din teorema despre diagonala paralelipipedului dreptunghic (fig. 10.25): $\overline{a} = \overline{OM}$, $|\overline{a}|^2 = |\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_x}|^2 + |\overline{OM_y}|^2 + |\overline{OM_z}|^2$.

Fiindcă $X = pr_x\overline{a} = pr_x\overline{OM} = \pm|\overline{OM_x}|$, analog şi $Y = \pm|\overline{OM_y}|$, $Z = \pm|\overline{OM_z}|$, obţinem

$$|\overline{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

de unde rezultă formula (10.4). ◁

**Exemplul 1.** Să se afle vectorul $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$, dacă $X = 3$, $Y = 4$, $|\overline{a}| = 5\sqrt{2}$.

Conform formulei (10.4), găsim

$5\sqrt{2} = \sqrt{9 + 16 + Z^2}$, $50 = 25 + Z^2$, $Z^2 = 25$, $Z_{1,2} = \pm 5$.

Răspuns: $\overline{a} = \{3, 4, \pm 5\}$.

Egalitatea vectorilor definiţi prin coordonate. Doi vectori $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ şi $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ *sunt egali* atunci şi numai atunci când sunt egale coordonatele lor corespunzătoare:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2.$$

Aceasta rezultă din faptul că vectorii egali au proiecţii egale pe una şi aceeaşi axă şi reciproc.

Din definiţia coordonatelor vectorului şi din teorema 10.3 rezultă că pentru coordonatele vectorului $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$ au loc formulele:

$$\begin{aligned} X &= pr_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha, \\ Y &= pr_y\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta, \\ Z &= pr_z\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma, \end{aligned} \tag{10.5}$$

unde

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sunt unghiurile formate de vectorul $\overline{a}$ cu axele respective de coordonate $Ox$, $Oy$, $Oz$ (unghiurile directoare ale vectorului $\overline{a}$);

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc *cosinusurile directoare* ale vectorului $\overline{a}$ (fig. 10.25).

Cosinusurile directoare ale vectorului $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$ se exprimă prin formulele:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{X}{|\overline{a}|} = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{Y}{|\overline{a}|} = \dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{Z}{|\overline{a}|} = \dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{cases} \tag{10.6}$$

▷ Rezultă din formulele (10.5) şi (10.4). ◁

Din (10.6), la rândul său, rezultă că cosinusurile directoare ale vectorului $\overline{a}$ satisfac egalitatea:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{10.7}$$

Din formula (10.5) rezultă că coordonatele unui versor $\overline{e}$ ($|\overline{e}| = 1$) sunt egale cu cosinusurile directoare ale sale: $\overline{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

**Exemplul 2.** Să se afle descompunerea după versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ a vectorului $\overline{a}$ cu unghiurile directoare $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dacă $|\overline{a}| = 6$, $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

Fie $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$. Conform formulelor (10.5), avem:

$$X = 6\cos 45° = 6\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},\ Y = 6\cos 45° = 3\sqrt{2},$$

$$Z = 6\cos 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Prin urmare, $\overline{a} = \{3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 3\}$ şi deci $\overline{a} = 3\sqrt{2}\,\overline{i} + 3\sqrt{2}\,\overline{j} + 3\overline{k}$.

**Exemplul 3.** Se dă vectorul $\overline{a} = \{-2, 2, 1\}$. Să se afle modulul lui şi versorul $\overline{a}_\circ$ de acelaşi sens cu vectorul $\overline{a}$.

Conform formulei (10.4), găsim modulul vectorului $\overline{a}$:

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$$

iar aplicând formulele (10.6), calculăm cosinusurile directoare ale sale:

$$\cos\alpha = \frac{-2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Răspuns: $\overline{a}_\circ = \{-2/3, 2/3, 1/3\}$.

R e m a r c ă. Într-un sistem rectangular de coordonate $Oxy$ în plan, vectorul $\overline{a}$ se determină de două coordonate: $\overline{a} = \{X, Y\}$. Definiţiile şi formulele rămân toate în vigoare, numai că în ele lipseşte $Z$.

## 10.9. Operaţii cu vectori daţi prin coordonatele lor

În baza proprietăţilor proiecţiilor vectorilor pe o axă, rezultă că sunt adevărate următoarele afirmaţii:

1. Dacă $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$, atunci

$$-\overline{a} = \{-X, -Y, -Z\}. \tag{10.1}$$

▷ $pr_x(-\overline{a}) = pr_x[(-1)\overline{a}] = (-1)\cdot pr_x\overline{a} = -pr_x\overline{a} = -X$. În mod analog, $pr_y(-\overline{a}) = -Y$, $pr_z(-\overline{a}) = -Z$. Prin urmare, $-\overline{a} = \{-X, -Y, -Z\}$. ◁

2. Dacă $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, atunci

$$\overline{a} \pm \overline{b} = \{X_1 \pm X_2, Y_1 \pm Y_2, Z_1 \pm Z_2\}. \tag{10.2}$$

▷ $pr_x(\overline{a} \pm \overline{b}) = pr_x\overline{a} \pm pr_x\overline{b} = X_1 \pm X_2$. În mod analog, $pr_y(\overline{a} \pm \overline{b}) = Y_1 \pm Y_2$, $pr_z(\overline{a} \pm \overline{b}) = Z_1 \pm Z_2$, de unde rezultă formula ce se demonstrează. ◁

3. Dacă $\overline{a} = \{X, Y, Z\}$, atunci

$$\lambda\overline{a} = \{\lambda X, \lambda Y, \lambda Z\}. \tag{10.3}$$

▷ $pr_x(\lambda\overline{a}) = \lambda pr_x\overline{a} = \lambda X$. În mod analog, $pr_y(\lambda\overline{a}) = \lambda Y$, $pr_z(\lambda\overline{a}) = \lambda Z$, de unde rezultă formula ce se demonstrează. ◁

4. Dacă $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$, atunci

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{10.4}$$

▷ Construim vectorii de poziție $\overline{OM_1}$ și $\overline{OM_2}$ ai punctelor $M_1$ și $M_2$, respectiv (fig. 10.26). Atunci avem: $\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2}$, sau $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1}$. Dar $\overline{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Prin urmare, $\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. ◁

5. Distanța $d$ dintre două puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ se exprimă prin formula:

$$d = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{10.5}$$

▷ Rezultă din (10.4) și din formula lungimii vectorului $\overline{M_1M_2}$. ◁

Exemplul 1. Se dau punctele $M_1(1, -2, 3)$ și $M_2(2, 0, 5)$. Să se afle coordonatele vectorului $\overline{M_1M_2}$ și distanța $d$ dintre aceste puncte.

Coordonatele vectorului $\overline{M_1M_2}$ le aflăm conform formulei (10.4): $\overline{M_1M_2} = \{2 - 1, 0 - (-2), 5 - 3\} = \{1, 2, 2\}$.

Distanța dintre punctele $M_1$ și $M_2$ o calculăm aplicând formula (10.5): $d = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

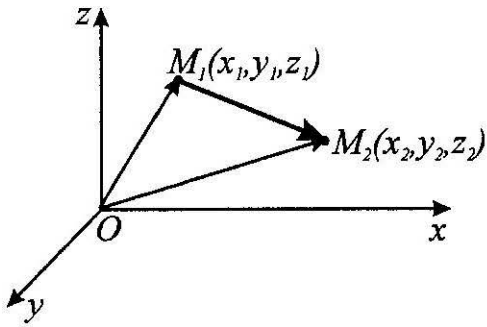



Fig. 10.26

**Exemplul 2.** Să se calculeze coordonatele vectorului $\overline{x} = 3\overline{a} - 2(\overline{b} - \overline{c})$, dacă $\overline{a} = \{0, 2, 1\}$, $\overline{b} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{c} = \{-4, 0, 5\}$.

$\overline{b} - \overline{c} = \{1+4, 2-0, 3-5\} = \{5, 2, -2\}$, $2(\overline{b} - \overline{c}) = \{2 \cdot 5, 2 \cdot 2, 2 \cdot (-2)\} = \{10, 4, -4\}$, $3\overline{a} = \{3 \cdot 0, 3 \cdot 2, 3 \cdot 1\} = \{0, 6, 3\}$, $\overline{x} = 3\overline{a} - 2(\overline{b} - \overline{c}) = \{0 - 10, 6 - 4, 3 + 4\} = \{-10, 2, 7\}$.

## 10.10. Împărţirea unui segment într-un raport dat

Fie $A$ şi $B$ două puncte distincte din spaţiu. Fixăm pe dreapta $AB$ un sens de parcurs (de exemplu, de la $A$ spre $B$).

Se spune că punctul $C$ împarte segmentul orientat $\overline{AB}$ în raportul $\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1$) dacă

$$\frac{AC}{CB} = \lambda,$$

unde $AC$ şi $CB$ sunt mărimile segmentelor orientate $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ pe axa $AB$ (fig. 10.27). Din această condiţie rezultă relaţia $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$ şi reciproc. Dacă $C$ aparţinând dreptei $AB$ este situat între $A$ şi $B$, atunci se spune că el împarte segmentul $\overline{AB}$ în raportul $\lambda$ în mod interior. În caz contrar, spunem că $C$ împarte $\overline{AB}$ în raportul $\lambda$ în mod exterior.

**Teorema 10.6.** *Coordonatele punctului $C(x, y, z)$ care împarte segmentul $\overline{AB}$ cu originea $A(x_1, y_1, z_1)$ şi extremitatea $B(x_2, y_2, z_2)$ în raportul dat $\lambda$ ($\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$) se exprimă prin formulele:*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{10.1}$$

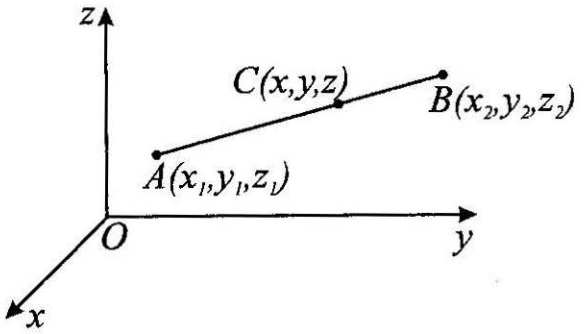



Fig. 10.27

▷ Efectuând operaţiile în coordonate asupra vectorilor $\overline{AC}$ şi $\overline{CB}$ (fig. 10.27), conform p. 10.9, obţinem $\overline{AC} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{CB} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$, $\lambda\overline{CB} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y), \lambda(z_2 - z)\}$. De aici şi din egalitatea $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$ rezultă:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Rezolvând aceste ecuaţii în raport cu $x$, $y$, $z$, corespunzător, obţinem formulele (10.1). ◁

C o n s e c i n ţ ă. Coordonatele mijlocului $C(x, y, z)$ al segmentului $\overline{AB}$, unde $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, se exprimă prin formulele:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{10.2}$$

▷ Rezultă din (10.1) pentru $\lambda = 1$. ◁

E x e m p l u. Să se calculeze coordonatele punctului $C(x, y, z)$ care împarte segmentul $\overline{AB}$, cuprins între punctele $A(-2, 3, 1)$ şi $B(4, -5, 0)$, în mod interior în raportul $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{2}{3}$.

În acest caz, $\lambda = \dfrac{2}{3}$ $\left(\overline{AC} = \dfrac{2}{3}\overline{CB}\right)$ şi, prin urmare, aplicând formula (10.1), găsim:

$$x = \frac{-2 + \frac{2}{3}\cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{5},\ y = \frac{3 + \frac{2}{3}(-5)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-1}{5},\ z = \frac{1 + \frac{2}{3}\cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

R e m a r c ă. Toate formulele din acest punct rămân în vigoare şi în planul $Oxy$, considerând a treia coordonată a vectorului sau a punctului egală cu zero: $Z = 0$, $z = 0$.

## 10.11. Produs scalar

### 10.11.1. Definiţia şi proprietăţile de bază ale produsului scalar

**Definiţie.** Se numeşte *produsul scalar* a doi vectori liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ numărul, egal cu produsul lungimilor (modulelor) acestor vectori prin cosinusul unghiului $\varphi$ dintre ei şi se notează cu simbolul $\overline{a} \cdot \overline{b}$ sau $\overline{a}\overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi, \tag{10.1}$$

unde $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$.

Proiectând unul dintre aceşti vectori, de exemplu $\overline{b}$, pe celălalt, obţinem: $pr_{\overline{a}}\overline{b} = \pm|\overline{OA'}| = |\overline{b}|\cos\varphi$ (fig. 10.28). În virtutea acestei egalităţi, formula (10.1) se poate scrie sub forma:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{b}. \tag{10.2}$$

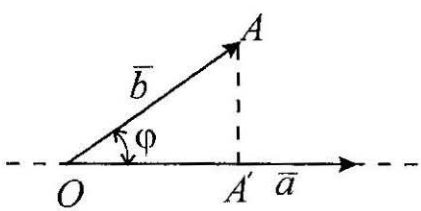



Fig. 10.28

În mod analog, $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}$.

Formula (10.2) exprimă produsul scalar al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ prin proiecţia unuia dintre ei pe direcţia celuilalt.

Se numeşte *pătratul scalar* al vectorului $\overline{a}$ produsul scalar al vectorului $\overline{a}$ cu el însuşi:

$$\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}| \cos 0 = |\overline{a}|^2.$$

Deci avem

$$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2, \tag{10.3}$$

adică pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului său.

Asociind fiecărei perechi de vectori liberi produsul lor scalar, obţinem o aplicaţie: $V_3 \times V_3 \to \mathbf{R}$, $(\overline{a}, \overline{b}) \mapsto \overline{a} \cdot \overline{b}$, numită *produs scalar* pe $V_3$.

E x e m p l u. Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ au, respectiv, modulii 3 şi 2, iar unghiul dintre vectori este egal cu 60°. Să se afle proiecţia vectorului $\overline{b}$ pe $\overline{a}$.

Conform formulei (10.1), avem $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Atunci, aplicând formula (10.2), obţinem: $3 = 3pr_{\overline{a}}\overline{b}$, de unde $pr_{\overline{a}}\overline{b} = 1$.

*Produsul scalar are următoarele proprietăţi* ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in \mathbf{R}^3$ şi $\forall \lambda \in \mathbf{R}$):

1. *Comutativitate*:
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}. \tag{10.4}$$
Această proprietate aste evidentă.

2. *Omogenitate* (sau *asociativitate în raport cu un factor scalar*):
$$(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}). \tag{10.5}$$
▷ Într-adevăr, formulele (10.5) rezultă din (10.2), (10.4), din teorema 10.5 şi din proprietăţile înmulţirii numerelor: $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot (\lambda\overline{a}) = |\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \lambda(|\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}) = \lambda(\overline{b} \cdot \overline{a}) = \lambda(\overline{a}\overline{b})$. În mod analog, $\overline{a} \cdot (\lambda\overline{b}) = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$. ◁

3. *Distributivitate faţă de adunare*:
$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}. \tag{10.6}$$
▷ Într-adevăr, aplicând formula (10.2) şi teorema 10.4, obţinem (10.6): $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}(\overline{b} + \overline{c}) = |\overline{a}| \cdot (pr_{\overline{a}}\overline{b} + pr_{\overline{a}}\overline{c}) = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{b} + |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$. ◁

4. *Pozitivitate*:
$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2 \geq 0; \qquad \overline{a}\,\overline{a} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}.$$

5. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow$ sau $\overline{a} = \overline{0}$, sau $\overline{b} = \overline{0}$, sau $\overline{a} \perp \overline{b}$.

▷ Demonstraţia proprietăţilor 4 şi 5 este imediată în baza formulei (10.1). ◁

Proprietăţile demonstrate mai sus ne permit ca la înmulţirea scalară a polinoamelor de vectori să efectuăm operaţiile după regula înmulţirii polinoamelor, adică fiecare termen al unui polinom să înmulţim cu fiecare termen al celuilalt şi rezultatele să le adunăm. De exemplu, $(2\overline{a} - 3\overline{b})(4\overline{c} + 5\overline{d}) = 8\overline{a}\,\overline{c} + 10\overline{a}\overline{d} - 12\overline{b}\overline{c} - 15\overline{b}\,\overline{d}$.

### 10.11.2. Produsul scalar al vectorilor daţi prin coordonate

**T e o r e m a 10.7.** *Dacă vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt daţi prin coordonatele lor: $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, atunci produsul scalar al lor se exprimă prin formula:*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{10.7}$$

▷ Cu ajutorul formulei (10.1) compunem "tabla înmulţirii scalare" a versorilor axelor de coordonate:

$$\begin{array}{lll} \overline{i}^2 = 1, & \overline{i}\,\overline{j} = 0, & \overline{i}\,\overline{k} = 0, \\ \overline{j}\,\overline{i} = 0, & \overline{j}^2 = 1, & \overline{j}\,\overline{k} = 0, \\ \overline{k}\,\overline{i} = 0, & \overline{k}\,\overline{j} = 0, & \overline{k}^2 = 1. \end{array} \tag{10.8}$$

Scriem descompunerea vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ după versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$$\overline{a} = X_1\overline{i} + Y_1\overline{j} + Z_1\overline{k}, \qquad \overline{b} = X_2\overline{i} + Y_2\overline{j} + Z_2\overline{k}.$$

Aplicând formulele (10.4) – (10.6) şi tabla (10.8) , obţinem:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = (X_1\overline{i} + Y_1\overline{j} + Z_1\overline{k})(X_2\overline{i} + Y_2\overline{j} + Z_2\overline{k}) = X_1X_2\overline{i}^2 + X_1Y_2(\overline{i}\,\overline{j}) +$
$+X_1Z_2(\overline{i}\,\overline{k}) + Y_1X_2(\overline{j}\,\overline{i}) + Y_1Y_2\overline{j}^2 + Y_1Z_2(\overline{j}\,\overline{k}) + Z_1X_2(\overline{k}\,\overline{i}) + Z_1Y_2(\overline{k}\,\overline{j}) +$
$+Z_1Z_2\overline{k}^2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$ ◁

C o n s e c i n ţ ă. Cosinusul unghiului dintre vectorii $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ şi $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ se defineşte prin formula:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{10.9}$$

▷ Rezultă din formulele (10.1) şi (10.7). ◁

Formulele (10.7) şi (10.9) se simplifică când vectorii sunt situaţi în unul dintre planele de coordonate. Astfel, pentru vectorii $\overline{a} = \{X_1, Y_1\}$ şi $\overline{b} = \{X_2, Y_2\}$ din planul $Oxy$ $(Z_1 = Z_2 = 0)$, avem:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 \quad \text{şi}$$

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}.$$

E x e m p l u. Să se afle unghiul dintre vectorii $\overline{a} = \{1, -1, 0\}$ şi $\overline{b} = \{1, -2, \sqrt{13}\}$.

Din formulele (10.9) deducem:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + (-1)(-2) + 0 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (\sqrt{13})^2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$$\varphi = \arccos\frac{1}{2} = 60°.$$

## 10.12. Condiţiile de coliniaritate şi de perpendicularitate a doi vectori daţi prin coordonate

**T e o r e m a 10.8.** *Condiţia necesară şi suficientă de coliniaritate a doi vectori* $\overline{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ *şi* $\overline{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ *este proporţionalitatea coordonatelor corespunzătoare:*

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{10.1}$$

▷ Să facem următoarea menţiune preliminară. Dacă $\overline{a}$ este un vector nenul, atunci, evident,

$$\overline{a}_0 = \frac{1}{|\overline{a}|}\overline{a}$$

este versorul de acelaşi sens ca şi vectorul $\overline{a}$ (fig. 10.29).

Vom demonstra, în prealabil, că condiţia necesară şi suficientă de coliniaritate a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se exprimă prin egalitatea:

$$\overline{b} = \lambda\overline{a}, \tag{10.2}$$

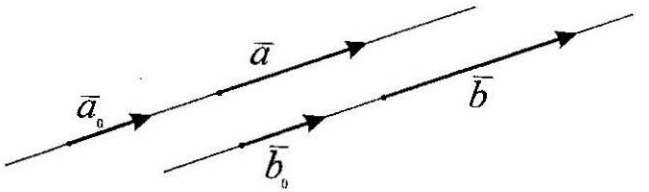



Fig. 10.29

unde $\lambda$ – un număr real.

Într-adevăr, dacă se respectă egalitatea (10.2), atunci din definiţia înmulţirii vectorului cu un număr (a se vedea p. 10.6.4) rezultă că $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt coliniari. Reciproc, fie că $\bar{b}$ şi $\bar{a}$ sunt coliniari ($\bar{b} \parallel \bar{a}$). Notăm prin $\bar{a}_0$ versorul vectorului $\bar{a}$, adică vectorul de lungimea unu şi de acelaşi sens cu vectorul $\bar{a}$. Atunci versorii $\bar{a}_0$ şi $\bar{b}_0$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens sau sensuri contrare. Prin urmare, $\bar{b}_0 = \pm\bar{a}_0$. De aici avem:

$$\frac{1}{|\bar{b}|}\bar{b} = \pm\frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a}, \quad \text{sau} \quad \bar{b} = \pm\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a}.$$

Notând $\pm\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} = \lambda$, obţinem $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. Prin urmare, $(\bar{b} \parallel \bar{a}) \Leftrightarrow ((\exists\lambda \in \mathbf{R})\colon \bar{b} = \lambda\bar{a})$. Întrucât $\lambda\bar{a} = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}$, avem: $X_2 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda Y_1$, $Z_2 = \lambda Z_1$, de unde rezultă relaţia (10.1). ◁

**Teorema 10.9.** *Condiţia necesară şi suficientă de perpendicularitate a doi vectori nenuli* $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ *şi* $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ *este egalitatea cu zero a sumei produselor coordonatelor corespunzătoare:*

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \tag{10.3}$$

▷ Dacă $\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0$, atunci din formula (10.1), p. 10.11.1 deducem: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Din aceste relaţii şi din formula (10.7), p. 10.11.2 rezultă relaţia (10.3). ◁

În particular, pentru vectorii $\bar{a} = \{X_1, Y_1\}$ şi $\bar{b} = \{X_2, Y_2\}$, situaţi în planul $Oxy$, $Z_1 = Z_2 = 0$ şi formulele (10.1), (10.3) capătă, respec-

tiv, forma:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} \quad \text{şi}$$

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0.$$

**Exemplul 1.** Să se verifice privitor la coliniaritate vectorii $\overline{a} = \{1, -2, 3\}$ şi $\overline{b} = \{7, -14, 21\}$.

Coordonatele acestor vectori sunt proporţionale:

$$\frac{1}{7} = \frac{-2}{-14} = \frac{3}{21}.$$

Prin urmare, $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari ($\overline{a} \parallel \overline{b}$).

**Exemplul 2.** Să se arate că vectorii $\overline{a} = \{3, 2, 1\}$ şi $\overline{b} = \{2, -3, 0\}$ sunt perpendiculari.

Verificăm satisfacerea egalităţii (10.3) pentru vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Avem $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 0$. Prin urmare, $\overline{a} \perp \overline{b}$.

## 10.13. Vector perpendicular pe doi vectori daţi

**Problemă.** Fie $\overline{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ şi $\overline{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ doi vectori necoliniari. Să se afle un vector $\overline{n} = \{x, y, z\}$, perpendicular pe vectorii $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$.

Din condiţia de perpendicularitate, avem

$$\{\ \overline{a}_1 \perp \overline{n}, \overline{a}_2 \perp \overline{n} \ \Leftrightarrow \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1z = 0, \\ m_2x + n_2y + p_2z = 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Aşadar, coordonatele $x$, $y$, $z$ ale vectorului căutat $\overline{n}$ satisfac sistemul de ecuaţii (10.1) cu trei necunoscute. Întrucât $\overline{a}_1 \nparallel \overline{a}_2$, rezultă că $\overline{a}_1 \neq \overline{0}$ şi deci sistemul posedă un coeficient nenul în prima ecuaţie, de exemplu, $m_1 \neq 0$.

Împărţind această ecuaţie la $m_1$, avem

$$x = -\frac{n_1}{m_1}y - \frac{p_1}{m_1}z$$

şi substituind-o în ecuaţia a doua, obţinem

$$(m_1n_2 - m_2n_1)y + (m_1p_2 - m_2p_1)z = 0.$$

Unul dintre coeficienţii acestei ecuaţii numaidecât este deferit de zero, deoarece în caz contrar coeficienţii ecuaţiilor sistemului (10.1) ar fi proporţionali, ceea ce înseamnă $\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$, fapt ce nu este adevărat. Fie, de exemplu, $m_1n_2 - m_2n_1 \neq 0$. De aici

$$y = \frac{m_2p_1 - m_1p_2}{m_1n_2 - m_2n_1}z. \qquad \text{Atunci} \qquad x = \frac{n_1p_2 - n_2p_1}{m_1n_2 - m_2n_1}z.$$

În felul acesta,

$$\overline{n} = \{x, y, z\} = \{\frac{n_1p_2 - n_2p_1}{m_1n_2 - m_2n_1}z, \frac{m_2p_1 - m_1p_2}{m_1n_2 - m_2n_1}z, z\},$$

unde $z$ este arbitrar, $z \neq 0$, $z \in \mathbf{R}$. În particular, punând $z = m_1n_2 - m_2n_1$, deducem:

$$\overline{n} = \left\{ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (10.2)$$

Aplicând teorema 10.9, e uşor de verificat că $\overline{n} \perp \overline{a}_1, \overline{a}_2$. Din (10.2) este evident că coordonatele vectorului $\overline{n} \perp \overline{a}_1, \overline{a}_2$ sunt determinanţii de ordinul doi compuşi din matricea

$$\underrightarrow{\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{pmatrix}}$$

în ordine circulară; (10.2) este formula cu ajutorul căreia se determină vectorul $\overline{n} \perp \overline{a}_1, \overline{a}_2$.

E x e m p l u. Să se afle vectorul $\overline{n}$ perpendicular pe vectorii $\overline{a}_1 = \{1, -1, 2\}$, $\overline{a}_2 = \{3, 2, -2\}$.

Vectorii $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$, evident, sunt necoliniari. Compunem matricea din coordonatele vectorilor $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$:

$$\underrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Atunci

$$\overline{n} = \left\{ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{-2, 8, 5\};$$

$\overline{n} \perp \overline{a}_1, \overline{a}_2$.

## Exerciţii

**1.** Fie $O$ un punct din spaţiu şi $\overline{AB}$ un segment orientat. Să se figureze:

a) mulţimea $P$ a extremităţilor segmentelor orientate, cu originea $O$, care au aceeaşi direcţie cu $\overline{AB}$;

b) mulţimea $S$ a extremităţilor segmentelor orientate, cu originea $O$, care au acelaşi sens cu $\overline{AB}$.

**2.** Fie segmentul $[AB]$ şi $M_0$ mijlocul său. Să se verifice că pentru orice punct $M$ din plan avem $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MM_0}$.

**3.** Se dau vectorii nenuli $\overline{a}$, $\overline{b}$. Ce relaţie trebuie să existe între $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ pentru ca vectorul $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ să aibă direcţia bisectoarei unghiului determinat de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Să se clarifice sensul expresiilor $pr_{\overline{u}}\overline{a}$, $pr_{\overline{u}}\overline{b}$, $pr_{\overline{u}}(\overline{a} + \overline{b})$ şi relaţia dintre ele.

**4.** Se dau vectorii $\overline{a} = \{1, 3, 0\}$ şi $\overline{b} = \{-1, 2, 4\}$. Să se afle coordonatele vectorului $2\overline{a} + 3(\overline{a} - \overline{b}) - c(\overline{a} + \overline{i}) - 4(\overline{b} - \overline{k})$.

**5.** Să se afle coordonatele versorului vectorului $\overline{a} = \{2, -1, 1\}$.

**6.** Se dau punctele $A(2-1, 0)$ şi $B(2, 3, -1)$. Să se afle coordonatele punctului $C$ care împarte segmentul orientat $\overline{AB}$ în raportul 3:5.

**7.** Se dau vectorii $\overline{a} = \{\alpha, 4, -1\}$ şi $\overline{b} = \{1, 2, \beta\}$. Să se afle valorile lui $\alpha$ şi $\beta$ pentru care:

a) vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari;

b) $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt perpendiculari.

**8.** Să se afle coordonatele vectorului $\overline{n}$ perpendicular pe vectorii $\overline{a} = \{1, 2, 0\}$, $\overline{b} = \{-3, 5, 1\}$.

CAPITOLUL 11

# Linii, suprafețe și ecuațiile lor

## 11.1 Linii și suprafețe ca locuri geometrice

In geometria analitică obiectele geometrice (puncte, linii, suprafețe) și poziția lor în spațiu și pe plan se studiază analitic, prin metode algebrice. Geometria analitică posedă metoda generală de rezolvare a problemelor geometrice - *metoda coordonatelor,* introdusă de Descartes,

Metoda coordonatelor permite ca figura geometrică de forma cea mai simplă - punctul -- să fie reprezentată sub forma de un sistem ordonat de numere - coordonatele lui. In baza acestui fapt, metoda, coordonatelor dă posibilitate de a rezolva *problema generală* a geometriei analitice, care constă în a studia prin metodele algebrei și ale analizei matematice *forma, poziția și proprietățile unei figuri geometrice date.* Pentru aceasta, fiecare figură geometrică (linie, suprafață) de obicei se consideră ca o mulțime de puncte ce posedă o anumită proprietate specifică numai acestor puncte, adică ca loc geometric al punctelor.

Se numește *loc geometric al punctelor* din plan (sau spațiu), sau simplu *loc geometric,* o mulțime de puncte (figura) definită prin specificarea unei proprietăți geometrice ale elementelor sale, adică care consta din toate acele și numai din acele puncte ale planului (spațiului) ce poseda această proprietate.

Proprietatea cu ajutorul căreia se caracterizează un loc geometric se numește *proprietatea caracteristică* a punctelor a.cestui loc geometric.

Exemplul 1. Fie $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ şi $O$ un punct din plan. Cercul cu centrul în $O$ şi de rază $r$ este locul geometric al punctelor $M$ din plan pentru care $OM = r$ (fig. 11.1). Se notează $C(O, r) = \{M | OM = r\}$.

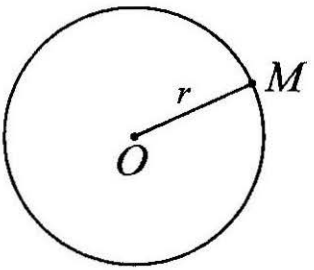



Fig. 11.1

Exemplul 2. Bisectoarea unghiului este locul geometric al punctelor $M$ din interiorul unghiului care se află la distanţe egale de laturile acestui unghi: $MP = QM$ (fig. 11.2).

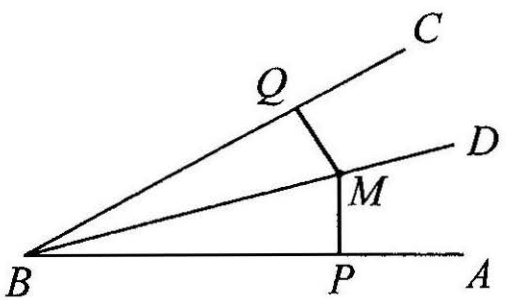



Fig. 11.2

Exemplul 3. Sfera cu centrul în $O$ şi de rază $r$ ($r > 0$) este locul geometric al punctelor $M$ din spaţiu, pentru care $OM = r$ (fig. 11.3). Ea se notează $S(O, r) = \{M | OM = r\}$.

În sistemul rectangular de coordonate în plan sau în spaţiu poziţia unui punct oarecare se determină de coordonatele sale – perechea de numere $(x, y)$ sau tripletul de numere $(x, y, z)$, respectiv. Dacă punctul $M$ parcurge toate punctele unei figuri $S$, atunci punctul $M$ se

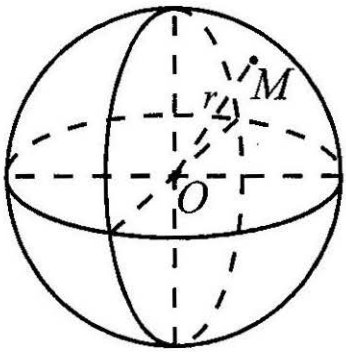



Fig. 11.3

numeşte *punct arbitrar* al acestei figuri (loc geometric), iar coordonatele lui, întrucât ele se schimbă – *coordonatele curente* ale punctului arbitrar $M$. Fiindcă $(x, y)$ sau $(x, y, z)$ sunt coordonatele punctului $M$, iar punctul $M$ satisface proprietatea caracteristică a punctelor locului geometric ce reprezintă figura dată $S$, această proprietate poate fi exprimată analitic sub formă de o ecuaţie $F(x, y) = 0$ în plan sau $F(x, y, z) = 0$ în spaţiu, care leagă coordonatele curente ale punctului arbitrar $M$. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia locului geometric dat sau a figurii date* $S$.

## 11.2. Ecuaţia unei linii în plan

Fie dată o ecuaţie oarecare

$$F(x, y) = 0 \tag{11.1}$$

care leagă variabilele $x$ şi $y$.

Considerăm sistemul rectangular de coordonate $Oxy$ în plan.

Dacă în ecuaţia (11.1) variabilei $x$ îi atribuim o valoare numerică oarecare $x = x_1$, atunci obţinem o ecuaţie cu o singură necunoscută. Presupunem că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt soluţiile acestei ecuaţii. Atunci obţinem punctele $M_1(x, y_1), M_2(x, y_2), \ldots, M_n(x, y_n)$ ale căror coordonate satisfac ecuaţia (11.1). Dacă $x$ va parcurge toate valorile posibile, atunci vom obţine mulţimea tuturor punctelor ale căror coordonate satisfac ecuaţia (11.1). De regulă, această mulţime de puncte reprezintă o *linie* (sau, cum se mai numeşte ea, *curbă*) $L$ în plan.

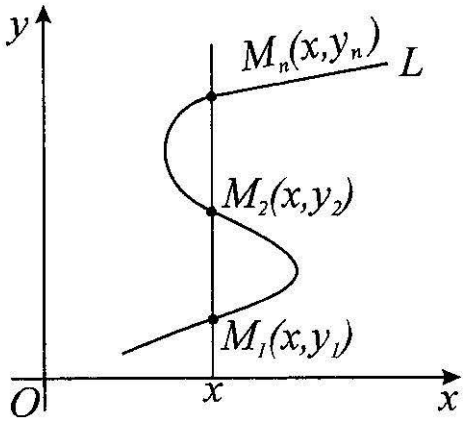



Fig. 11.4

Cea mai importantă noţiune a geometriei analitice este noţiunea de *ecuaţie a liniei.* Fie date în plan: sistemul rectangular de coordonate, o linie $L$ (fig. 11.4) şi ecuaţia (11.1).

**Definiţie.** Ecuaţia (11.1) se numeşte *ecuaţia unei linii* $L$ (în sistemul de coordonate dat) dacă coordonatele $x$ şi $y$ ale oricărui punct situat pe linia $L$ satisfac această ecuaţie, iar coordonatele tuturor punctelor ce nu aparţin liniei $L$ nu satisfac această ecuaţie.

Din această definiţie rezultă că *linia* $L$ *definită prin ecuaţia* $F(x,y) = 0$ *reprezintă mulţimea tuturor acelor şi numai a acelor puncte din planul* $Oxy$ *ale căror coordonate satisfac această ecuaţie.*

Aşadar, pentru a stabili că ecuaţia dată (11.1) este ecuaţia unei linii $L$, este necesar şi suficient:

1) de demonstrat că coordonatele unui punct arbitrar $M(x,y)$ situat pe linia $L$ verifică această ecuaţie şi

2) de demonstrat, reciproc, că dacă coordonatele unui punct oarecare verifică această ecuaţie, atunci punctul numaidecât este situat pe linia $L$.

Această afirmaţie este evidentă din definiţie.

Noţiunea de ecuaţie a liniei dă posibilitate de a rezolva problemele geometrice prin metode algebrice. De exemplu, problema aflării punctului de intersecţie a două linii definite prin ecuaţiile $x + y = 0$ şi $x^2 + y^2 = 1$ se reduce la problema algebrică de a rezolva sistemul

acestor două ecuaţii.

Să examinăm următoarele exemple de ecuaţii ale liniilor.

**Exemplul 1.** $x - y = 0$. Transcriind această ecuaţie sub forma $y = x$, conchidem că mulţimea punctelor ale căror coordonate satisfac ecuaţia dată reprezintă bisectoarea cadranelor I şi III. Aceasta şi este linia definită prin ecuaţia $x - y = 0$ (fig. 11.5).

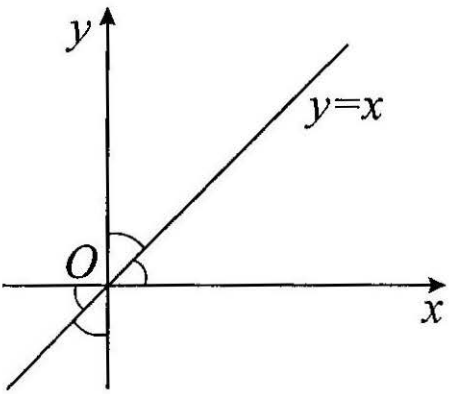



Fig. 11.5

**Exemplul 2.** $x^2 - y^2 = 0$. Reprezentând ecuaţia sub forma

$$(x - y)(x + y) = 0,$$

conchidem că mulţimea punctelor ale căror coordonate satisfac această ecuaţie este compusă din două drepte: $x - y = 0$ şi $x + y = 0$ – dreptele ce conţin bisectoarele celor patru unghiuri de coordonate (fig. 11.6).

**Exemplul 3.** $x^2 + y^2 = 0$. Mulţimea punctelor coordonatele cărora satisfac această ecuaţie constă dintr-un singur punct $O(0, 0)$. În acest caz, ecuaţia defineşte, după cum se spune, o linie degenerată.

**Exemplul 4.** $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Întrucât pentru orice $x$ şi $y$, numerele $x^2$ şi $y^2$ sunt nenegative, rezultă că $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Prin urmare, nu există nici un punct ale cărui coordonate să satisfacă ecuaţia dată, adică această ecuaţie nu defineşte nici o figură geometrică în plan. Vom spune în acest caz că ea determină o *linie imaginară.*

În fiecare dintre exemplele date mai sus au fost studiate proprietăţile liniei definite prin ecuaţia sa şi totodată s-a stabilit ce

reprezintă această linie.

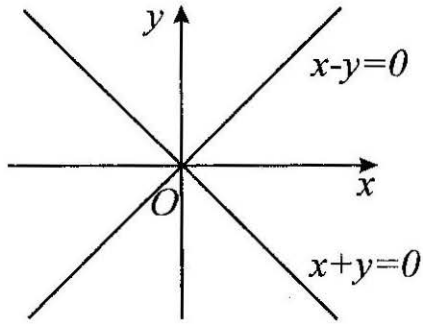



Fig. 11.6

Să examinăm acum problema inversă. Se dă linia $L$ ca o mulţime de puncte care posedă o anumită proprietate caracteristică. Să se afle ecuaţia sa.

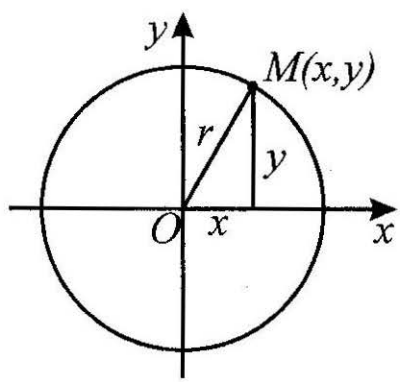



Fig. 11.7

E x e m p l u l 5. Să se compună ecuaţia cercului cu centrul în originea de coordonate şi de rază $r$ (fig. 11.7).

Considerăm pe cerc un punct arbitrar $M(x, y)$ şi îl unim cu centrul $O$. Conform definiţiei cercului ca loc geometric, avem $|\overline{OM}| = r$, de unde rezultă

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad \text{sau} \quad x^2 + y^2 = r^2. \tag{11.2}$$

Această ecuație satisface condițiile 1) și 2) ale definiției de mai sus. Prin urmare, (11.2) este ecuația cercului cu centrul în originea de coordonate $O$ și de rază $r$.

## 11.3. **Linii** algebrice

Considerăm ecuațiile

$$Ax + By + C = 0, \tag{11.1}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{11.2}$$

unde A, $B, C, D, E, F$ - numere reale date (coeficienți). Acești coeficienți pot avea orice valori numerice, cu condiția ca ecuația (11.1) va conține termeni de gradul întâi, iar ecuația (11.2) - termeni de gradul doi, de exemplu: $2x + 3y - 5 = 0$, $x - 2 = 0$, $x^2 - y^2 - 1 = 0$, $x^2 - y = 0$. Astfel de ecuații se numesc *algebrice*. Ecuația (11.1) se numește *ecuația algebrică de gradul întâi* (cu doua necunoscute $x$ și $y$) de forma generală, iar ecuația (11.2) - *ecuația algebrică de gradul doi* (în raport cu $x$ și $y$) de forma generală. In mod analog se definesc ecuațiile algebrice de gradul întâi și doi în raport cu trei variabile $x, y, z$.. O forma similară au și ecuațiile algebrice de gradul 3, 4, 5 etc.

In genere, ecuația $F(x,y) = 0$ se numește *ecuație algebrică de gradul n* (cu două necunoscute $x, y$) dacă expresia $F(x,y)$ reprezintă suma unui număr finit de termeni de forma $Ax^{\rho}y^{q}$, unde $\rho$ și $q$ sunt numere întregi nenegative, $A$ - numere reale, iar $n$ - cea mai mare sumă de exponenți $\rho + q$.

**Definiție.** O linie care într-un sistem rectangular de coordonate în plan se definește printr-o ecuație algebrică de gradul $n$ se numește *linie* (sau *curba) algebrică* de ordinul $n$.

**Exemplu.** Liniile definite prin ecuațiile $x + y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ sunt, respectiv, linii algebrice de ordinul 1, 2 și 3.

Menționăm următoarea proprietate importantă: *ordinul n al unei curbe algebrice nu depinde de alegerea sistemului rectangular de coordonate.*

Demonstrarea o omitem. In curând vom studia numai curbe algebrice de ordinul întâi și doi.

## 11.4. Ecuaţiile unei suprafeţe şi ale unei linii în spaţiu

Fie date în sistemul rectangular de coordonate $Oxyz$ o suprafaţă $S$ (fig. 11.8) şi o ecuaţie în raport cu variabilele $x$, $y$, $z$:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{11.1}$$

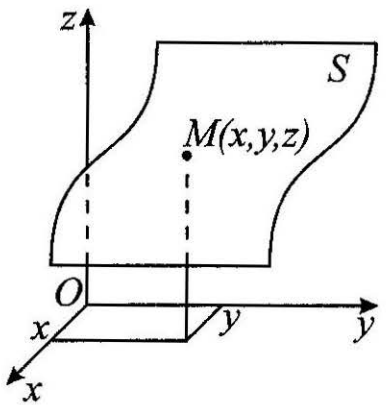



Fig. 11.8

Vom spune că ecuaţia (11.1) este *ecuaţia suprafeţei* $S$ (în sistemul dat de coordonate) dacă coordonatele oricărui punct $M(x, y, z) \in S$ satisfac această ecuaţie, iar coordonatele tuturor punctelor ce nu aparţin suprafeţei $S$ nu satisfac această ecuaţie.

Din punctul de vedere al acestei definiţii, suprafaţa $S$ definită prin ecuaţia (11.1) este mulţimea tuturor acelor şi numai a acelor puncte ale spaţiului $\mathbf{R}^3$ coordonatele cărora satisfac ecuaţia dată.

E x e m p l u l 1. În sistemul rectangular de coordonate $Oxyz$ ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, sau $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, defineşte suprafaţa care este sfera cu centrul în $O(0, 0, 0)$ şi de rază $r$ (fig. 11.9).

Într-adevăr, dacă $M(x, y, z)$ este un punct arbitrar al sferei, atunci conform formulei distanţei dintre două puncte, avem

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Prin urmare, ecuaţia dată este satisfăcută de acele şi numai de acele puncte care se află la distanţa $r$ de punctul $O$. Aşadar, mulţimea punctelor coordonatele cărora satisfac această ecuaţie este sfera cu centrul în originea de coordonate şi raza egală cu $r$.

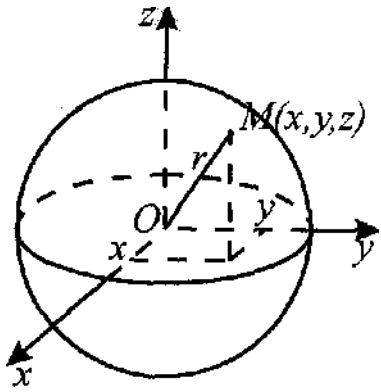



Fig. 11.9

O linie în spațiu poate fi considerată ca linia de intersecție a două suprafețe, adică ca locul geometric al punctelor situate concomitent pe două suprafețe și, corespunzător acestui fapt, să definim linia ca fiind date două ecuații.

Așadar, două ecuații:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0, \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \tag{11.2}$$

se numesc *ecuațiile unei linii L* dacă coordonatele oricărui punct situat pe linia $L$ satisfac ambele ecuații, iar coordonatele tuturor punctelor ce nu aparțin liniei $L$ nu satisfac cel puțin una dintre aceste ecuații.

Exemplul 2. Perechea de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

împreuna, definesc în planul de coordonate *Oxy* cercul cu centrul în originea de coordonate $0(0,0,0)$ și de rază $r$ (fi.g.11.9).

## 11.5. Doua probleme de bază ale geometriei analitice

In procesul studierii figurilor geometrice ca locuri geometrice și a ecuațiilor lor, în mod firesc, apar următoarele doua probleme de bază ale geometriei analitice în plan și în spațiu:

I. Este dată o figură (linie, suprafață) *S,* considerată ca loc geometric. Trebuie de dedus (compus) ecuația acestei figuri.

II. Este dată ecuația unei figuri geometrice *S.* Trebuie după această ecuație de determinat forma, poziția și proprietățile figurii *S.*

Pentru a rezolva I problemă, ne putem conduce după următoarea *regulă* (regula de deducere a ecuației unei figuri (loc geometric)).

1. Considerăm un punct arbitrar *M(x,y)* din plan (sau respectiv *M(x,y,z)* din spațiu), care după presupunere aparține figurii date *S* (locului geometric dat). Pentru aceasta executăm un desen schematic ce ilustrează datele problemei.

2. Exprimăm proprietatea caracteristică a punctelor locului geometric dat sub formă de o relație dintre lungimile unor segmente sau dintre alte elemente date, astfel încât în această relație să figureze numaidecât punctul arbitrar *M(x,y)* al figurii date.

3. Cu ajutorul formulei distanței dintre două puncte sau al altor formule exprimăm această relație în mod analitic, adică algebric sub forma de o ecuație $F(x,y) = 0$ sau, respectiv $F(x,y,z) = 0$, care leagă coordonatele curente ale punctului arbitrar *M* al locului geometric dat. Această ecuație și este ecuația căutată a figurii date *S.* Rămâne numai s-o simplificăm.

Practic, la studierea locurilor geometrice deseori se rezolvă succesiv (mai întâi I, iar apoi a II-a) ambele aceste probleme de baza.

E x e m p l u . Să se determine linia *L* (locul geometric) punctele căreia au distanța de la punctul A(4;0) de două ori mai mare decât de la punctul *B(l;* 0).

Să rezolvăm mai întâi I problemă de bază pentru locul geometric dat, adică să compunem ecuația acestui loc geometric după regula de deducere a ecuației unei figuri. Pentru aceasta, executăm pașii:

1) luăm un punct arbitrar *M(x,y),* care după presupunere aparține liniei date *L* (locului geometric dat) (fig. 11.10);

2) proprietatea caracteristică a punctelor locului geometric o exprimăm prin următoarea relație:

$$|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{BM}|, \qquad (11.1)$$

unde $|\overline{AM}|$ şi $|\overline{BM}|$ – lungimile segmentelor $\overline{AM}$ şi $\overline{BM}$;

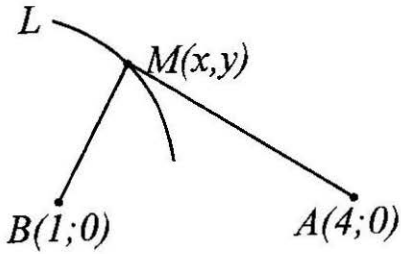



Fig. 11.10

3) exprimăm relaţia obţinută (11.1) algebric. Avem

$$|\overline{AM}| = \sqrt{(x-4)^2+y^2}, \qquad |\overline{BM}| = \sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

deci relaţia (11.1) se scrie sub forma

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

de unde rezultă

$$x^2+y^2=4. \tag{11.2}$$

Ecuaţia (11.2) este ecuaţia căutată a liniei date $L$.

Rezolvăm în continuare a II-a problemă de bază pentru locul geometric dat, adică după ecuaţia obţinută a liniei $L$ de determinat forma şi poziţia acestei linii. Comparând ecuaţia (11.2) cu ecuaţia $x^2+y^2=r^2$, conchidem că linia dată $L$ (locul geometric) reprezintă cercul cu centrul în originea de coordonate $O(0,0)$ şi raza $r=2$. Acum putem construi exact această linie (cerc) $L$.

## 11.6. Ecuaţia unei suprafeţe cilindrice

Fie dată o linie oarecare $L$ situată în planul de coordonate $Oxy$ (fig. 11.11).

Prin fiecare punct $N(x,y,0)$ al liniei $L$ ducem o dreaptă $l$ paralelă cu axa $Oz$.

Mulţimea acestor drepte formează o suprafaţă $S$, care se numeşte *suprafaţă cilindrică*.

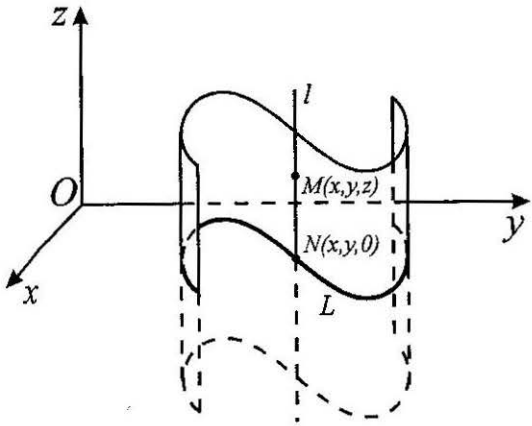



Fig. 11.11

Dreptele arătate $l$ se numesc *generatoarele* suprafeţei $S$, iar linia $L$ – *directoarea* ei.

În mod analog se definesc suprafeţele cilindrice cu generatoarele paralele la axele $Ox$ şi $Oy$.

Pentru determinare, vom considera o suprafaţă cilindrică $S$ cu generatoarele paralele la axa $Oz$ şi vom demonstra că ea se defineşte printr-o ecuaţie de forma

$$F(x, y) = 0. \tag{11.1}$$

▷ Într-adevăr, fie (11.1) ecuaţia directoarei $L$. Luăm pe $S$ un punct arbitrar $M(x, y, z)$. Acest punct este situat pe o generatoare $l$. Dacă $N$ este punctul de intersecţie a acestei generatoare cu planul $Oxy$, atunci $N$ are coordonatele $x$ şi $y$, adică $N(x, y)$ şi $N \in L$. Prin urmare, coordonatele $x$ şi $y$ ale punctului $N$ saticfac ecuaţia (11.1). Dar atunci numerele $x$, $y$, $z$ de asemenea satisfac această ecuaţie, deoarece $F(x, y)$ nu depinde de $z$. În felul acesta, coordonatele $x$, $y$, $z$ ale punctului arbitrar $M \in S$ satisfac ecuaţia (11.1). Aceasta demonstrează că (11.1) este ecuaţia suprafeţei $S$. ◁

Aşadar, ecuţia suprafeţei cilindrice cu generatoarele paralele la axa $Oz$ nu conţine coordonata $z$ şi coincide cu ecuaţia directoarei.

De exemplu, dacă directoarea este o elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.2}$$

atunci suprafaţa cilindrică corespunzătoare se numeşte *cilindru eliptic*, iar (11.2) – ecuaţia lui.

Observăm că în planul *Oxy* ecuația $F(x,y) = 0$ definește o linie L, însă tot această linie în sistemul de coordonate în spațiu *Oxyz* se definește prin două ecuații:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

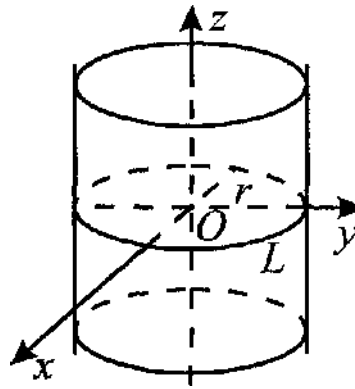



Fig. 11.12

Așa, de exemplu, în sistemul de coordonate în spațiu *Oxyz* ecuația $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ definește o suprafața cilindrică circulara dreaptă (fig. 11.12), iar directoarea ei (cercul) L, situată în planul *Oxy,* se definește prin două ecuații:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

## Exerciții

1. Să se compună ecuația liniei ale cărei puncte sunt de cinci ori mai aproape de axa *Ox* decât de axa *Oy*.
2. Să se compună ecuația liniei punctele căreia sunt egal depărtate de punctele A(-1,3) și B(5,0).
3. Să se compună ecuația sferei cu centrul $O_1$ (2,3,1) și raza $r = 2$.
4. Să se determine forma, poziția și proprietățile liniei definite prin ecuația: a) $x^2 - 4 = 0$, b) $x^2 + y^2 = 5$, c) $xy - y^2 = 0$.
5. Să se scrie ecuațiile directoarei din planul *Oxy* a suprafeței cilindrice definite prin ecuația: a) $y = x^2$, *b)* $xy = 1$.

CAPITOLUL 12

# Dreapta în plan

## 12.1. Ecuaţia generală a unei drepte

În plan fixăm sistemul rectangular de coordonate $Oxy$. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din planul $Oxy$ şi $\overline{n} = \{A, B\}$ – un vector nenul din acest plan. Există o singură dreaptă $l$ ce trece prin $M_0$ şi este perpendiculară pe $\overline{n}$ (fig. 12.1).

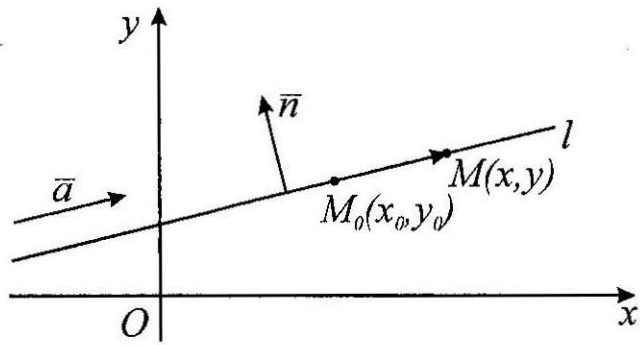



Fig. 12.1

Vectorul nenul $\overline{n}$ perpendicular pe o dreaptă $l$ se numeşte *vectorul normal* al acestei drepte $l$. Precizăm că orice vector $t\overline{n}$, $t \neq 0$, joacă acelaşi rol ca şi $\overline{n}$.

Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al planului $Oxy$. Punctul $M$ aparţine dreptei $l$ determinate de $M_0$ şi $\overline{n} \perp l$, $\overline{n} \neq \overline{0}$ dacă şi numai dacă vectorii

$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ şi $\overline{n} = \{A, B\}$ sunt perpendiculari. Scriind condiţia necesară şi suficientă de perpendicularitate a acestor vectori (conform teoremei 10.9), rezultă relaţia

$$\overline{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Astfel am obţinut egalitatea

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{12.1}$$

care, evident, este satisfăcută numai de coordonatele punctelor $M(x, y) \in l$. Conform definiţiei ecuaţiei unei linii în plan, (12.1) este ecuaţia dreptei date $l$. Ecuaţia (12.1) în $\mathbf{R}^2$ vom numi-o *ecuaţia dreptei ce trece prin punctul dat* $M_0(x_0, y_0)$ *şi are vectorul normal al ei* $\overline{n} = \{A, B\}$.

Deschidem parantezele şi scriem ecuaţia (12.1) sub forma $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$. Notând numărul $-Ax_0 - By_0$ prin $C$, obţinem că ecuaţia (12.1) în $\mathbf{R}^2$ este echivalentă cu ecuaţia

$$Ax + By + C = 0 \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \tag{12.2}$$

Ecuaţia (12.2) în $\mathbf{R}^2$, pentru care $A^2 + B^2 \neq 0$, se numeşte *ecuaţia generală a unei drepte* cu vectorul normal al ei $\overline{n} = \{A, B\}$.

Să demonstrăm acum afirmaţia reciprocă, adică că orice ecuaţie de gradul întâi de forma (12.2) în raport cu $x$ şi $y$ reprezintă (determină) în sistemul rectangular de coordonate $Oxy$ o oarecare dreaptă $l$.

▷ Într-adevăr, dacă $(x_0, y_0)$ este o soluţie a ecuaţiei (12.2), atunci găsim $C = -Ax_0 - By_0$ şi ecuaţia se scrie sub forma echivalentă $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, ceea ce înseamnă că vectorii $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ şi $\overline{n} = \{A, B\}$ sunt perpendiculari şi deci mulţimea punctelor $M(x, y)$ ale căror coordonate satisfac această ecuaţie reprezintă o dreaptă $l$ ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi este perpendiculară pe $\overline{n} = \{A, B\}$. ◁

Remarcăm că o dreaptă $l$ în plan poate să fie determinată pe deplin şi în cazul în care este dat un punct $M_0$ al ei şi un vector paralel cu această dreaptă (fig. 12.1).

Un vector nenul $\overline{a}$ se numeşte *vector director* al unei drepte $l$ dacă acest vector este paralel cu dreapta dată $l$ sau este situat pe această dreaptă. În cazul în care cunoaştem un punct $M_0(x_0, y_0) \in l$ şi un vector director $\overline{a} = \{m, n\}$ al dreptei $l$, de asemenea poate să fie compusă

ecuaţia generală (12.2) a acestei drepte. În acest caz, pentru compunerea ecuaţiei dreptei $l$ vom folosi condiţia de paralelism a vectorilor $\overline{M_0M}$ şi $\overline{a}$, unde $M(x,y)$ este un punct arbitrar al acestei drepte.

Aşadar, *vectorul normal* al unei drepte $l$ date prin ecuaţia generală (12.2) este $\overline{n} = \{A, B\}$, iar, după cum e uşor de observat, *vectorul director* al aceleiaşi drepte este $\overline{a} = \{B, -A\}$.

▷ Într-adevăr, avem $AB + B(-A) = 0 \Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{a}$. Fiindcă $\overline{n} \perp l$, rezultă că $\overline{a} \parallel l$. ◁

C a z u r i p a r t i c u l a r e a l e e c u a ţ i e i g e n e r a l e a d r e p t e i. Considerăm trei cazuri particulare când ecuaţia $Ax + By + C = 0$ este *incompletă*, adică unul dintre coeficienţii ei este egal cu zero.

1. Pentru $C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$, ecuaţia $Ax + By = 0$ defineşte o dreaptă care trece prin originea de coordonate, deoarece coordonatele punctului $O(0,0)$ satisfac această ecuaţie.

2. Pentru $A = 0$ $(B \neq 0)$, ecuaţia $By + C = 0$ defineşte o dreaptă paralelă cu axă $Ox$, fiindcă, evident, vectorul normal $\overline{n} = \{0, B\}$ al acestei drepte este perpendicular pe vectorul $\overline{i} = \{1, 0\}$ al axei $Ox$. În mod analog, pentru $B = 0$ $(A \neq 0)$, ecuaţia $Ax + C = 0$ defineşte o dreaptă paralelă cu axa $Oy$.

3. Pentru $A = C = 0$ $(B \neq 0)$, ecuaţia $By = 0$ (sau $y = 0$) defineşte axa $Ox$, deoarece această dreaptă este concomitent paralelă cu axa $Ox$ $(A = 0)$ şi trece prin originea de coordonate $(C = 0)$. În mod analog, pentru $B = C = 0$ $(A \neq 0)$, ecuaţia $Ax = 0$ (sau $x = 0$) defineşte axa $Oy$.

E x e m p l u. Să se construiască în sistemul de coordonate din plan dreapta $l$: $2x + 3y - 6 = 0$.

Pentru a construi dreapta, este suficient să fie cunoscute coordonatele a două puncte ale ei, de exemplu a punctelor de intersecţie cu axele de coordonate. Pentru $y = 0$, avem punctul $A(3; 0)$. Pentru $x = 0$, avem punctul $B(0; 2)$. După două puncte $A$ şi $B$ construim dreapta definită de ecuaţia dată (fig. 12.2). Vectorul normal al acestei drepte $l$ este $\overline{n} = \{2; 3\}$.

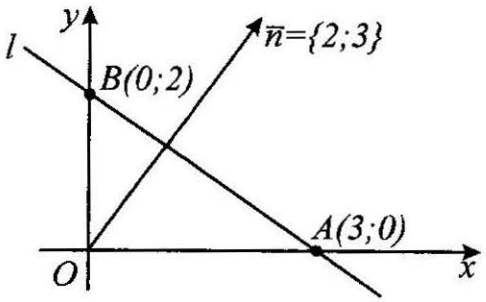



Fig. 12.2

## 12.2. Punctul de intersecţie a două drepte

Fie date două drepte prin ecuaţiile lor generale $l_1$: $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ şi $l_2$: $A_2x + B_2 + C_2 = 0$. Aceste drepte se intersectează dacă vectorii lor directori nu sunt coliniari: $\overline{a}_1 = \{B_1, -A_1\}$, $\overline{a}_2 = \{B_2, -A_2\}$, $\overline{a}_1 \nparallel \overline{a}_2$, adică $A_1 : A_2 \neq B_1 : B_2 \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Trebuie de aflat punctul de intersecţie $M_0(x_0, y_0)$ a acestor drepte. Acest punct $M_0$ este situat pe ambele drepte $l_1$ şi $l_2$, de aceea coordonatele lui $x_0$, $y_0$ trebuie să satisfacă ambele ecuaţii ale acestor drepte. De aici rezultă că *pentru a afla coordonatele punctului de intersecţie $M_0(x_0, y_0)$ a două drepte $l_1$ şi $l_2$ definite prin ecuaţiile lor generale, trebuie de rezolvat sistemul acestor ecuaţii*:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, & (l_1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. & (l_2) \end{cases} \tag{12.1}$$

În urma rezolvării sistemului (12.1), obţinem $M_0(x_0, y_0)$ – punctul de intersecţie a dreptelor $l_1$ şi $l_2$. La rezolvarea sistemului (12.1) sunt posibile următoarele cazuri:

1. Sistemul (12.1) are o singură soluţie $(x_0, y_0)$ (dacă $A_1 : A_2 \neq \neq B_1 : B_2$). În acest caz dreptele se intersectează într-un singur punct $M_0(x_0, y_0)$.

2. Sistemul (12.1) este incompatibil, adică nu are soluţii (dacă $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \neq C_1 : C_2$). În acest caz dreptele nu au puncte comune, ele sunt paralele: $l_1 \parallel l_2$.

3. Sistemul (12.1) este nedeterminat, adică are o mulţime infinită de soluţii (dacă $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$). În acest caz dreptele

au o mulţime infinită de puncte comune, adică ele coincid: $l_1 \equiv l_2$.

**Exemplu.** Să se afle punctul de intersecţie a dreptelor definite prin ecuaţiile lor:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0, \\ 4x - y - 1 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0, \\ 6x - 8y - 7 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 6x - 3y + 3 = 0. \end{cases}$

Pentru a afla punctul de intersecţie $M_0$ a două drepte, rezolvăm sistemul de ecuaţii ale acestor drepte.

a) Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0, \\ 4x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Obţinem $x = 1$, $y = 3$. Deci punctul de intersecţie căutat a dreptelor date este $M_0(1; 3)$.

b) Sistemul este incompatibil, deoarece $3:6 = (-4):(-8) \neq \neq 5:(-7)$. În acest caz dreptele sunt paralele.

c) Sistemul este nedeterminat, deoarece $2:6 = (-1):(-3) = 1:3$. În cazul dat dreptele coincid.

## 12.3. Ecuaţia dreptei ce trece prin punctul dat în direcţia dată

Fie $l$ o dreaptă din planul $Oxy$ neparalelă cu axa $Oy$ ( $l \nparallel Oy$).

**Definiţie.** Vom numi *unghiul de înclinaţie* a unei drepte $l$ faţă de axa absciselor $Ox$ (sau *unghiul dreptei $l$ cu axa $Ox$*) cel mai mic unghi $\alpha$ ($0 \leq \alpha < \pi$) cu care trebuie să rotim împotriva sensului mişcării acelor de ceasornic axa $Ox$ în jurul unui punct al său, astfel încât ea să devină paralelă cu dreapta dată $l$ (sau să coincidă cu $l$) (fig. 12.3). Acest unghi îl vom nota $(\widehat{Ox, l})$.

Tangenta unghiului de înclinaţie $\alpha$ a unei drepte $l$ faţă de axa absciselor $Ox$ se notează prin litera $k$:

$$k = tg\,\alpha. \tag{12.1}$$

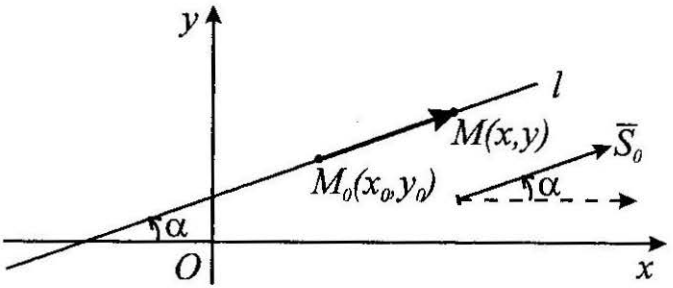



Fig. 12.3

$k$ determină direcţia dreptei date $l$ şi se numeşte *coeficientul unghiular* al acestei drepte $l$.

Poziţia unei drepte $l$ în planul $Oxy$ este pe deplin determinată fiind dat un punct $M_0(x_0, y_0)$ situat pe această dreaptă şi coeficientul unghiular $k$ al său, deoarece din egalitatea (12.1) se determină unghiul de înclinaţie $\alpha$ a dreptei $l$ faţă de axa $Ox$. Pentru a deduce ecuaţia dreptei $l$, luăm vectorul unitate $\overline{S_0}$ ($|\overline{S_0}| = 1$) care formează acelaşi unghi de înclinaţie $\alpha$ faţă de axa $Ox$ ca şi dreapta $l$ ($\alpha \neq 90°$) şi deci $l \parallel \overline{S_0}$. În baza teoremei 10.3, coordonatele acestui vector sunt: $pr_x\overline{S_0} = |\overline{S_0}| \cos\alpha = \cos\alpha$, $pr_y\overline{S_0} = |\overline{S_0}| \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, adică $\overline{S_0} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ (fig. 12.3). Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al dreptei date $l$. Atunci vectorii $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ şi $\overline{S_0} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ sunt coliniari. Scriind condiţia de coliniaritate a acestor vectori prin coordonate, obţinem

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}.$$

Rezolvând această ecuaţie în raport cu $y - y_0$, rezultă

$$\begin{aligned} y - y_0 &= tg\,\alpha(x - x_0) \quad \text{sau} \\ y - y_0 &= k(x - x_0). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Ecuaţia (12.2) se numeşte *ecuaţia dreptei ce trece prin punctul dat în direcţia dată*, sau *ecuaţia dreptei ce trece prin punctul dat* $M_0(x_0, y_0)$ *şi are coeficientul unghiular dat* $k$.

Dacă coeficientul $k$ este fixat, atunci avem o singură dreaptă pe deplin determinată care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ în direcţia determinată de coeficientul unghiular $k$. Însă dacă $k$ nu este dat, atunci în ecuaţia (12.2) parametrului $k$ i se pot atribui valori arbitrare. Diferitelor valori ale coeficientului $k$ le corespund diferite drepte. De

aceea, pentru $k$ nedeterminat ecuaţia (12.2) reprezintă mulţimea tuturor dreptelor din plan care trec printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0)$. Această mulţime de drepte se numeşte *fascicul de drepte.* Punctul $M_0$ se numeşte *vârful fasciculului* (fig. 12.4). Aşadar, pentru $k$ nedeterminat, (12.2) este *ecuaţia fasciculului de vârf* $M_0(x_0, y_0)$.

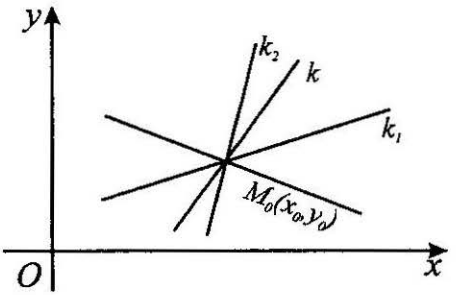



Fig. 12.4

R e m a r c ă. Dacă $l \parallel Oy$, atunci dreapta $l$ nu are ecuaţie de forma (12.2), fiindcă pentru $\alpha = 90°$ coeficientul unghiular al dreptei nu este definit. În acest caz, ecuaţia dreptei date $l \parallel Oy$ are forma $x = a$, deoarece toate punctele acestei drepte au una şi aceeaşi abscisă $x = a$ (fig. 12.5).

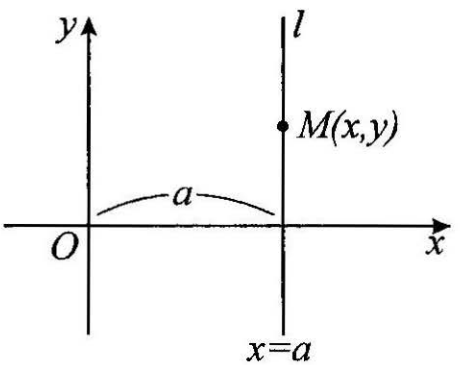



Fig. 12.5

E x e m p l u. Să se scrie ecuaţia dreptei $l$ care trece prin punctul $M_0(1;2)$ şi are unghiul de înclinaţie faţă de axa absciselor $\alpha = 45°$.

Avem $k = tg\,45° = 1$. Utilizând formula (12.2), scriem ecuaţia dreptei date $l$: $y-2 = 1\cdot(x-1)$, sau $x-y+1 = 0$ – ecuaţia generală a dreptei date $l$. Remarcăm că $y-2 = k(x-1)$ este ecuaţia fasciculului de vârf $M_0(1;2)$.

## 12.4. Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date. Ecuaţia dreptei prin tăieturi

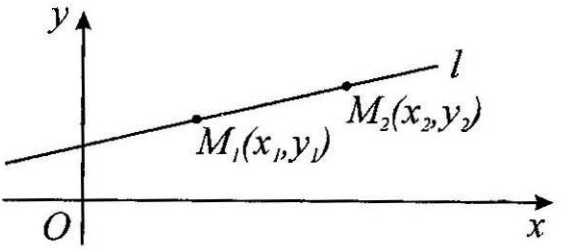



Fig. 12.6

Considerăm dreapta $l$ ce trece prin două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$, dar $x_2 - x_1 \neq 0$. Dreapta se determină pe deplin de două puncte distincte ale sale (fig. 12.6). Fie $k$ coeficientul unghiular al dreptei $l$, deocamdată necunoscut, dar pe care îl vom afla imediat. Considerând că dreapta $l$ trece prin punctul $M_1(x_1, y_1)$ şi are coeficientul unghiular $k$, ecuaţia acestei drepte poate fi scrisă sub forma:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{12.1}$$

Întrucât $M_2(x_2, y_2)$ aparţine dreptei $l$, coordonatele acestui punct trebuie să satisfacă ecuaţia (12.1), adică avem:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

De aici aflăm:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{12.2}$$

(12.2) este *formula pentru calcularea coeficientului unghiular $k$ al dreptei $l$* ce trece prin două puncte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Substituind valoarea lui $k$ din (12.2) în ecuaţia (12.1), obţinem ecuaţia

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1), \qquad \text{sau}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{12.3}$$

Ecuaţia (12.3) se numeşte *ecuaţia dreptei care trece prin două puncte date* $M_1(x_1, y_1)$ *şi* $M_2(x_2, y_2)$.

Exemplul 1. Să se scrie ecuaţia dreptei $l$ ce trece prin punctele $M_1(1,2)$ şi $M_2(-1,1)$.

Utilizând formula (12.3), găsim $\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{1-2}$, sau $x-2y+3=0$ – ecuaţia generală căutată a dreptei date $l$.

Dacă dreapta $l$ taie pe axa absciselor un segment de mărime $a$ $(a \neq 0)$, iar pe axa ordonatelor un segment de mărime $b$ $(b \neq 0)$, adică $l$ trece prin punctele $A(a,0)$ şi $B(0,b)$ (fig. 12.7), atunci scriind ecuaţia acestei drepte ca trecând prin două puncte $A$ şi $B$, găsim

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}, \qquad \text{sau} \qquad \frac{x}{-a}+1 = \frac{y}{b},$$

de unde obţinem

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{12.4}$$

Ecuaţia (12.4) se numeşte *ecuaţia dreptei prin tăieturi* (sau *în segmente*).

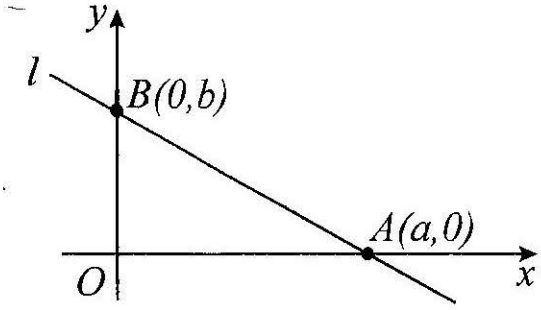



Fig. 12.7

Exemplul 2. Să se scrie ecuaţia dreptei $l$ care taie pe axele de coordonate $Ox$ şi $Oy$, respectiv, segmentele de mărime $-3$ şi $3$.

Conform formulei (12.4), avem $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}=1$, sau $x-y+3=0$ – ecuaţia generală a dreptei date $l$.

## 12.5. Ecuaţia dreptei cu coeficientul unghiular dat şi ordonata iniţială

Considerăm o dreaptă $l$ din planul $Oxy$, care nu este paralelă cu axa $Oy$ ($l \nparallel Oy$). Fie că această dreaptă $l$ are coeficientul unghiular $k$ şi taie pe axa $Oy$ un segment de mărime $b$, adică $l$ intersectează $Oy$ în punctul $M_0(0; b)$ (fig. 12.8).
Numărul $b$ se numeşte *ordonata iniţială.*

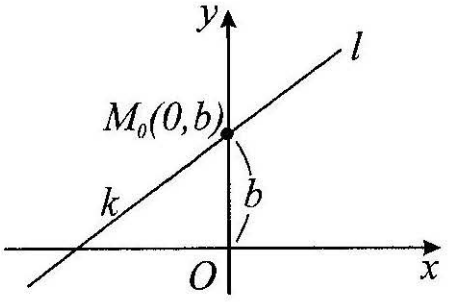



Fig. 12.8

Scriind ecuaţia acestei drepte sub forma (12.2) din p. 12.3, obţinem $y - b = k(x - 0)$, sau

$$y = kx + b. \tag{12.1}$$

Ecuaţia (12.1) se numeşte *ecuaţia dreptei cu coeficientul unghiular dat şi ordonata iniţială.*

R e m a r c ă. Dacă dreapta $l$ ($l \nparallel Oy$) este dată de ecuaţia generală a sa $Ax + By + C = 0$ ($B \neq 0$), atunci, rezolvând această ecuaţie în raport cu $y$, obţinem ecuaţia dreptei cu coeficient unghiular $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, unde $k = tg\,\alpha = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$. Considerăm cazurile particulare ale ecuaţiei (12.1).

1. Pentru $b = 0$, ecuaţia $y = kx$ defineşte o dreaptă ce trece prin originea de coordonate, deoarece coordonatele punctului $O(0, 0)$ satisfac această ecuaţie. În particular, pentru $b = 0$, $k = 1$, ecuaţia $y = x$ defineşte bisectoarea cadranelor I şi III ($k = tg\,\alpha = 1$, $\alpha = 45°$).

2. Pentru $k = 0$ ($tg\,\alpha = 0$, $\alpha = 0$), ecuaţia (12.1) devine $y = b$. Această ecuaţie defineşte o dreaptă paralelă la $Ox$, care taie pe axa $Oy$ un segment de mărime $b$ (toate punctele acestei drepte au una şi aceeaşi ordonată $y = b$).

3. Pentru $k = b = 0$, avem $y = 0$ – ecuaţia axei $Ox$.

E x e m p l u. Să se scrie ecuaţia dreptei $l$ care taie pe axa $Oy$ segmentul de mărime $b = 2$ şi are unghiul de înclinaţie $\alpha = 30°$ faţă de axa $Ox$ (fig. 12.9).

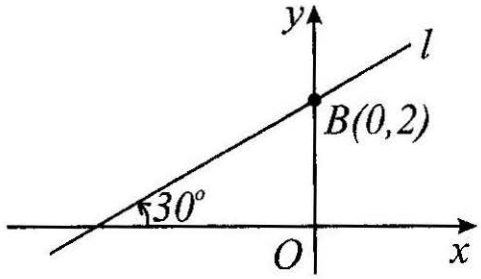



Fig. 12.9

Avem $\alpha = (\widehat{Ox,l}) = 30°$, $k = tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = 2$. Aplicând formula (12.1), găsim ecuaţia $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$, sau $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ – ecuaţia generală a dreptei date $l$.

## 12.6. Unghiul dintre două drepte. Condiţiile de paralelism şi de perpendicularitate a două drepte

Considerăm două drepte $l_1$ şi $l_2$, definite prin ecuaţiile lor cu coeficienţi unghiulari (fig. 12.10):

$$l_1: \quad y = k_1x + b_1, \tag{12.1}$$

$$l_2: \quad y = k_2x + b_2, \tag{12.2}$$

unde $k_1 = tg\,\alpha_1$, $k_2 = tg\,\alpha_2$, $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ – unghiurile de înclinaţie, respectiv, a dreptelor $l_1$ şi $l_2$ faţă de axa $Ox$. Vom determina unghiul $\theta$ dintre dreptele $l_1$ şi $l_2$.

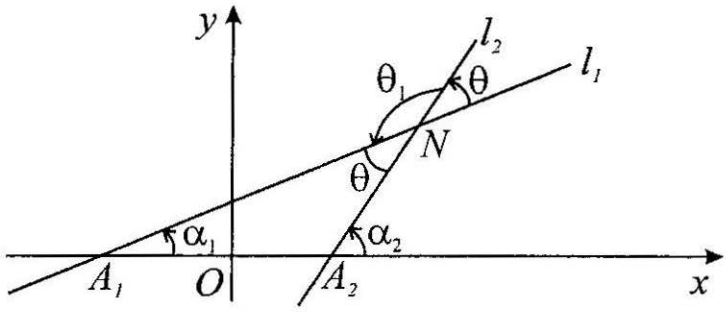



Fig. 12.10

Mai exact, prin $\theta$ vom înţelege cel mai mic unghi cu care trebuie să rotim împotriva sensului mişcării acelor de ceasornic prima dreaptă $l_1$ în jurul unui punct al ei, astfel încât ea să devină paralelă cu a doua dreaptă $l_2$ (sau să coincidă cu $l_2$). Evident, $0 \leq \theta < \pi$. Acest unghi $\theta$ se mai numeşte *unghiul de înclinaţie a dreptei a doua faţă de prima dreaptă*, sau *unghiul de la dreapta $l_1$ la dreapta $l_2$*, şi îl vom nota prin $(\widehat{l_1, l_2})$.

Din triunghiul $A_1A_2N$ (fig. 12.10) rezultă că $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$, $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Dacă $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, avem $tg\,\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 \cdot tg\,\alpha_2}$. Substituind $tg\,\alpha_1$ şi $tg\,\alpha_2$, respectiv prin $k_1$ şi $k_2$, obţinem formula

$$tg\,\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{12.3}$$

Cu ajutorul formulei (12.3) se determină *unghiul dintre două drepte* neperpendiculare, adică unghiul pozitiv $\theta$ de la dreapta $l_1$ cu coeficientul unghiular $k_1$ până la dreapta $l_2$ cu coeficientul unghiular $k_2$. Unghiul de la $l_2$ la $l_1$, evident, este

$$\theta_1 = \pi - \theta.$$

Formula (12.3) se aplică atunci când nici una dintre dreptele $l_1$ şi $l_2$ nu sunt paralele la axa $Oy$. Când una dintre aceste drepte este paralelă la $Oy$, de exemplu $l_2 \parallel Oy$ (fig. 12.11), atunci $\theta$ se calculează nemijlocit: $\alpha_1 + \theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_1$, de unde $tg\,\theta = tg(\dfrac{\pi}{2} - \alpha_1) = ctg\,\alpha_1 = \dfrac{1}{tg\,\alpha_1} = \dfrac{1}{k_1}$.

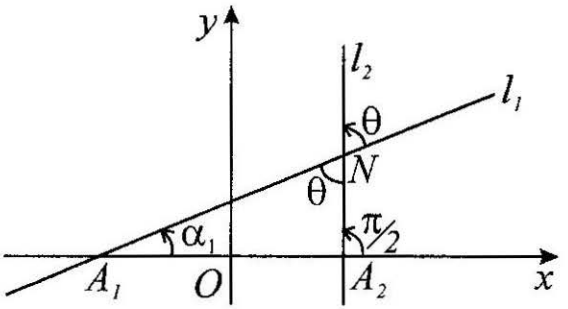



Fig. 12.11

Dacă dreptele (12.1) şi (12.2) sunt paralele ($l_1 \parallel l_2$), atunci $\alpha_1 = \alpha_2$, $tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2$, adică are loc egalitatea

$$k_1 = k_2. \tag{12.4}$$

Reciproc, dacă e satisfăcută condiţia (12.4), atunci, luând în consideraţie că $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ sunt cuprinse în limitele de la 0 până la $\pi$, din $tg\,\alpha_1 = tg\,\alpha_2$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2$, adică dreptele sau sunt paralele, sau coincid.

În felul acesta, egalitatea (12.4) reprezintă *condiţia de paralelism a două drepte* $l_1$ şi $l_2$.

Dacă dreptele (12.1) şi (12.2) sunt perpendiculare ($l_1 \perp l_2$), adică $\theta = (\widehat{l_1, l_2}) = \frac{\pi}{2}$, atunci în acest caz $ctg\,\theta = 0$, de unde

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{12.5}$$

Reciproc, dacă este satisfăcută condiţia (12.5), atunci $1 + k_1 k_2 = 0$, $ctg\,\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, adică dreptele sunt perpendiculare.

Aşadar, egalitatea (12.5) este *condiţia de perpendicularitate a două drepte* $l_1$ şi $l_2$.

R e m a r c ă. Dacă două drepte $l_1$ şi $l_2$ sunt date de ecuaţiile lor generale $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ şi $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, atunci determinarea unuia din cele două unghiuri adiacente suplimentare dintre dreptele $l_1$ şi $l_2$ se reduce la determinarea unghiului $\theta$ dintre vectorii normali $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ şi $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ ai acestor drepte cu ajutorul formulei:

$$\cos\theta = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Exemplu. Să se găsească unghiul dintre dreptele $l_1$: $y = \frac{1}{3}x + 1$ şi $l_2$: $y = 2x + \frac{2}{3}$.

Aici coeficienţii unghiulari ai dreptelor $l_1$ şi $l_2$ sunt, respectiv, $k_1 = \frac{1}{3}$ şi $k_2 = 2$. Conform formulei (12.3), obţinem

$$tg\,\theta = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} \cdot 2} = 1,$$

de unde rezultă $\theta = (\widehat{l_1, l_2}) = \frac{\pi}{4}$.

## 12.7. Distanţa de la un punct la o dreaptă

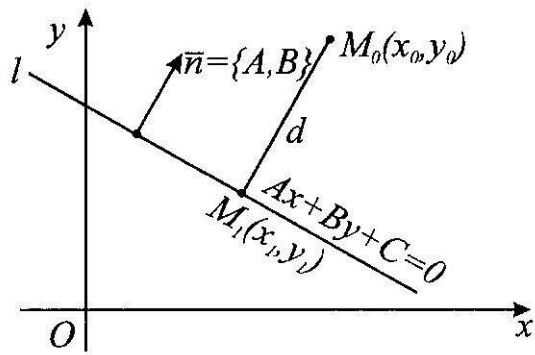



Fig. 12.12

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan şi $l$ o dreaptă dată prin ecuaţia generală $Ax + By + C = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1)$ proiecţia ortogonală a punctului $M_0$ pe dreapta $l$ (fig. 12.12).

Lungimea $|\overline{M_1M_0}|$ a perpendicularei dusă dintr-un punct $M_0$ pe o dreaptă $l$ se numeşte *distanţa de la punctul $M_0$ la dreapta $l$* şi vom nota-o prin $d$. Analitic, $d$ se poate obţine astfel. Avem $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$, iar vectorul normal al dreptei $l$ este $\overline{n} = \{A, B\}$.

Evident, $\overline{n} \parallel \overline{M_1M_0}$, de unde rezultă identitatea $\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0} = |\overline{n}| \times$ $\times|\overline{M_1M_0}| \cdot \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{M_1M_0}}) = \pm|\overline{n}| \cdot |\overline{M_1M_0}|$. Deci $|\overline{M_1M_0}| =$ $= \pm\dfrac{\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0}}{|\overline{n}|}$, de unde obţinem $d = \dfrac{|\overline{n} \cdot \overline{M_1M_0}|}{|\overline{n}|}$ sau $d =$ $= \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Deoarece $M_1(x_1, y_1) \in l$, coordonatele acestui punct satisfac ecuaţia dreptei $l$, adică avem $Ax_1 + By_1 + C = 0$, de unde rezultă $C = -Ax_1 - By_1$ şi deci

$$d = |\overline{M_1M_0}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{12.1}$$

(12.1) este *formula pentru determinarea distanţei de la un punct* $M_0(x_0, y_0)$ *la o dreaptă* $l$: $Ax + By + C = 0$.

E x e m p l u. Să se găsească distanţa de la punctul $M_0(-2; 3)$ la dreapta $l$: $4x - 3y - 8 = 0$.

Conform formulei (12.1), găsim distanţa de la punctul $M_0$ la dreapta $l$ dată prin ecuaţia generală:

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8 - 9 - 8|}{5} = \frac{|-25|}{5} = 5.$$

## 12.8. Aria unui triunghi în plan

Fie în planul $Oxy$ dat un triunghi oarecare cu vârfurile $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ (fig. 12.13). Să se deducă formula pentru calcularea ariei acestui triunghi.

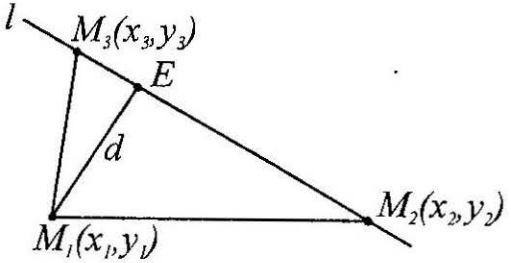



Fig. 12.13

▷ Scriem ecuaţia dreptei $l$ ce trece prin punctele $M_2(x_2, y_2)$ şi $M_3(x_3, y_3)$:

$$l: \quad \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}.$$

Această ecuaţie, după cum e uşor de verificat, este echivalentă cu următoarea ecuaţie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după elementele primei linii, obţinem următoarea ecuaţie de formă generală a dreptei $l$, echivalentă celei iniţiale:

$$l: \quad \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Notăm

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Atunci, aplicând formula (12.1) din p. 12.7, deducem că distanţa de la punctul $M_1(x_1, y_1)$ la această dreaptă $l$ se exprimă astfel:

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix}^2}} =$$

$$= \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}.$$

Calculăm lungimea segmentului $\overline{M_2M_3}$. Avem: $\overline{M_2M_3} = \{x_3 - x_2, y_3 - y_2\}$ şi deci $|\overline{M_2M_3}| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$.

De aceea *aria*

$$S = \frac{1}{2}|\overline{M_2M_3}| \cdot d$$

*a triunghiului $M_1M_2M_3$ poate fi calculată cu formula*

$$S = S_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}|\Delta|, \tag{12.1}$$

unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \triangleleft$$

E x e m p l u. Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $M_1(-3,-2)$, $M_2(3,-1)$, $M_3(1,2)$.

Conform formulei (12.1), obţinem

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-1)\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot(-3) - 3\cdot(-2)\cdot 1 = 20.$$

$$S_{\Delta_{M_1M_2M_3}} = \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10.$$

## Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia generală a dreptei care trece prin punctul $A(1;3)$ şi are vectorul normal $\overline{n} = \{-1;5\}$.
2. Să se scrie ecuaţiile dreptelor ce trec prin punctul $A(5;2)$, paralel la axele de coordonate.
3. Să se afle punctul de intersecţie a dreptelor:
   a) $3x - 5y + 9 = 0$ şi $2x + y - 7 = 0$;
   b) $2x - 3y - 3 = 0$ şi $4x - 6y + 5 = 0$;
   c) $x - 2y - 1 = 0$ şi $0,5x - y - 0,5 = 0$.
4. Să se compună ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,3)$, paralel la dreapta ce trece prin punctele $B(3;-2)$ şi $C(-2;5)$.
5. Să se calculeze unghiul dintre dreptele
   $$2x - y + 3 = 0 \qquad \text{şi} \qquad 3x + y - 7 = 0.$$
6. Să se afle proiecţia ortogonală a punctului $M(7;-3)$ pe dreapta $2x - 3y - 6 = 0$.
7. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin originea de coordonate şi se află la o distanţă de 3 unităţi de punctul $A(4;-3)$.

CAPITOLUL 13

# Planul și dreapta în spațiu

## 13.1. Planul în spațiu

### 13.1.1. Vector normal la plan. Vectori coplanari

Un vector nenul $\overline{n} = \{A,B,C\}$ perpendicular pe planul dat $a$ se numește *vectorul normal al* acestui plan (fig. 13.1). Precizam că orice vector $t\overline{n}$, $t \neq 0$, joacă același rol ca și $\overline{n}$.

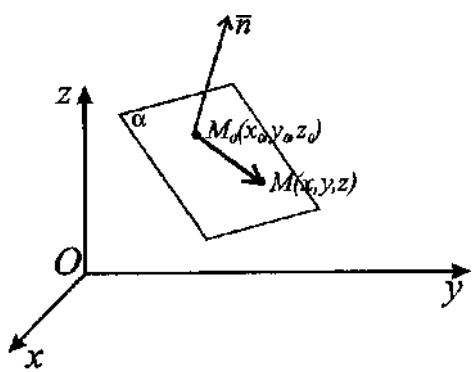



Fig. 13.1

Câțiva vectori se numesc *coplanari* dacă ei sunt situați în același plan sau dacă ei sunt paraleli la același plan. Cu alte cuvinte, câțiva vectori sunt coplanari dacă, fiind depuși din același punct, se situează într-un singur plan. Doi vectori, evident, totdeauna sunt coplanari.

Poziţia unui plan în spaţiu se determină în mod unic în trei cazuri:

1) se dau un punct prin care trece planul şi vectorul normal al acestui plan;

2) se dau un punct prin care trece planul şi doi vectori necoliniari paraleli cu acest plan;

3) se dau trei puncte ale planului care nu sunt situate pe aceeaşi dreaptă.

### 13.1.2. Ecuaţia generală a unui plan

Fie că planul $\alpha$ trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul normal $\overline{n} = \{A, B, C\} \neq \overline{0}$. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului $\alpha$. Atunci vectorii $\overline{n} = \{A, B, C\}$ şi $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ sunt perpendiculari: $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$ (fig. 13.1). Scriind condiţia de perpendicularitate a acestor vectori, obţinem

$$\overline{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (13.1)$$

sau

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (13.2)$$

unde $D = -Ax_0 - By_0 - C_0$.

Ecuaţia (13.1) este satisfăcută de coordonatele oricărui punct $M(x, y, z) \in \alpha$ şi nu este satisfăcută de coordonatele nici ale unui punct $M_1 \notin \alpha$. Prin urmare, (13.1) şi (13.2) este ecuaţia planului dat $\alpha$.

Ecuaţia (13.2) pentru care $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ se numeşte *ecuaţia generală a unui plan* $\alpha$ *cu vectorul normal* $\overline{n} = \{A, B, C\}$.

Să arătăm că orice ecuaţie de forma (13.2), în care cel puţin unul din coeficienţii $A, B, C$ este diferit de zero, defineşte un plan cu vectorul normal $\overline{n} = \{A, B, C\}$.

▷ Într-adevăr, fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar ce satisface ecuaţia (13.2), iar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – un punct fixat care de asemenea satisface (13.2), adică are loc egalitatea $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Scăzând această egalitate din (13.2), obţinem egalitatea (13.1), care înseamnă că $\overline{n} = \{A, B, C\}$ şi $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ sunt perpendiculari: $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$. Aceasta înseamnă că toate punctele $M(x, y, z)$ coordonatele cărora satisfac ecuaţia (13.2) sunt situate în planul $\alpha$ ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul

$\overline{n} = \{A, B, C\}$. Pe de altă parte, după cum deja este demonstrat, coordonatele punctului arbitrar $M(x, y, z)$ al acestui plan $\alpha$ satisfac ecuaţia (13.2). Prin urmare, ecuaţia (13.2) defineşte planul considerat $\alpha$. $\triangleleft$

E x e m p l u. Să se scrie ecuaţia planului $\alpha$ care trece prin punctul $M_0(1, -1, 2)$ şi are vectorul normal $\overline{n} = \{3, 4, 5\}$.

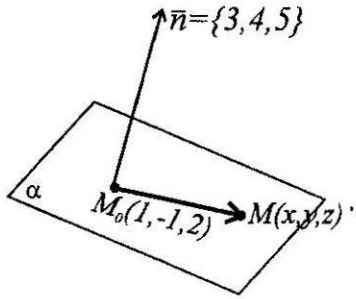



Fig. 13.2

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului $\alpha$. Executăm un desen schematic. Atunci vectorii $\overline{n} = \{3, 4, 5\}$ şi $\overline{M_0M} = \{x-1, y+1, z-2\}$ sunt perpendiculari (fig. 13.2). Avem relaţia $\overline{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow 3(x-1) + 4(y+1) + 5(z-2) = 0$, de unde rezultă $3x + 4y + 5z - 9 = 0$ – ecuaţia generală a planului dat $\alpha$.

### 13.1.3. Ecuaţia planului ce trece prin punctul dat şi este paralel cu doi vectori daţi

Fie planul $\alpha$ ce trece prin punctul dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu doi vectori necoliniari daţi (sau conţine aceşti vectori): $\overline{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ şi $\overline{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ (fig. 13.3). Aflăm vectorul $\overline{n}$ perpendicular pe vectorii $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$:

$$\overline{n} = \left\{ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\}. \qquad (13.3)$$

Acest vector $\overline{n}$ este vectorul normal al planului $\alpha$. Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al acestui plan. Scriind condiţia de perpendicularitate a vectorilor $\overline{n} = \{A, B, C\}$ şi $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$,

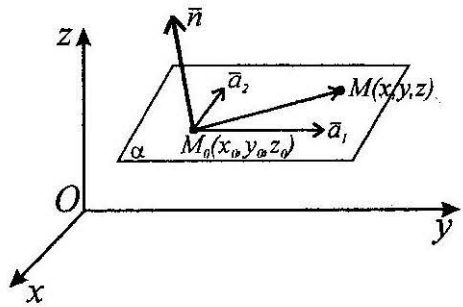



Fig. 13.3

obţinem relaţia $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, de unde rezultă $Ax+By+Cz+D=0$ – ecuaţia generală (13.2) a planului dat $\alpha$.

E x e m p l u. Să se scrie ecuaţia planului $\alpha$ ce trece prin punctul $M_0(-1,0,2)$ şi conţine vectorii $\overline{a}_1=\{-1,0,3\}$ şi $\overline{a}_2=\{0,2,-1\}$.

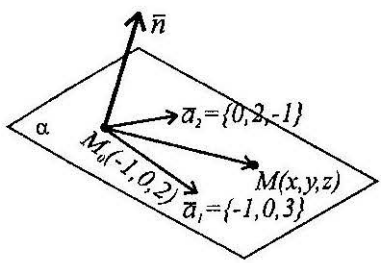



Fig. 13.4

Executăm un desen schematic (fig. 13.4). Vectorul normal $\overline{n}$ al planului $\alpha$, conform formulei (13.3), are coordonatele:

$$\overline{n}=\left\{\begin{vmatrix}0&3\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-1\\-1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}\right\}=\{-6,-1,-2\}.$$

Acest vector $\overline{n}$ este perpendicular pe planul $\alpha$. Luăm un punct arbitrar $M(x,y,z)\in\alpha$. Atunci vectorii $\overline{n}=\{-6,-1,-2\}$ şi $\overline{M_0M}=\{x+1,y,z-2\}$ sunt perpendiculari. Avem: $\overline{n}\perp\overline{M_0M}\Leftrightarrow -6(x+1)-1\cdot y-2(z-2)=0$, de unde găsim $6x+y+2z+2=0$ – ecuaţia generală căutată a planului dat $\alpha$.

### 13.1.4. Ecuaţia planului care trece prin trei puncte date

Fie că planul $\alpha$ trece prin trei puncte date: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$, care nu sunt situate pe aceeaşi dreaptă (fig. 13.5). Atunci vectorii $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} = \{m_1, n_1, p_1\}$ şi $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} = \{m_2, n_2, p_2\}$ sunt coplanari cu planul $\alpha$. Vectorul normal al planului $\alpha$ este vectorul

$$\overline{n} = \left\{ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\}.$$

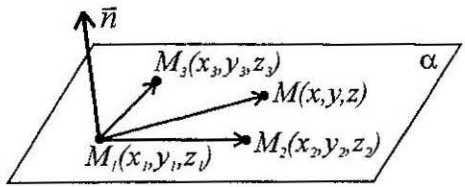



Fig. 13.5

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului $\alpha$. Scriind condiţia de perpendicularitate a vectorului $\overline{n} = \{A, B, C\}$ şi $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, aflăm ecuaţia căutată a planului $\alpha$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

sau $Ax + By + Cz + D = 0$ – ecuaţia generală a planului dat $\alpha$.

E x e m p l u. Să se compună ecuaţia planului $\alpha$ care trece prin trei puncte: $M_1(-1, -1, 0)$, $M_2(1, 2, 1)$, $M_3(1, 0, -1)$.

Executăm un desen schematic (fig. 13.6). Avem $\overline{M_1M_2} = \{1 + 1, 2 + 1, 1 - 0\} = \{2, 3, 1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{1 + 1, 0 + 1, -1 - 0\} = \{2, 1, -1\}$. Vectorul perpendicular pe vectorii $\overline{M_1M_2}$ şi $\overline{M_1M_3}$ este vectorul normal al planului $\alpha$ şi are reprezentarea prin coordonate:

$$\overline{n} = \left\{ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{-4, 4, -4\}.$$

Luăm un punct arbitrar $M(x, y, z) \in \alpha$. Atunci vectorii $\overline{n} = \{-4, 4, -4\}$ şi $\overline{M_1M} = \{x + 1, y + 1, z\}$ sunt perpendiculari. Scriind

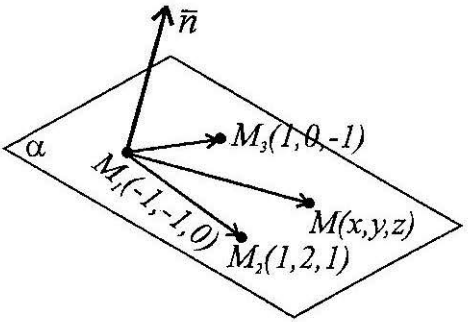



Fig. 13.6

condiţia de perpendicularitate a acestor vectori, găsim: $\overline{n} \perp \overline{M_1M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -4(x+1)+4(y+1)-4z=0$, de unde rezultă $x-y+z=0$ – ecuaţia generală căutată a planului dat $\alpha$.

## 13.2. Distanţa de la un punct la un plan

Fie un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în spaţiu şi un plan $\alpha$ definit prin ecuaţia generală

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Vectorul $\overline{n}=\{A,B,C\}$ este vectorul normal al planului dat $\alpha$. Luăm un punct $M_1(x_1,y_1,z_1)\in\alpha$ şi aplicăm vectorul normal $\overline{n}$ în acest punct $M_1$. Fie $N$ proiecţia ortogonală a punctului dat $M_0$ pe planul $\alpha$. Notăm $pr_{\overline{n}}\overline{M_1M_0}=\pm|\overline{M_1E}|$. Atunci distanţa $d$ de la punctul dat $M_0$ la planul dat $\alpha$, evident, se exprimă sub forma:

$$d=|\overline{NM_0}|=|\overline{M_1E}|.$$

Executăm un desen schematic (fig. 13.7). Atunci avem:

$$d=|\overline{M_1E}|=|pr_{\overline{n}}\overline{M_1M_0}|. \tag{13.1}$$

Dar din formula ce exprimă produsul scalar a doi vectori prin proiecţia unuia dintre ei pe celălalt, avem:

$$\overline{n}\cdot\overline{M_1M_0}=|\overline{n}|\cdot pr_{\overline{n}}\overline{M_1M_0},\quad \text{sau}\quad pr_{\overline{n}}\overline{M_1M_0}=\frac{\overline{n}\cdot\overline{M_1M_0}}{|\overline{n}|}.$$

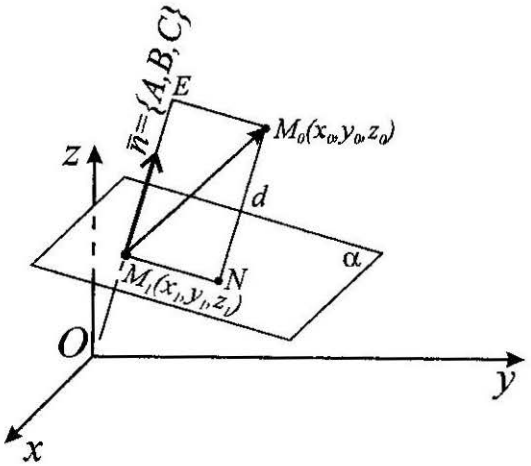



Fig. 13.7

Substituind această expresie în (13.1), obţinem:

$$d = \left| \frac{\overline{n} \cdot \overline{M_1 M_0}}{|\overline{n}|} \right|. \tag{13.2}$$

Exprimând egalitatea (13.2) prin coordonate, avem:

$$\overline{n} = \{A, B, C\}, \qquad \overline{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\},$$

$$d = \left| \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Însă $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, sau $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. Prin urmare, obţinem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{13.3}$$

adică distanţa $d$ de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la un plan $\alpha$ definit prin ecuaţia generală $Ax + By + Cz + D = 0$ este egală cu valoarea absolută a rezultatului substituirii coordonatelor punctului $M_0$ în membrul stâng al ecuaţiei generale a planului, împărţită la rădăcina pătrată din suma pătratelor coeficienţilor ai necunoscutelor ecuaţiei planului dat $\alpha$.

(13.3) se numeşte *formula distanţei de la un punct* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *la un plan* $\alpha$: $Ax + By + Cz + D = 0$.

E x e m p l u. Să se găsească distanţa de la punctul $M_0(1,2,3)$ până la planul $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Conform formulei (13.3), avem:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2(\text{un.}).$$

## 13.3. Dreapta în spaţiul $\mathbf{R}^3$

### 13.3.1. Ecuaţiile canonice ale unei drepte în spaţiu

Fie $l$ o dreaptă arbitrară din spaţiu. Ne reamintim că un vector nenul $\bar{a}$ se numeşte *vector director* al unei drepte $l$ dacă acest vector este paralel sau aparţine acestei drepte.

O dreaptă $l$ în spaţiu se determină în mod unic dacă este cunoscut un punct prin care ea trece şi un vector director al acestei drepte sau dacă sunt cunoscute două puncte ale acestei drepte.

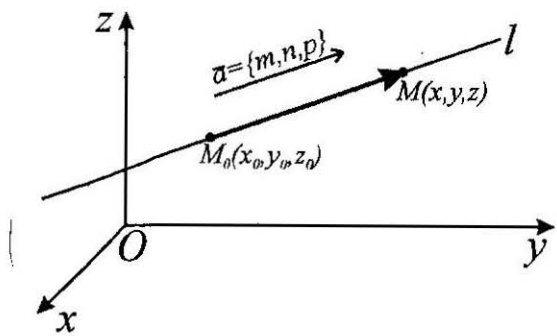



Fig. 13.8

Fie dată o dreaptă $l$ care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, x_0)$ şi are vectorul director $\bar{a} = \{m, n, p\}$ (fig. 13.8). Să compunem ecuaţiile acestei drepte. Pentru aceasta considerăm un punct arbitrar $M(x, y, z)$, care după presupunere aparţine dreptei $l$. Atunci vectorii $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ şi $\bar{a} = \{m, n, p\}$ sunt coliniari. Scriind condiţia de coliniaritate a acetor vectori, obţinem relaţia

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{13.1}$$

care este satisfăcută de coordonatele oricărui punct $M(x,y,z) \in l$ şi nu este satisfăcută de coordonatele nici ale unui punct $M_1 \notin l$. Ecuaţiile (13.1) se numesc *ecuaţiile canonice ale unei drepte* în spaţiu.

Remarcăm că numerele $m,n,p$ nu pot fi egale cu zero concomitent, deoarece vectorul $\bar{a}$ nu este nul. Însă unul sau două dintre aceste numere se pot anula simultan. Dacă unul dintre numitorii egalităţilor (13.1) este egal cu zero, atunci trebuie să subînţelegem că şi numărătorul respectiv este egal cu zero. De exemplu, dacă $p=0$, atunci $z-z_0=0$, $\cos\gamma=0$ ($\gamma=(\widehat{Oz,\bar{a}})$), adică dreapta este perpendiculară pe axa $Oz$ etc.

Să arătăm că orice ecuaţii de forma (13.1), în care nu toţi numitorii sunt egali cu zero, definesc o dreaptă în spaţiu.

▷ Într-adevăr, egalitatea (13.1) înseamnă că vectorii $\overline{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ şi $\bar{a}=\{m,n,p\}$ sunt coliniari. Adică toate punctele $M(x,y,z)$ coordonatele cărora satisfac ecuaţiile (13.1) sunt situate pe dreapta $l$ ce trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi are vectorul director $\bar{a}=\{m,n,p\}$. Pe de altă parte, după cum deja este demonstrat, coordonatele punctului arbitrar $M(x,y,z)$ al acestei drepte $l$ satisfac ecuaţiile (13.1). Prin urmare, ecuaţiile (13.1) definesc dreapta considerată $l$. ◁

Exemplul 1. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei $l$ care trece prin punctul $M_0(1,2,3)$ şi are vectorul director $\bar{a}=\{-2,3,4\}$.

Conform formulelor (13.1), găsim: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ – ecuaţiile canonice ale dreptei $l$.

Exemplul 2. Ecuaţiile $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+4}{-1}$ definesc dreapta $l$ în spaţiu care trece prin punctul $M_0(1,3,-4)$ şi are vectorul director $\bar{a}=\{2,0,-1\}$.

### 13.3.2. Ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte date

Fie o dreaptă $l$ ce trece prin două puncte distincte $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$ (fig. 13.9). Atunci vectorul $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ serveşte ca vector director al dreptei $l$. Considerând că dreapta $l$ trece prin punctul $M_1$ şi are vectorul director $\overline{M_1M_2}$,

scriem ecuaţiile canonice ale acestei drepte aplicând formulele (13.1). Obţinem:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{13.2}$$

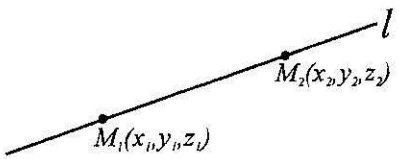



Fig. 13.9

Formulele (13.2) sunt *ecuaţiile dreptei ce trece prin două puncte date* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *şi* $M_2(x_2,y_2,x_2)$; $x$, $y$, $z$ înseamnă coordonatele unui punct arbitrar $M\in l$.

E x e m p l u. Să se scrie ecuaţiile dreptei $l$ ce trece prin două puncte date: $M_1(1,-1,3)$ şi $M_2(2,1,-1)$.

Conform formulelor (13.2), găsim $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z-3}{-1-3}$, sau $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4}$ – ecuaţiile dreptei date $l$ care trece prin două puncte date $M_1$ şi $M_2$.

## 13.4. Probleme referitoare la dreaptă şi plan în spaţiu

### 13.4.1. Dreapta în spaţiu ca linia de intersecţie a două plane

O dreaptă $l$ în spaţiu poate fi definită ca linia de intersecţie a două plane neparalele $\alpha$: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ şi $\beta$: $A_2x+B_2y+$ $+C_2z+D_2=0$, adică ca mulţimea tuturor punctelor coordonatele cărora satisfac sistemul de două ecuaţii liniare ale acestor plane

$$l:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{13.1}$$

Ecuaţiile sistemului (13.1) se numesc *ecuaţiile generale ale dreptei în spaţiu.*

Apare întrebarea: cum de redus ecuaţiile generale ale dreptei $l$ la forma canonică? Răspunsul e următorul: pentru a scrie ecuaţiile

canonice ale dreptei $l$, trebuie de aflat un punct fix $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ şi un vector director $\overline{a} \parallel l$. Executăm un desen schematic (fig. 13.10).

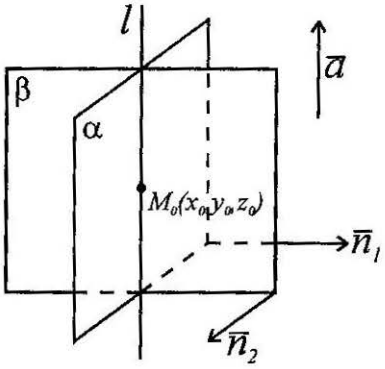



Fig. 13.10

Punctul $M_0 \in l$ se află în felul următor. Substituind în (13.1) o valoare oarecare $z = z_0$ (de exemplu $z = 0$), obţinem un sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute şi, rezolvându-l, găsim corespunzător $x = x_0$, $y = y_0$. Adică găsim punctul căutat $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$. Mai departe, avem că vectorul $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ este vectorul normal al planului $\alpha$, $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ este normal planului $\beta$. Prin urmare, $\overline{n}_1 \perp l \in \alpha$ şi $\overline{n}_2 \perp l \in \beta$, adică $l \perp \overline{n}_1$, $\overline{n}_2$. Deoarece vectorul căutat $\overline{a} \parallel l$, avem $\overline{a} \perp \overline{n}_1$, $\overline{n}_2$. După cum ne este cunoscut (a se vedea p. 10.13), un astfel de vector perpendicular pe doi vectori daţi se determină cu ajutorul formulei:

$$\overline{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} = \{m, n, p\}.$$

Acest vector $\overline{a} \parallel l$ este vectorul director căutat al dreptei $l$. Acum putem scrie ecuaţiile canonice ale dreptei date $l$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

E x e m p l u. Fie $l$ o dreaptă definită prin ecuaţiile generale în spaţiu

$$l: \begin{cases} x - 2y + 3z + 4 = 0, \\ 4x + 5y + z - 23 = 0. \end{cases} \tag{13.2}$$

Să se găsească ecuaţiile canonice ale ei.

Substituim în (13.2) valoarea $z = 0$. Obţinem sistemul de două ecuaţii liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ 4x + 5y - 23 = 0. \end{cases}$$

Rezolvându-l, găsim: $x = x_0 = 2$, $y = y_0 = 3$, $M_0(2,3,0) \in l$, adică $M_0$ - punctul căutat de pe dreapta $l$. Vectorul director $\overline{a}$ al dreptei $l$ ($\overline{a} \parallel l$) este vectorul $\overline{a} \perp \overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, adică

$$\overline{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right\} = \{-17, 11, 13\}.$$

Prin urmare, ecuaţiile canonice căutate ale dreptei date $l$ au aspectul:

$$\frac{x-2}{-17} = \frac{y-3}{11} = \frac{z}{13}.$$

### 13.4.2. Punctul de intersecţie a unei drepte cu un plan

Fie o dreaptă

$$l: \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \ (= t) \tag{13.3}$$

şi un plan:

$$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0. \tag{13.4}$$

Trebuie de aflat punctul de intersecţie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ a dreptei $l$ cu planul $\alpha$.

Executăm un desen schematic (fig. 13.11).

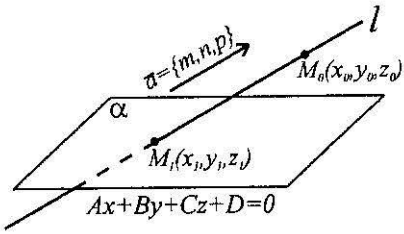



Fig. 13.11

Egalăm ecuaţiile canonice ale dreptei cu un parametru $t$ şi rescriem ecuaţiile dreptei $l$ sub forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{13.5}$$

Ecuaţiile (13.5) se numesc *ecuaţiile parametrice ale dreptei* $l$ în spaţiu. Eliminând parametrul $t$ din (13.5), uşor se trece la ecuaţiile canonice (13.3). Substituind (13.5) în ecuaţia (13.4) a planului $\alpha$, obţinem

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} = t_1.$$

Substituind această valoare $t = t_1$ în (13.5), găsim valorile

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + mt_1, \\ y_1 &= y_0 + nt_1, \\ z_1 &= z_0 + pt_1. \end{aligned}$$

Punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi este punctul de intersecţie căutat a dreptei $l$ cu planul $\alpha$.

E x e m p l u. Să se afle punctul de intersecţie a dreptei

$$l\colon\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}\ (= t)$$

$$\text{cu planul}\ \ \alpha\colon\ 2x - 3y + 4z - 1 = 0. \tag{13.6}$$

Egalând ecuaţiile canonice ale dreptei $l$ cu parametrul $t$, scriem ecuaţiile parametrice ale acestei drepte:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases} \tag{13.7}$$

Substituind (13.7) în (13.6), găsim $t = -\frac{7}{3}$. Substituind, la rândul său, această valoare în (13.7), obţinem valorile

$$x_1 = -10/3,\ y_1 = -1/3,\ z_1 = -5/3.$$

Răspuns. Punctul de intersecţie căutat a dreptei $l$ cu planul $\alpha$ este punctul $M_1(-10/3, -1/3, -5/3)$.

### 13.4.3. Unghiul dintre două drepte. Condiţiile de paralelism şi de perpendicularitate a două drepte

Considerăm două drepte:

$$l_1\colon\ \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}\quad \text{şi}$$

$$l_2\colon\ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

cu vectorii directori respectivi $\overline{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ şi $\overline{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ (fig. 13.12).

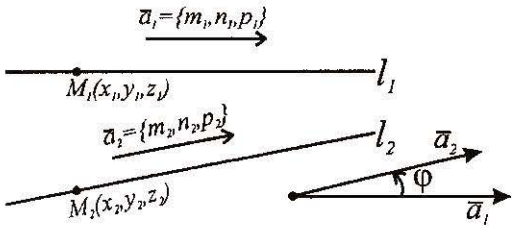



Fig. 13.12

Două drepte $l_1$ şi $l_2$ care nu au nici un punct comun şi nu sunt nici paralele le vom numi *drepte necoplanare*. Unghiul dintre două drepte necoplanare în spaţiu poate fi definit ca unghiul $\varphi$ dintre vectorii directori ai acestor drepte: $\varphi = (\widehat{l_1, l_2}) = (\widehat{\overline{a}_1, \overline{a}_2})$. Avem

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{a}_1, \overline{a}_2}) = \frac{\overline{a}_1 \overline{a}_2}{|\overline{a}_1| \cdot |\overline{a}_2|} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (13.8)$$

(13.8) este *formula pentru determinarea unghiului $\varphi$ dintre două drepte $l_1$ şi $l_2$* în spaţiu. Din (13.8) rezultă $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 \perp \overline{a}_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$ sau

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (13.9)$$

(13.9) este *condiţia necesară şi suficientă de perpendicularitate a două drepte $l_1$ şi $l_2$* în spaţiu. Paralelismul a două drepte înseamnă, evident, coliniaritatea vectorilor directori ai lor. De aceea $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2$, care (conform teoremei 10.8) este o relaţie echivalentă cu egalităţile

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (13.10)$$

Relaţiile (13.10) sunt *condiţiile necesare şi suficiente de paralelism a două drepte $l_1$ şi $l_2$* în spaţiu.

Exemplul 1. Să se afle unghiul dintre dreptele

$$l_1: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{şi}$$

$$l_2: \quad \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+4}{0}.$$

Avem $\bar{a}_1 = \{1,-2,2\}$, $\bar{a}_1 \parallel l_1$; $\bar{a}_2 = \{2,-2,0\}$, $\bar{a}_2 \parallel l_2$; $\varphi = (\widehat{l_1,l_2}) = (\widehat{\bar{a}_1,\bar{a}_2})$.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}_1\bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Răspuns: $\varphi = (\widehat{l_1,l_2}) = 45°$.

Exemplul 2. Să se arate că dreptele

$$l_1: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-3} \quad \text{şi} \quad l_2: \quad \frac{x-4}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{6}$$

sunt perpendiculare.

Verificăm relaţia (13.9). Avem $\bar{a}_1 = \{2,3,-3\}$, $\bar{a}_1 \parallel l_1$; $\bar{a}_2 = \{3,4,6\}$, $\bar{a}_2 \parallel l_2$; $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 6 = 0$, adică (13.9) este îndeplinită. Prin urmare, $l_1 \perp l_2$.

Exemplul 3. Să se determine poziţia relativă a dreptelor în spaţiu:

$$l_1: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+8}{5},$$

$$l_2: \quad \frac{x+2}{0,6} = \frac{y+5}{0,8} = \frac{z-3}{1}.$$

Coordonatele vectorilor directori $\bar{a}_1 = \{3,4,5\}$ şi $\bar{a}_2 = \{0,6;0,8;1\}$ ai acestor drepte sunt proporţionale: $\frac{3}{0,6} = \frac{4}{0,8} = \frac{5}{1}$, adică are loc relaţia (13.10). Prin urmare, $l_1 \parallel l_2$.

### 13.4.4. Unghiul dintre două plane. Condiţiile de perpendicularitate şi de paralelism a două plane

Fie două plane

$$\begin{aligned} \alpha_1&: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \alpha_2&: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}$$

care se intersectează după o dreaptă $l$. Ducem planul $P$ perpendicular pe dreapta $l$. Acest plan se intersectează cu $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ după două drepte $l_1$ şi $l_2$, respectiv. Unghiul $\varphi$ dintre dreptele $l_1$ şi $l_2$ se numeşte *unghiul dintre planele* $\alpha_1$ *şi* $\alpha_2$. Totodată, unghiul dintre vectorii normali $\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ şi $\overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ este egal cu unghiul corespunzător $\varphi$ dintre planele $\alpha_1$ şi $\alpha_2$, adică $\varphi = (\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = (\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2})$ (fig. 13.13).

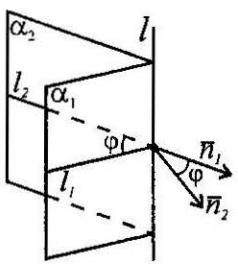



Fig. 13.13

Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) = \frac{\overline{n}_1\overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \\ &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \end{aligned} \tag{13.11}$$

(13.11) este *formula pentru determinarea unghiului* $\varphi$ *dintre două plane* $\alpha_1$ şi $\alpha_2$.

Din (13.11) rezultă: $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$ sau

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{13.12}$$

(13.12) este *condiţia necesară şi suficientă de perpendicularitate a două plane* $\alpha_1$ şi $\alpha_2$.

E x e m p l u l 1. Să se afle unghiul dintre planele:

$$\alpha_1: \quad 8x - 2y - 7z + 5 = 0 \quad \text{şi}$$
$$\alpha_2: \quad 7x + 8y - 11z - 3 = 0.$$

Avem $\overline{n}_1 = \{8, -2, -7\}$, $\overline{n}_1 \perp \alpha_1$ şi $\overline{n}_2 = \{7, 8, -11\}$, $\overline{n}_2 \perp \alpha_2$. Aplicând formula (13.11), rezultă $\cos\varphi = \cos(\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_2}) =$
$= \dfrac{8 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 7 \cdot (-11)}{\sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 8^2 + (-11)^2}} = \dfrac{117}{117\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
Răspuns: $\varphi = \cos(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = 45°$.

E x e m p l u l 2. Să se verifice referitor la perpendicularitate planele: $\alpha_1 : 2x - 3y + 7z - 1 = 0$ şi $\alpha_2 : 4x + 5y + z + 5 = 0$.

Verificăm relaţia (13.12). Avem $2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 7 \cdot 1 = 0$, adică (13.12) este satisfăcută. Prin urmare, $\alpha_1 \perp \alpha_2$.

Două plane:

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sunt paralele dacă sunt paraleli vectorii normali ai lor (fig. 13.14). În felul acesta, $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$ care, evident, este o relaţie echivalentă cu egalităţile

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{13.13}$$

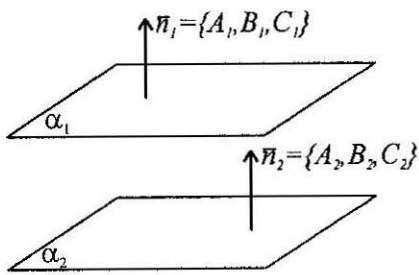



Fig. 13.14

Relaţiile (13.13) sunt *condiţiile necesare şi suficiente de paralelism a două plane* $\alpha_1$ şi $\alpha_2$.

Exemplul 3. Să se determine poziţia relativă a planelor

$$\alpha_1: \quad 2x + 3y - 5z + 1 = 0 \quad \text{şi}$$
$$\alpha_2: \quad 4x + 6y - 10z + 7 = 0.$$

Verificăm relaţiile (13.13). Avem $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10}$, adică coeficienţii ecuaţiilor acestor plane sunt proporţionali. Prin urmare, $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

### 13.4.5. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan. Condiţiile de perpendicularitate şi de paralelism a unei drepte cu un plan

Fie dreapta $l$: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ şi planul $\alpha$: $Ax + By + Cz + D = 0$.

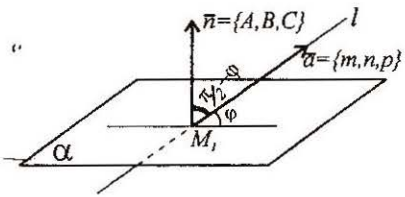



Fig. 13.15

Se numeşte *unghiul dintre o dreaptă* $l$ *şi un plan* $\alpha$ cel mai mic unghi $\varphi$ format de dreapta $l$ şi proiecţia ortogonală a ei pe planul $\alpha$ (fig. 13.15).

Aplicăm vectorul director $\overline{a} = \{m, n, p\}$ al dreptei $l$ şi vectorul normal $\overline{n} = \{A, B, C\}$ al planului $\alpha$ în punctul $M_1$ de intersecţie a dreptei $l$ cu planul $\alpha$. Fie $\varphi = (\widehat{l, \alpha})$, $\varphi$ - unghi ascuţit. Atunci $(\widehat{\overline{n}, \overline{a}}) = \frac{\pi}{2} \mp \varphi$, $\cos(\widehat{\overline{n}, \overline{a}}) = \cos(\frac{\pi}{2} \mp \varphi) = \pm \sin\varphi$. Prin urmare,

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\overline{n}, \overline{a}})| = \left|\frac{\overline{n}\,\overline{a}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{a}|}\right| =$$
$$= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (13.14)$$

(13.14) este *formula pentru determinarea unghiului $\varphi$ dintre dreapta $l$ şi planul $\alpha$.*

Din (13.14) rezultă (fig. 13.16): $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \overline{n} \perp \overline{a} \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin\varphi = 0$ sau

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{13.15}$$

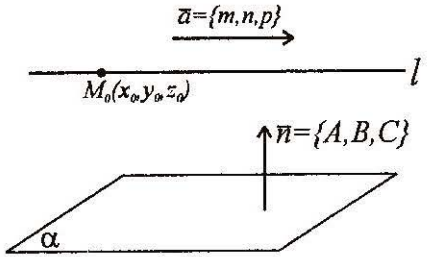



Fig. 13.16

(13.15) este *condiţia necesară şi suficientă de paralelism a unei drepte $l$ cu un plan $\alpha$* în spaţiu.

Perpendicularitatea dreptei $l$ pe planul $\alpha$ înseamnă coliniaritatea vectorului director $\overline{a}$ al dreptei $l$ şi a vectorului normal $\overline{n}$ al planului $\alpha$ (fig. 13.17). De aceea $l \perp \alpha \Leftrightarrow \overline{n} \parallel \overline{a}$, care este o relaţie echivalentă cu egalităţile

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{13.16}$$

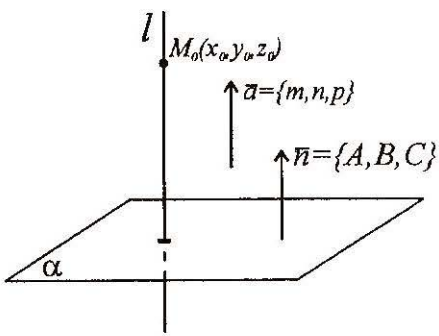



Fig. 13.17

(13.16) sunt *condiţiile necesare şi suficiente de perpendicularitate a unei drepte $l$ pe un plan $\alpha$.*

Exemplul 1. Să se afle unghiul dintre dreapta $l$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$ şi planul $\alpha$: $2x + 2z - 3 = 0$.

Avem $\overline{a} = \{2, -2, 1\}$, $\overline{a} \parallel l$ şi $\overline{n} = \{2, 0, 2\}$, $\overline{n} \perp \alpha$. Fie $\varphi = (\widehat{l, \alpha})$. Aplicând formula (13.14), rezultă $\sin\varphi = |\cos(\widehat{\overline{n}, \overline{a}})| = \left|\dfrac{\overline{n} \cdot \overline{a}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{a}|}\right| =$

$$= \frac{|2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Răspuns: $\varphi = (\widehat{l, \alpha}) = 45°$.

Exemplul 2. Să se determine poziţia relativă a fiecăreia dintre dreptele: $l_1$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{5}$, $l_2$: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$ faţă de planul $\alpha$: $2x + 2y - 2z + 5 = 0$.

Pentru dreapta $l_1$ şi planul $\alpha$ este satisfăcută relaţia (13.15): $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 = 0$. Prin urmare, $l_1 \parallel \alpha$.

Pentru dreapta $l_2$ şi planul $\alpha$ avem relaţiile (13.16): $\dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1}$. Prin urmare, $l_2 \perp \alpha$.

## 13.5. Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu. Aria unui triunghi

### 13.5.1. Lungimea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă în spaţiu

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct în spaţiu şi $l$ o dreaptă definită prin ecuaţiile ei canonice:

$$l: \quad \frac{x - x'}{m} = \frac{y - y'}{n} = \frac{z - z'}{p}. \tag{13.1}$$

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ proiecţia ortogonală a punctului $M_0$ pe dreapta $l$ (fig. 13.18).

Lungimea $|\overline{M_1 M_0}|$ a perpendicularei dusă din punctul $M_0$ pe dreapta $l$ se numeşte *distanţa de la punctul $M_0$ la dreapta $l$* şi vom nota-o cu $d$. Această distanţă $d$ se poate calcula în modul următor.

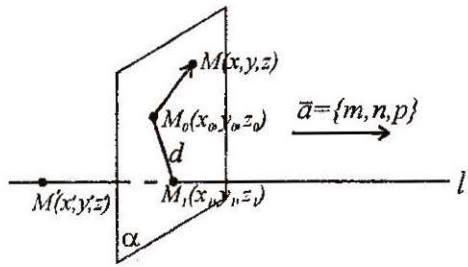



Fig. 13.18

Dreapta $l$, evident, trece prin punctul $M'(x', y', z')$ şi are vectorul director $\overline{a} = \{m, n, p\}$. Compunem ecuaţia planului $\alpha$ ce trece prin punctul $M_0$ şi are vectorul normal $\overline{a} = \{m, n, p\}$. Pentru aceasta considerăm un punct arbitrar $M(x, y, z)$, care după presupunere aparţine planului $\alpha$. Atunci avem $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ şi $\overline{a} \perp \overline{M_0M}$. Scriind condiţia de perpendicularitate a acestor vectori, obţinem ecuaţia planului $\alpha$ care trece prin punctul $M_0$ şi este perpendicular pe dreapta dată $l$:

$$\alpha: \; m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0. \tag{13.2}$$

Având ecuaţiile (13.1) ale dreptei $l$ şi ecuaţia (13.2) a planului $\alpha$, aflăm punctul de intersecţie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ a dreptei $l$ cu planul $\alpha$ (conform p. 13.4.2). După aceasta aflăm distanţa căutată

$$d = |\overline{M_1M_0}| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

### 13.5.2 Aria unui triunghi în spaţiu

Fie dat triunghiul cu vârfurile $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (fig. 13.19). Vom afla aria $S$ a acestui triunghi.

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ poate fi determinată în modul următor. Scriem ecuaţiile canonice ale dreptei $l$ ce trece prin punctele $M_1$ şi $M_2$:

$$l: \; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Apoi aflăm lungimea bazei $|\overline{M_1M_2}|$ a acestui triunghi:

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

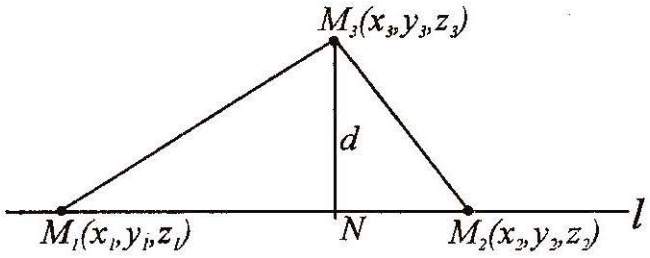



Fig. 13.19

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Atunci aria triunghiului dat este $S = S_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}|\overline{M_1M_2}| \cdot d.$

E x e m p l u. Să se afle aria triunghiului cu vârfurile $M_1(1,-1,0)$, $M_2(-1,2,1)$ şi $M_3(0,1,3)$.

Scriem ecuaţiile canonice ala dreptei $l$ ce trece prin punctele $M_1$ şi $M_2$ (fig. 13.20):

$$l: \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \quad (=t). \tag{13.3}$$

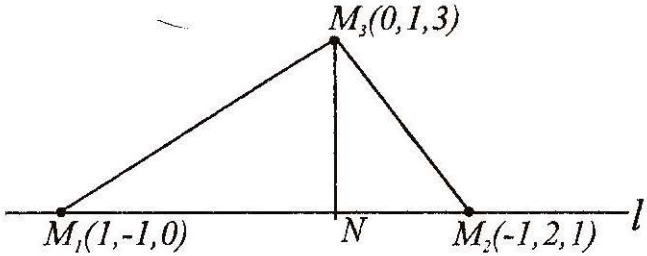



Fig. 13.20

Vectorul director al acestei drepte este $\overline{a} = \overline{M_1M_2} = \{-2,3,1\}$. Compunem ecuaţia planului $\alpha$ ce trece prin $M_3(0,1,3)$ şi are vectorul normal $\overline{a} = \{-2,3,1\}$. Obţinem: $-2(x-0)+3(y-1)+1(z-3)=0$, sau

$$\alpha: \quad 2x-3y-z+6=0. \tag{13.4}$$

Egalând ecuaţiile canonice (13.3) ale dreptei $l$ cu un parametru $t$, găsim ecuaţiile parametrice ale acestei drepte:

$$x = -2t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = t. \tag{13.5}$$

Substituind (13.5) în (13.4), rezultă $t = 11/14$. Substituind valoarea găsită $t = 11/14$ în (13.5), obţinem valorile

$$x_1 = -4/7, \; y_1 = 19/14, \; z_1 = 11/14,$$

adică punctul de intersecţie $N(-4/7, 19/14, 11/14)$ a dreptei $l$ cu planul $\alpha$, determinate de ecuaţiile lor (13.3) şi (13.4), respectiv. Acum aflăm lungimea

$$d = |\overline{NM_3}| = \sqrt{(0+\frac{4}{7})^2 + (1-\frac{19}{14})^2 + (3-\frac{11}{14})^2} = \sqrt{\frac{64+25+961}{14^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1050}{14^2}} = \frac{5\sqrt{42}}{14} \text{ şi } |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}. \text{ Deci aria}$$

triunghiului este $S_{\triangle M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}|\overline{M_1M_2}| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \frac{5\sqrt{42}}{14} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ (un. p.).

## 13.6. Distanţa dintre două drepte necoplanare

Fie două drepte necoplanare în spaţiu:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{şi}$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

cu vectorii directori $\overline{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ şi $\overline{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$, respectiv.

Se numeşte *distanţa $d$ dintre două drepte necoplanare* $l_1$ şi $l_2$ lungimea segmentului perpendicularei comune care întâlneşte ambele drepte.

Avem, respectiv, două puncte fixe pe aceste drepte: $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2$. Prin punctul $M_1$ construim planul $\alpha$ ce conţine vectorii $\overline{a}_1$ şi $\overline{a}_2$. Atunci $l_1 \in \alpha$ şi $l_2 \parallel \alpha$. Ecuaţia planului $\alpha$ o putem compune ca ecuaţia planului ce trece prin punctul dat şi este paralel cu doi vectori daţi. Obţinem $Ax + By + Cz + D = 0$

– ecuaţia planului considerat $\alpha$. Distanţa oricărui punct al dreptei $l_2$ până la planul $\alpha$ este una şi aceeaşi şi este egală cu $d$ (fig. 13.21). Aflăm acum distanţa de la punctul $M_2(x_2, y_2, z_2)$ până la planul $\alpha$ conform formulei (13.3) din p. 13.2.

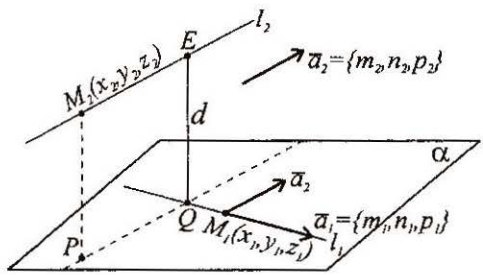



Fig. 13.21

Aceasta va fi distanţa căutată $d$ dintre dreptele necoplanare $l_1$ şi $l_2$: $d = |\overline{M_2P}| = \dfrac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Exemplu. Să se determine distanţa $d$ dintre dreptele

$$l_1: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{şi}$$

$$l_2: \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

Avem $\bar{a}_1 = \{1, 2, -1\}$, $\bar{a}_1 \parallel l_1$; $\bar{a}_2 = \{-1, 3, 2\}$, $\bar{a}_2 \parallel l_2$; $M_1(1, 3, -1) \in l_1$, $M_2(0, -1, 1) \in l_2$. Considerăm planul $\alpha$ ce trece prin punctul $M_1$ şi conţine vectorii $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ (fig. 13.21). Vectorul normal al planului $\alpha$ va fi

$$\bar{n} = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{7, -1, 5\}.$$

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului $\alpha$. Atunci vectorii $\bar{n} = \{7, -1, 5\}$ şi $\overline{M_1M} = \{x - 1, y - 3, z + 1\}$ sunt perpendiculari. Avem $\bar{n} \perp \overline{M_1M} \Leftrightarrow 7(x - 1) - 1(y - 3) + 5(z + 1) = 0$, sau $7x - y + 5z + 1 = 0$ – ecuaţia generală a planului $\alpha$. Aflăm acum distanţa de la punctul $M_2(0, -1, 1) \in l_2$ până la acest plan $\alpha$. Obţinem $d = \dfrac{|7 \cdot 0 + (-1)(-1) + 5 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \dfrac{7}{5\sqrt{3}}$ – distanţa căutată dintre dreptele necoplanare $l_1$ şi $l_2$.

## Exerciţii

1. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin punctul $A(2,1,3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\overline{OA}$ şi să se construiască acest plan ($O$ - originea de coordonate).
2. Să se construiască planele: $2x+3y+z-6=0$; $x+2y-4=0$; $2x-3=0$; $x-z=1$; $x+z=0$.
3. Să se găsească ecuaţia planului ce trece prin punctul $A(3,2,-4)$ şi este paralel cu planul $x+y-\sqrt{2}z+1=0$.
4. Să se compună ecuaţia planului ce trece prin punctul $A(1,3,2)$ şi este perpendicular pe planele $x+y-2z+1=0$, $2x-y+z=0$.
5. Să se găsească distanţa de la originea de coordonate la planul care trece prin punctele $M_0(-1,2,3)$, $M_1(2,-1,1)$, $M_2(0,5,-2)$.
6. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin punctul $A(3,1,-5)$ şi este perpendiculară pe planul $x-3y+z-2=0$.
7. Să se găsească punctul de intersecţie a dreptei ce trece prin punctele $A(1,1,2)$ şi $B(0,2,0)$ cu planul $x+y+z-3=0$.
8. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei definite prin ecuaţiile generale
$$\begin{aligned} 2x-3y+z-1 &= 0, \\ x-y+z-3 &= 0. \end{aligned}$$
9. Să se determine poziţia relativă a dreptei $l$ şi a planului $\alpha$. Dacă dreapta şi planul se intersectează, atunci să se găsească punctul de intersecţie şi unghiul dintre dreaptă şi plan:
   a) $l$: $x=y=2z$; $\alpha$: $2x+2y+z-5=0$;
   b) $l$: $x=t$, $y=2+t$, $z=3t$; $\alpha$: $x+2y-z+1=0$;
   c) $l$: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{1}$; $\alpha$: $x-2y+z-1=0$.
10. Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(1,2,-3)$, $B(-4,3,1)$ şi $C(-2,-1,3)$.
11. Să se găsească distanţa dintre dreptele $l_1$ şi $l_2$:
   a) $l_1$: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{1}$; $l_2$: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-5}{1}$;
   b) $l_1$: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$; $l_2$: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$.

CAPITOLUL 14

# Mulțimi convexe

## 14.1. Mulțimi de puncte în spațiul $n$-dimensional $R^n$

### 14.1.1. Mulțimi de puncte. Definiție

Se numește *mulțime de puncte* orice mulțime ale cărei elemente sunt puncte $M(x_1,x_2,...,x_n)$ din spațiul $n$-dimensional real $R^n$. Ca exemple de mulțimi de puncte în plan pot servi punctele unui cerc (sau cercul), punctele unei drepte (sau dreapta), semidreapta, segmentul, unghiul, triunghiul, poligonul, sectorul de cerc etc.; în spațiul $R^3$ - sfera, prisma, paralelipipedul, piramida, conul etc.

In spațiul $R^n$ poate fi. considerată, de exemplu, mulțimea $H$ a tuturor punctelor $M(x_1,x_2,...,x_n) \in R^n$ coordonatele cărora satisfac ecuația

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

unde coeficienții $a_1, a_2, \ldots, \alpha_n$ sunt nu toți egali cu zero. Aceasta mulțime de puncte $H$ se numește *hiperplan* al spațiului $R^n$ (a se vedea în continuare p. 14.3).

### 14.1.2. Noțiunea de vecinătate a unui punct. Definiție

Fie MO un punct din spațiul $R^n$ și r un număr pozitiv. Mulțimea formată din toate acele puncte $M \in R^n$ pentru care se verifică inegalitatea $\rho(M_0,,M) < r$, unde $\rho(M_0,,M)$ este distanța dintre $M_0$ și M, se numește *vecinătate* de rază r, sau *r-vecinătate,* a punctului Mo în spațiul $R^n$. Această mulțime vom nota-o $S_r(Mo)$.

Deci

$$S_r(M_0) = \{M \in \mathbf{R}^n | \rho(M_0, M) < r\}.$$

Exemple.

1. Dacă $M_0(1,-1,2,1)$, atunci $M_1(2,1,3,2) \in S_3(M_0)$, deoarece $\rho(M_0, M_1) = \sqrt{7} < 3$, iar $M_2(1,2,3,4) \notin S_3$, fiindcă $\rho(M_0, M_2) = \sqrt{19} > 3$.

2. În spaţiul $\mathbf{R}^1$ $r$-vecinătatea punctului $M_0(a)$ este intervalul $(a-r, a+r)$.

3. În spaţiul $\mathbf{R}^2$ $r$-vecinătatea punctului $M_0(a,b)$ este interiorul cercului cu centrul $M_0(a,b)$ şi de rază $r$.

4. În spaţiul $\mathbf{R}^3$ $r$-vecinătatea punctului $M_0(a,b,c)$ este interiorul sferei cu centrul $M_0(a,b,c)$ şi de rază $r$.

### 14.1.3. Mulţimi mărginite. Definiţie

O mulţime $V$ de puncte din spaţiul $\mathbf{R}^n$ se numeşte *mărginită* dacă există un număr $A > 0$, astfel încât pentru orice punct $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$ sunt satisfăcute următoarele relaţii:

$$|x_1| \leq A, \ |x_2| \leq A, \ \ldots, \ |x_n| \leq A.$$

În caz contrar, se spune că mulţimea este *nemărginită*.

Exemple.

1. Mulţimea $V$ de puncte $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pentru care se satisfac inegalităţile $|x_1| \leq A_1$, $|x_2| \leq A_2$, $\ldots$, $|x_n| \leq A_n$, unde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – numere constante pozitive oarecare, totdeauna este mărginită.

2. $r$-vecinătatea oricărui punct în spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ totdeauna este o mulţime mărginită.

## 14.2. Mulţimi închise şi deschise în spaţiul $\mathbf{R}^n$

### 14.2.1. Puncte interioare şi de frontieră ale unei mulţimi din spaţiul $\mathbf{R}^n$

Considerăm o mulţime $V$ de puncte oarecare din spaţiul $\mathbf{R}^n$ (în particular din spaţiile $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ sau $\mathbf{R}^3$).

Un punct $M \in \mathbf{R}^n$ se numeşte *punct interior* al mulţimii $V \subset \mathbf{R}^n$ dacă el aparţine acestei mulţimi împreună cu o vecinătate ($r$-vecinătate) oarecare a sa (fig. 14.1).

Un punct $N \in \mathbf{R}^n$ se numeşte *punct de frontieră* al mulţimii $V \subset \mathbf{R}^n$ dacă în orice vecinătate a sa sunt atât puncte care aparţin mulţimii $V$, cât şi puncte ce nu aparţin acestei mulţimi (fig. 14.1). Însuşi punctul $N$ nu numaidecât aparţine mulţimii $V$.

Mulţimea $L$ a tuturor punctelor de frontieră ale mulţimii $V$ se numeşte *frontiera* lui $V$.

Exemple.

1. Dacă $V = [a, b]$ în spaţiul $\mathbf{R}^1$, atunci toate punctele intervalului $(a, b)$ sunt puncte interioare ale mulţimii $V$, iar frontiera acestei mulţimi constă din două puncte: $a$ şi $b$.

2. Dacă $V = \{M(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, atunci toate punctele acestei mulţimi sunt interioare, iar frontiera ei coincide cu cercul $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 14.2).

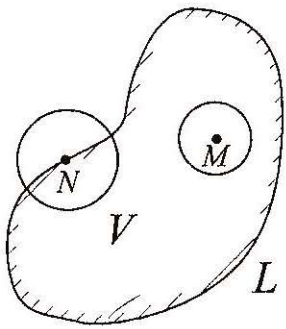



Fig. 14.1

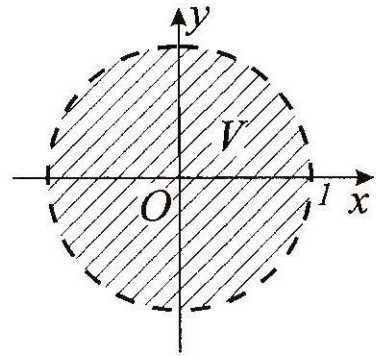



Fig. 14.2

### 14.2.2. Noţiunea de mulţime deschisă şi închisă. Definiţie

O mulţime $V$ de puncte din $\mathbf{R}^n$ se numeşte *mulţime deschisă* dacă ea constă numai din puncte interioare.

În $\mathbf{R}^n$ mulţimea $V' = V \cup L$ formată din reuniunea mulţimii $V$ cu frontiera sa $L$ se numeşte *mulţime închisă*.

Exemple.

1) $[a,b]$ – mulţime închisă în $\mathbf{R}^1$;

2) $(a,b)$ – mulţime deschisă în $\mathbf{R}^1$;

3) interiorul $V = \{M(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ al cercului cu centrul în $O(0,0)$ şi de rază 1 (fig. 14.2) este o mulţime deschisă în $\mathbf{R}^2$, frontiera ei – cercul $x^2 + y^2 = 1$; discul sau reuniunea interiorului cercului cu acest cerc, adică totalitatea punctelor $\{M(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e o mulţime închisă în $\mathbf{R}^2$.

## 14.3. Dreapta şi hiperplanul în $\mathbf{R}^n$

Vom spune că vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt *paraleli* dacă unghiul dintre ei este egal cu 0 sau $\pi$.

Fie $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ doi vectori paraleli în $\mathbf{R}^n$. Atunci, ca şi în cazul spaţiului $\mathbf{R}^3$, se poate arăta că în $\mathbf{R}^n$ are loc relaţia

$$(\overline{a} \parallel \overline{b}) \Leftrightarrow ((\exists \lambda \in \mathbf{R}) : \overline{b} = \lambda \overline{a}).$$

De aici rezultă $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$, sau

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n. \tag{14.1}$$

Aşadar, doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ în $\mathbf{R}^n$ sunt paraleli atunci şi numai atunci când coordonatele lor corespunzătoare sunt proporţionale.

Fie $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un vector în $\mathbf{R}^n$, iar $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – un punct fix în spaţiul afin corespunzător $\mathbf{R}^n$. Pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$, vectorul $t\overline{a}$ este paralel cu $\overline{a}$. Atunci pentru punctul $M_0$ se va găsi unicul punct $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, astfel încât $\overline{M_0M} = t\overline{a}$. Această relaţie se numeşte *ecuaţia parametrică vectorială a dreptei în spaţiul* $\mathbf{R}^n$, care în coordonate se va scrie în modul următor

$$\begin{cases} x_1 - x_1^0 = ta_1, \\ x_2 - x_2^0 = ta_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \ldots \\ x_n - x_n^0 = ta_n, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{14.2}$$

Excluzând parametrul $t$ din ecuaţiile (14.2), obţinem ecuaţiile care se numesc *ecuaţiile canonice ale dreptei în spaţiul* $\mathbf{R}^n$:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}. \tag{14.3}$$

Această dreaptă în $\mathbf{R}^n$ trece prin punctul fix $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ şi este paralelă cu vectorul $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – punctul arbitrar al acestei drepte cu coordonatele curente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ce satisfac ecuaţiile (14.3).

Mulţimea $H$ a tuturor vectorilor care au punctul de aplicaţie în punctul fix $M_0$ şi sunt ortogonali vectorului dat $\overline{a}$ se numeşte *hiperplan* în spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ (plan în cazul $n = 3$).

Să deducem ecuaţia hiperplanului.

Fie $\overline{b}$ un vector arbitrar, ortogonal vectorului dat $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Atunci pentru punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ există unicul punct $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, astfel încât $\overline{M_0M} = \overline{b}$. Din condiţia ortogonalităţii vectorilor avem $\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow (\overline{a}, \overline{M_0M}) = 0$. Ţinând seama de formula $\overline{M_0M} = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0)$, scriem egalitatea indicată (produsul scalar) în coordonate. Obţinem

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0$$

sau

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{14.4}$$

unde $b = a_1x_1^0 + \ldots + a_nx_n^0$.

Ecuaţia (14.4) şi este *ecuaţia* căutată a *hiperplanului* $H$.

Pentru $n = 3$, ecuaţia hiperplanului (14.4) reprezintă ecuaţia planului obişnuit $a_1x + a_2y + a_3z = b$, perpendicular pe vectorul $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Definiţia dată mai sus a hiperplanului este echivalentă următoarei.

**Definiţie.** Mulţimea tuturor punctelor $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ coordonatele cărora satisfac ecuaţia liniară (14.4) ($a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – constante), unde coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu toţi sunt egali cu zero, se numeşte *hiperplan* al spaţiului $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$.

Pentru $n = 3$, adică în cazul spaţiului $\mathbf{R}^3$, hiperplanul acestui spaţiu este un *plan* obişnuit. În plan (spaţiul $\mathbf{R}^2$) această mulţime este o *dreaptă*.

Considerând un vector $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi un vector arbitrar $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ coordonatele cărora satisfac ecuaţia (14.4), această ecuaţie se poate transcrie cu ajutorul produsului scalar sub forma

$$\overline{a} \cdot \overline{x} = b. \tag{14.5}$$

Vectorul $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se numeşte *vectorul normal* al hiperplanului (14.4).

Hiperplanul (14.5) separă spaţiul $\mathbf{R}^n = \mathrm{E}^n$ în două *semispaţii* închise:

$$\overline{a} \cdot \overline{x} \leq b \quad (\mathrm{E}^-), \qquad \overline{\mathrm{a}} \cdot \overline{\mathrm{x}} \geq \mathrm{b} \quad (\mathrm{E}^+).$$

Elementele spaţiului $\mathrm{E}^n$ pot fi considerate ca vectori aritmetici $n$-dimensionali sau ca puncte aritmetice $n$-dimensionale. Punctele hiperplanului $\overline{a} \cdot \overline{x} = b$ se adaugă la ambele semispaţii $\mathrm{E}^-$ şi $\mathrm{E}^+$. Acest hiperplan este *frontiera lor comună.*

Dacă termenul liber $b \neq 0$, atunci semispaţiile $\mathrm{E}^-$ şi $\mathrm{E}^+$ pot fi distinse în modul următor: 1) dacă $b > 0$, atunci $\mathrm{E}^-$ conţine originea de coordonate $O(0, 0, \ldots, 0)$, iar $\mathrm{E}^+$ nu conţine $O$; 2) pentru $b < 0$ – invers.

În plan (spaţiul $\mathbf{R}^2$) semispaţiile sale se numesc *semiplane.*

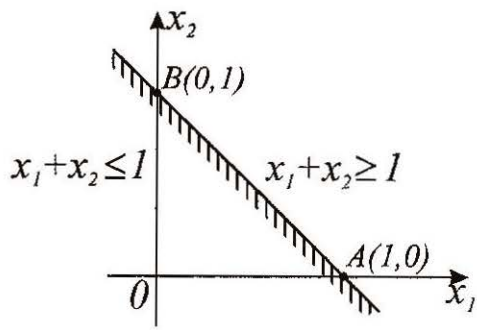



Fig. 14.3

E x e m p l u. Dreapta $x_1 + x_2 = 1$ separă planul $Ox_1x_2$ în două semiplane: $x_1 + x_2 \leq 1$ şi $x_1 + x_2 \geq 1$ (fig. 14.3).

## 14.4. Mulţimi convexe în spaţiul $\mathbf{R}^n$

### 14.4.1. Definiţia segmentului în $\mathbf{R}^n$

Considerăm mai întâi două puncte oarecare $M$ şi $N$ din spaţiul $\mathbf{R}^3$. Pentru orice $t \in \mathbf{R}$ există un singur punct $P$, astfel încât vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MP} = t\overline{MN}$, evident, sunt coliniari (paraleli). În spaţiul $\mathbf{R}^3$ mulţimea tuturor acestor puncte $P$, pentru care $0 \leq t \leq 1$, ocupă

complet segmentul $[MN]$ (fig. 14.4). Avem $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$, $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} = \overline{OM} + t\overline{MN} = \overline{OM} + t(\overline{ON} - \overline{OM})$ sau

$$\overline{OP} = (1-t)\overline{OM} + t\overline{ON}, \tag{14.1}$$

unde $0 \leq t \leq 1$, $t$ – parametru, $O$ – originea de coordonate.

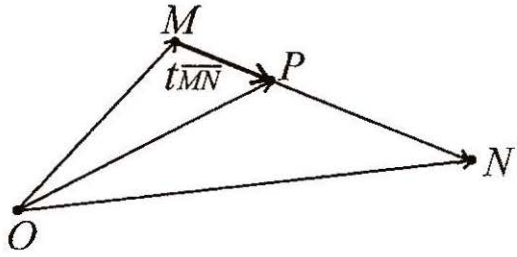



Fig. 14.4

Relaţia (14.1) pe deplin determină mulţimea punctelor $P$ ale segmentului $[MN]$ în $\mathbf{R}^3$ şi deci poate fi admisă ca definiţie a acestui segment. Generalizând această noţiune în $\mathbf{R}^n$, introducem următoarea

**Definiţie.** Dacă $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt două puncte din spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$, atunci în $\mathbf{R}^n$ se numeşte *segment cu extremităţile $M$ şi $N$* mulţimea $[MN]$ a tuturor punctelor $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ care satisfac egalitatea (14.1).

Având în vedere că punctul şi raza-vectoare a sa au aceleaşi coordonate, definiţia segmentului $[MN]$ în $\mathbf{R}^n$ o putem scrie astfel:

$$[MN] = \{P | P = (1-t)M + tN, 0 \leq t \leq 1\}. \tag{14.2}$$

Dacă punctele le notăm, respectiv, cu aceleaşi litere mici ca şi razele-vectoare, atunci această definiţie mai poate fi formulată şi astfel.

Se numeşte *segmentul $[\overline{x}, \overline{y}]$ ce uneşte punctele (vectorii) $\overline{x}$ şi $\overline{y}$* în spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$, mulţimea punctelor (vectorilor) de forma

$$\overline{z} = \overline{x} + t(\overline{y} - \overline{x}) = (1-t)\overline{x} + t\overline{y}. \tag{14.3}$$

unde $0 \leq t \leq 1$ (fig. 14.5), sau, substituind $1 - t = \lambda$,

$$\overline{z} = \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{y} \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \tag{14.4}$$

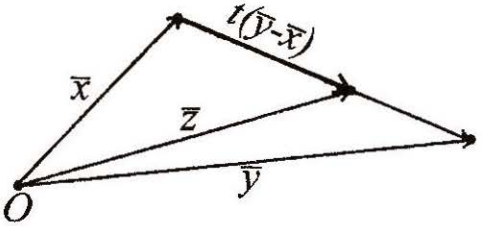



Fig. 14.5

Pentru $t = 0$, $\overline{z} = \overline{x}$, pentru $t = 1$, $\overline{z} = \overline{y}$, adică se obţin extremităţile segmentului, iar pentru $0 < t < 1$ – punctele interioare ale sale. Observăm că punctul $\overline{x}$ poate fi considerat ca segmentul $[\overline{x}, \overline{x}]$ cu extremităţile coincise.

Fiecare dintre ecuaţiile vectoriale (14.1)–(14.4) ce defineşte segmentul (notat respectiv cu $[MN]$ sau $[\overline{x}, \overline{y}]$) poate fi scrisă prin coordonate sub forma:

$$z_1 = (1-t)x_1 + ty_1, \quad z_2 = (1-t)x_2 + ty_2, \ \ldots,$$
$$z_n = (1-t)x_n + ty_n, \tag{14.5}$$

pentru $0 \leq t \leq 1$, $t$ – parametru.

Ecuaţiile (14.5) se numesc *ecuaţiile parametrice* ale segmentului $[MN]$ care uneşte punctele $M$ şi $N$ în $\mathbf{R}^n$.

Exemplu. Se dau punctele $M(1,-1,2,0)$ şi $N(3,7,0,4)$. Punctul $P(2,3,1,2) \in [MN]$, deoarece $2 = (1-t) + 3t$, $3 = -(1-t) + 7t$, $1 = 2(1-t) + 0 \cdot t$, $2 = 0 \cdot (1-t) + 4t$ pentru $t = 0,5$.

### 14.4.2. Noţiunea de mulţime convexă. Definiţie

O mulţime $G$ de puncte din $\mathbf{R}^n$ se numeşte *mulţime convexă* dacă împreună cu orice două puncte ale acestei mulţimi ei îi aparţine şi segmentul în întregime ce uneşte aceste două puncte, adică care are proprietatea

$$M, N \in G \Rightarrow [MN] \subset G.$$

În fig. 14.6 este reprezentată o mulţime convexă în $\mathbf{R}^2$, iar în fig. 14.7 – o mulţime care nu este convexă.

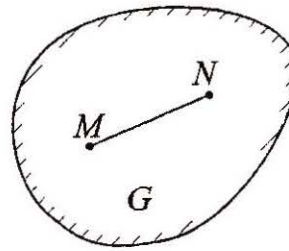



Fig. 14.6

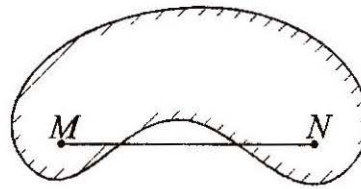



Fig. 14.7

**Exemple.** Următoarele mulţimi sunt mulţimi convexe:

1) spaţiul $\mathbf{R}^n$ în întregime;

2) $\{M(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$;

3) $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\}$;

4) $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b\}$;

5) $r$-vecinătatea oricărui punct $n$-dimensional.

Mulţimea vidă şi mulţimile formate dintr-un singur punct se consideră convexe prin definiţie. O mulţime formată din două puncte nu este convexă.

Ne reamintim că se numeşte *intersecţia* a câtorva mulţimi de puncte totalitatea punctelor care aparţin tuturor acestor mulţimi. Mulţimile convexe posedă o proprietate importantă care se stabileşte de următoarea teoremă.

**Teorema 14.1.** *Intersecţia a oricărui număr de mulţimi convexe de puncte este de asemenea o mulţime convexă.*

▷ Fie că două puncte oarecare $M$ şi $N$ aparţin intersecţiei a câtorva mulţimi convexe de puncte. Aceasta înseamnă că ele aparţin tuturor

acestor mulţimi ce se intersectează. Întrucât toate aceste mulţimi sunt convexe, rezultă că lor la toate, deci şi intersecţiei lor, le aparţin şi toate punctele segmentului $[MN]$, adică $[MN]$ în întregime. Iar aceasta înseamnă că intersecţia mulţimilor date este de asemenea convexă. ◁

Cazuri particulare de mulţimi convexe de puncte în plan (în spaţiul $\mathbf{R}^2$) sunt: suprafeţele poligonale convexe (triunghiul, dreptunghiul, rombul, trapezul, poligonul convex, reunit fiecare în parte cu interiorul său ş.a.), discul, dreapta, segmentul de dreaptă etc. Mulţime convexă de puncte este şi tot planul, şi de asemenea semiplanul limitat de o dreaptă, fapt despre care ne putem convinge imediat geometric. Ca exemple de mulţimi convexe în spaţiul $\mathbf{R}^3$ pot servi: mulţimile poliedrale convexe (prisma regulată, piramida regulată ş.a.), semispaţiul limitat de un plan, însuşi spaţiul etc.

**T e o r e m a 14.2.** *Orice semispaţiu în* $\mathbf{R}^n$ *este o mulţime convexă.*

▷ Într-adevăr, fie că frontiera unui semispaţiu oarecare E este hiperplanul

$$\overline{a} \cdot \overline{x} = b,$$

iar însuşi acest semispaţiu se determină prin inecuaţia

$$\overline{a} \cdot \overline{x} \leq b. \tag{14.6}$$

Fie că $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt două puncte arbitrare care aparţin mulţimii E, adică

$$\overline{a} \cdot \overline{OM} \leq b, \quad \overline{a} \cdot \overline{ON} \leq b. \tag{14.7}$$

Examinăm segmentul $[MN] = \{P \in \mathbf{R}^n \mid \overline{OP} = (1-t)\overline{OM} + t\overline{ON}$ pentru $0 \leq t \leq 1\}$. Utilizând proprietăţile produsului scalar, în baza inegalităţilor (14.7), avem

$$\overline{a} \cdot \overline{OP} = \overline{a} \cdot [(1-t)\overline{OM} + t\overline{ON}] = (1-t)(\overline{a} \cdot \overline{OM}) + t(\overline{a} \cdot \overline{ON}) \leq$$

$$\leq (1-t)b + tb = b,$$

adică

$$\overline{a} \cdot \overline{OP} \leq b.$$

În felul acesta, pentru orice punct $P \in [MN]$, unde $M, N \in$ E, vectorul $\overline{OP}$ satisface inegalitatea (14.6), ceea ce înseamnă $[MN] \subset$ E. Prin urmare, semispaţiul E este convex. ◁

C o n s e c i n ţ ă. Intersecţia a oricărui număr de semispaţii din $\mathbf{R}^n$ este o mulţime convexă (posibil vidă).

▷ Rezultă din teoremele 14.1 şi 14.2. ◁

## 14.5. Puncte extreme ale mulţimilor convexe în $\mathbf{R}^n$

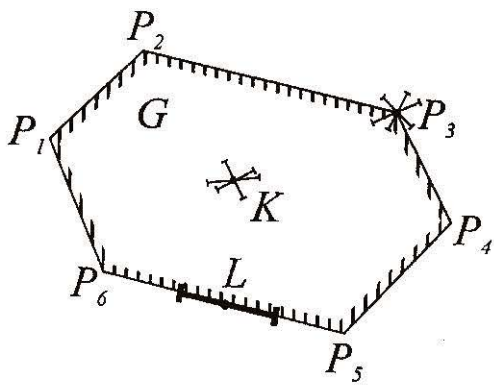



Fig. 14.8

Prin orice punct interior $K$ al unei mulţimi convexe închise $G$ se poate duce un segment pentru care punctul dat este mijlocul acestui segment, iar extremităţile lui sunt situate în $G$ (fig. 14.8). Pentru punctul de frontieră $L$, dacă frontiera este o linie dreaptă sau o parte a ei, de obicei, se poate construi un astfel de segment (fig. 14.8).

Însă sunt aşa puncte de frontieră (pentru suprafaţa poligonală convexă – vârfurile ei), pentru care construcţia indicată este imposibilă: nu există nici un segment pentru care vârful ar fi mijlocul acestui segment, iar extremităţile lui ar aparţine suprafeţei poligonale convexe date (punctul $P_3$ în fig. 14.8). Pentru segmentul $[P_1P_2]$ această proprietate o posedă extremităţile lui $P_1$ şi $P_2$, pentru punctele discului – toate punctele cercului, adică ale frontierei sale (fig. 14.9).

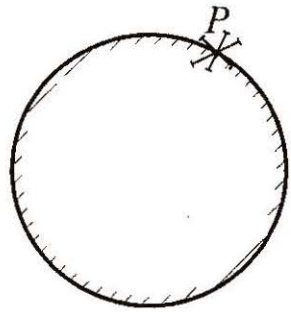



Fig. 14.9

**Definiţie.** Un punct $P$ al unei mulţimi convexe $G$ în spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ se numeşte *punct extrem* (sau *vârf*) al acestei mulţimi dacă acest punct nu poate fi mijlocul nici al unui segment, extremităţile căruia ar aparţine mulţimii $G$, adică dacă nu există aşa puncte $M_1, M_2 \in G$, $M_1 \neq M_2$, încât

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OM_1} + \frac{1}{2}\overline{OM_2}.$$

Mulţimile deschise nu au puncte extreme.

E x e m p l u. Mulţimea $G = \{M(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}$ are patru puncte extreme (vârfuri): $P_1(a,0)$, $P_2(a,a)$, $P_3(0,a)$, $O(0,0)$ (fig. 14.10).

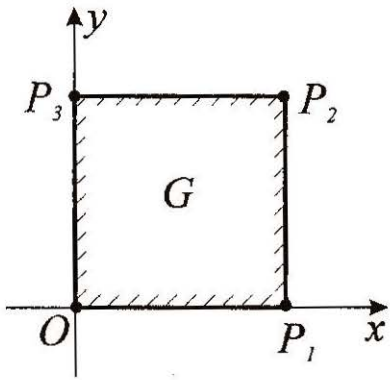



Fig. 14.10

Pentru suprafața poligonală convexă, puncte extreme sunt toate vârfurile ei, pentru segment - extremitățile lui. Pentru semidisc, puncte extreme sunt toate punctele semicercului care îl mărginesc. In genere, orice porțiune de frontieră a unei mulțimi convexe închise care nu este o linie dreaptă sau o parte a ei și nu le conține pe acestea constă numai din puncte extreme, adică constituie o mulțime infinită de puncte extreme. Dintre mulțimile convexe închise din plan un număr finit de puncte extreme pot avea numai acele mulțimi care pot fi reprezentate ca intersecția unui număr finit de semiplane închise, adică mulțimile convexe ale căror frontiere sunt formate exclusiv din drepte, semidrepte sau segmente de dreaptă (de exemplu fig. 14.8 și fig. 14.11). In spațiu o mulțime convexă închisă de puncte care poate fi reprezentată ca intersecția unui număr finit de semispații închise se numește *mulțime poliedrică convexă.* Dacă această mulțime este mărginită, atunci de regulă ea formează un corp geometric limitat de fețe plane (situat în întregime de aceeași parte a planului fiecăreia dintre fețele sale), care se numește *poliedru convex.* Poliedrul convex are un număr finit de puncte extreme (vârfuri).

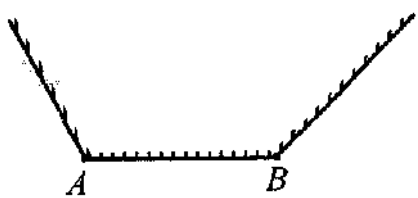



Fig. 14.11

Noțiunea *"poliedru convex"* este extinsa pentru orice spațiu $R^n$, semnificând în genere orice mulțime convexă închisă care are un număr finit, de puncte extreme (vârfuri). Astfel, în $R^2$ ca "poliedre convexe" sunt considerate atât suprafața poligonală cu frontieră: triunghi, romb, trapez etc, cât și punctul, semidreapta, unghiul (au câte un singur punct extrem), segmentul (are două puncte extreme), dreapta, semiplanul, o porțiune de plan cuprinsă între două drepte paralele, inclusiv aceste drepte (nu au puncte extreme) ș.a. In spațiul de trei dimensiuni poliedre convexe sunt: tetraedrul, cubul, prisma triunghiulară, paralelipipedul etc, în spațiul $n$-dimensional $R^n$ - poliedru) convex (care se mai numește și *tronson,* acesta fiind definit ca intersecția unui număr finit de semispații ale lui $R^n$). Un poliedru, convex mărginit

este determinat prin vârfurile sale.

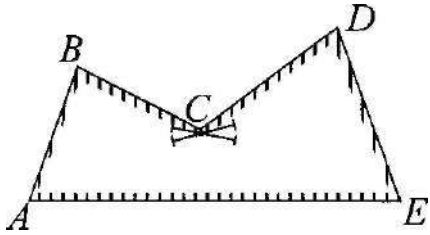



Fig. 14.12

Noțiunea de punct extrem se introduce numai pentru mulțimile convexe. Pentru mulțimile neconvexe această definiție își pierde sensul. De exemplu, în fig. 14.12 punctul *C* este un vârf al poligonului neconvex, iar prin el sunt trasate segmente care în întregime aparțin acestei mulțimi și pentru care *C* este mijlocul lor.

## 14.6. Interpretarea geometrică a soluțiilor admisibile ale unui sistem de ecuații liniare

Fie dat un sistem arbitrar de *m* ecuații liniare cu *n* necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{14,1}$$

unde *a,ij* - coeficienții necunoscutelor, iar *bi* termenii liberi *(i* — $= 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$.

In prealabil, calculând rangul matricei extinse și rangul matricei sistemului în baza teoremei Kronecker-Cappelli (a se vedea p. 7.1, cap. 7), stabilim dacă sistemul este compatibil sau nu. Fie că sistemul s-a dovedit a fi compatibil și rangul ambelor matrice este egal cu *r (r < n)*. Atunci, conform consecinței teoremei 7.1, sistemul inițial se reduce la un sistem liniar echivalent cu el, constituit din $\tau$ ecuații liniar independente cu *n* necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{14.2}$$

Rezolvând acest sistem, de exemplu, prin metoda eliminării complete, obținem *soluția generală* a sa în care $r$ necunoscute, numite *necunoscutele principale {bazice),* se exprima liniar prin celelalte $n - r$ necunoscute, numite *necunoscutele secundare* (vezi p. 2.5, cap. 2).

Soluția particulară care se obține din soluția generală atribuind tuturor necunoscutelor secundare valoarea zero se numește *soluție de bază.*

Oricare $r$ necunoscute ale sistemului de r ecuații cu $n$ necunoscute (r - rangul sistemului) pot servi ca necunoscute bazice dacă determinantul din coeficienții acestor necunoscute este diferit de zero.

Pot fi diverse grupuri de necunoscute bazice ale sistemului, fiecare fiind constituite din r necunoscute. Insă numărul diverselor moduri de alegere a r variabile din numărul lor $n$ este finit. El este egal cu numărul de combinări de $n$ elemente luate câte r, adică $C_n^r$. Variind grupul de necunoscute bazice (numărul acestor grupuri fiind nu mai mare ca $C_n^r$), putem obține succesiv toate soluțiile de bază ale sistemului (conform p. 2.5, cap. 2). Soluțiile particulare în care toate componentele sunt numere nenegative se numesc *soluții admisibile* (sau *posibile),* în caz contrar - *neadmisibile* (p. 2.7, cap. 2). Mulțimea soluțiilor admisibile ale sistemului liniar (14.1) se mai numește și *poliedrul soluțiilor admisibile* ale acestui sistem.

Soluțiile de bază, de asemenea, se împart în admisibile și neadmisibile. Să examinăm mulțimea soluțiilor admisibile ale sistemului liniar (14.1) printr-un exemplu.

Exemplu. Sunt date ecuațiile:

1) $2x_1 + 3x_2 = 6$; 2) $x_1 - x_2 = 1$; 3) $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$.

Examinând fiecare dintre ele ca sistem ce constă dintr-o singura ecuație cu două sau cu trei necunoscute, să se afle: mulțimea soluțiilor admisibile, vârfurile acestei mulțimi, soluțiile de bază; să se stabilească corespondența dintre *soluțiile de bază admisibile* și vârfurile mulțimii soluțiilor admisibile ale sistemului.

1) Considerăm sistemul ce constă numai din prima ecuație. Fiecare soluție a acestei ecuații reprezintă o pereche de numere, iar ge-

ometric - un punct al planului. Mulțimea tuturor soluțiilor ecuației date reprezintă geometric o dreaptă din planul de coordonate $0x_1x_2$ (fig. 14.13).

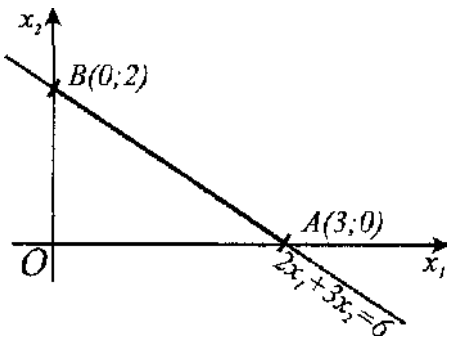



Fig. 14.13

Soluțiilor nenegative ale sistemului liniar dat (ce constă dintr-o singură această ecuație 1)) le corespund punctele segmentului [AB]. Deci mulțimea soluțiilor admisibile ale sistemului liniar 1) reprezintă în $R^2$ o mulțime convexă închisă (segmentul [AB]), care are două puncte extreme (vârfuri) *A* și *B*. Aflăm soluțiile de baza ale acestui sistem. Daca considerăm $x_1$ ca necunoscută, bazică, iar $x_2$ ca necunoscută secundară a sistemului liniar dat și punem în ecuație $x_2 = 0$, obținem $x_1 = 3$.

Astfel s-a găsit soluția de bază (3; 0) a sistemului dat. Dacă în calitate de necunoscută bazica este aleasă $x_2$ , atunci obținem a doua soluție de bază (0; 2). Ambele soluții de bază sunt admisibile, lor le corespund, respectiv, două puncte extreme (vârfuri) ale mulțimii soluțiilor admisibile ale sistemului liniar dat și reciproc. (fig. 14.13).

2) Construim dreapta determinată de ecuația a două (fig. 14.14). Perechile de coordonate ale punctelor acestei drepte servesc, ca soluții ale acestei ecuații. Soluțiilor nenegative (admisibile) ale sistemului (ce constă dintr-o singura această ecuație 2)) le corespund punctele semidreptei *AC,* care în $R^2$ este o mulțime convexă închisă și are un singur punct extrem (vârf) A(1;0). Aflăm soluțiile de bază ale sistemului. Considerând $x_1$ ca necunoscută

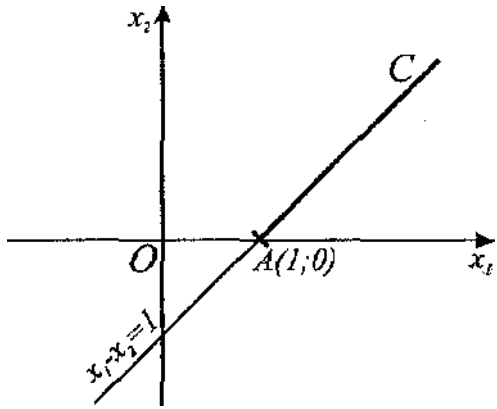



Fig. 14.14

bazică, obținem soluția de bază (1;0). Dacă în calitate de necunoscută bazică admitem $x_2$, atunci găsim a doua soluție de bază (0;-1). Unicul punct extrem (vârf) al mulțimii soluțiilor admisibile ale sistemului liniar dat corespunde unicei soluții de bază admisibile (1;0) a acestui sistem.

3) Mulțimea tuturor soluțiilor $(x_1,x_2,x_3)$ ale ecuației $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ reprezintă geometric mulțimea punctelor planului definit prin această ecuație în sistemul rectangular de coordonate în spațiu $Ox_1x_2x_3$ (fig. 14.15). Acest plan, evident, intersectează axele de coordonate în punctele A(I,O,O), *B(0,*1,0), C(0,0,-2). Soluțiilor nenegative (admisibile) ale sistemului (ce constă doar din această ecuație 3)) le corespund punctele figurii plane nemărginite, delimitată de linia *EABF* (haşurată pe desen), care în $R^3$ este o mulțime convexă închisă și are două vârfuri *A* și *B*. Rezolvând succesiv ecuația dată în raport cu $x_1$, $x_2$, $x_3$, găsim, corespunzător, soluțiile de baza (1,0,0), (0,1,0), (0,0,-2) ale sistemului. Primele două soluții de bază sunt admisibile. Lor le corespund vârfurile *A* și *B* ale mulțimii soluțiilor admisibile ale sistemului (fig. 14.15).

In exemplul dat mulțimile soluțiilor admisibile ale fiecăruia dintre sistemele liniare examinate reprezintă poliedre convexe (corespunzător în $R^2$ sau $R^3$). Intre vârfurile poliedrului soluțiilor admisibile și

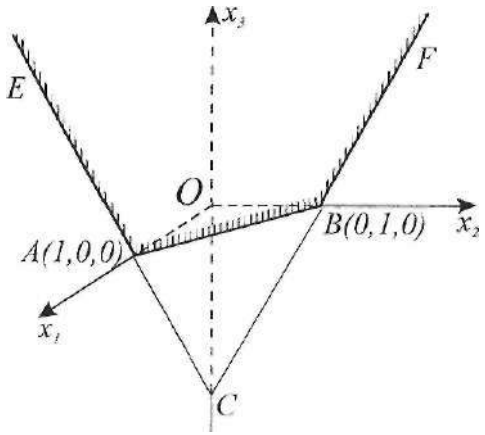



Fig. 1.4,15

soluțiile de bază admisibile ale sistemului liniar considerat există o corespondență bijectivă și de aceea numărul de vârfuri ale poliedrului soluțiilor admisibile coincide cu numărul soluțiilor de bază admisibile ale sistemului. Această legitate poartă un caracter general. Anume, au loc următoarele teoreme.

T e o r e m a 14.3. *Mulțimea soluțiilor admisibile ale unui sistem de ecuații liniare reprezintă un poliedru convex.*

▷ Rezultă din teorema 14.1 și din faptul că în $R^n$ mulțimea soluțiilor admisibile ale sistemului liniar (14.1) reprezintă intersecția a *r* hiperpîane (determinate de ecuațiile acestui sistem) şj *n* semispații $x_j \geq 0$ *(j* = 1,2,.. ·,n) ce sunt mulțimi convexe. ◁

T e o r e m a 14.4. *Exista, o corespondență bijectivă între soluțiile de bază admisibile ale unui sistem, de ecuații liniare și vârfurile poliedrului soluțiilor admisibile ale acestui sistem. Totodată, fiecare vârf al acestui poliedru determină (reprezintă)o soluție de bază admisibilă a sistemului și reciproc.*

Demonstrația acestei teoreme o omitem. Ea poate fi găsita, de exemplu. în [18, II, ρ. 236-238].

## 14.7. Inecuaţii liniare cu două variabile şi sensul lor geometric

### 14.7.1. Despre interpretarea geometrică a unei inecuaţii cu două variabile

La rezolvarea problemelor de programare liniară deseori se aplică metoda grafică de rezolvare a sistemelor de inecuaţii liniare. Să expunem esenţa acestei metode.

Metoda coordonatelor dă posibilitate de a interpreta geometric nu numai ecuaţiile, ci şi inecuaţiile. Pentru aceasta e suficient de a considera variabilele care intră în inecuaţie ca coordonate ale punctelor.

După cum se ştie, interpretarea geometrică a ecuaţiei

$$F(x, y) = 0$$

este o oarecare linie din plan, coordonatele punctelor căreia satisfac această ecuaţie, iar însăşi această ecuaţie se numeşte ecuaţia liniei. În mod analog, mulţimea de puncte ale căror coordonate satisfac una dintre inecuaţiile

$$F(x, y) < 0 \quad \text{sau} \quad F(x, y) > 0$$

este considerată ca interpretarea geometrică a acestei inecuaţii. Se admit pentru studiere, de asemenea, şi inecuaţii de tipul $F(x, y) \leq 0$ sau $F(x, y) \geq 0$. Inecuaţiile de ultimele două tipuri se numesc "nestricte", în caz contrar – "stricte". În cele ce urmează vom examina cazul când expresia $F(x, y)$ este liniară, adică are forma $F(x, y) = Ax + By + C$, unde coeficienţii $A$ şi $B$ nu sunt concomitent egali cu zero, adică $A^2 + B^2 \neq 0$. Ne reamintim că în sistemul rectangular de coordonate în plan dreapta poate fi reprezentată analitic printr-o ecuaţie de gradul întâi şi, reciproc, orice ecuaţie de gradul întâi de forma generală $Ax + By + C = 0$ reprezintă geometric o dreaptă. Coordonatele tuturor punctelor situate pe această dreaptă şi numai ale acestora satisfac ecuaţia considerată.

### 14.7.2. Semiplane

O dreaptă $l$ din plan are proprietatea că separă planul $p$ în două (sau trei) submulţimi. Fie că dreapta $l$ se defineşte prin ecuaţia $Ax + By + C = 0$ (fig. 14.16). Dreapta $l$ separă planul $Oxy$ în trei submulţimi de puncte:

1) mulţimea $p^-$ a tuturor punctelor planului, situate de o parte a dreptei $l$ (fără punctele lui $l$);

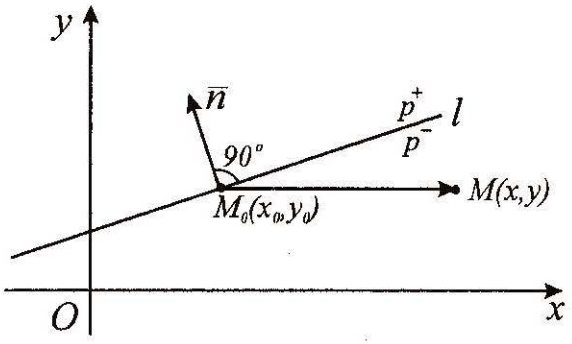



Fig. 14.16

2) mulţimea $p^+$ a tuturor punctelor planului, situate de cealaltă parte a dreptei $l$ (fără punctele lui $l$);

3) însăşi dreapta $l$.

$p^+$ reprezintă mulţimea punctelor planului $Oxy$, situate de aceeaşi parte a dreptei $l$ ca şi vectorul normal $\overline{n}$ al dreptei $l$, aplicat într-un punct oarecare al acestei drepte, $\overline{n} = \{A, B\} \perp l$.

**Teorema 14.5.** *Punctul $M(x, y) \in p^-$ atunci şi numai atunci când $Ax + By + C < 0$.*

▷ Fixăm pe dreapta $l$ un punct $M_0(x_0, y_0)$ şi considerăm punctul arbitrar $M(x, y) \in p^-$. Aplicăm vectorul normal $\overline{n} = \{A, B\}$ al dreptei $l$ în punctul $M_0$. Considerăm vectorul $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$. Atunci se observă clar că următoarele relaţii sunt echivalente:

$$M(x,y) \in p^- \Leftrightarrow (\overline{M_0M}\,\widehat{\ },\overline{n}) \text{ e un unghi obtuz } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{M_0M} \cdot \overline{n} < 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax + By < Ax_0 + By_0 \Leftrightarrow Ax + By + C < Ax_0 + By_0 + C.$$

Deoarece $M_0(x_0, y_0) \in l$, rezultă că $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Deci

$$Ax + By + C < 0. \qquad \triangleleft$$

În mod analog se demonstrează următoarele afirmaţii:

1. $M(x, y) \in p^+ \Leftrightarrow Ax + By + C > 0$;

2. $M(x, y) \in p^- \cup l \Leftrightarrow Ax + By + C \leq 0$;

3. $M(x,y) \in p^+ \cup l \Leftrightarrow Ax + By + C \geq 0$.

Evident, $M(x,y) \in l \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$.

Mulţimile $p^-$ şi $p^+$ se numesc *semiplane deschise*, iar mulţimile $p^- \cup l$, $p^+ \cup l$ se numesc *semiplane închise*. Dreapta $l$ se numeşte *frontiera* semiplanelor.

Rezolvarea inecuaţiilor liniare se bazează pe următoarea propoziţie.

C o n s e c i n ţ ă. *Dreapta*

$$Ax + By + C = 0 \tag{14.1}$$

*separă planul de coordonate în două semiplane deschise. Coordonatele oricărui punct al unuia dintre ele satisfac inecuaţia liniară*

$$Ax + By + C < 0, \tag{14.2}$$

*iar ale celuilalt –*

$$Ax + By + C > 0 \tag{14.3}$$

*şi reciproc: fiecare dintre inecuaţiile* (14.2) *sau* (14.3) *defineşte unul dintre semiplanele limitate de dreapta definită prin ecuaţia* (14.1).

Pentru a determina care anume din cele două semiplane defineşte inecuaţia (14.2) sau (14.3), este suficient de a verifica un punct ales arbitrar $M_0(x_0, y_0)$ (de exemplu originea de coordonate $O(0,0)$) care, convenţional, nu aparţine dreptei $Ax + By + C = 0$, adică substituind coordonatele lui în inecuaţia ce se verifică. Dacă în urma substituirii inecuaţia dată este satisfacută de coordonatele punctului $M_0(x_0, y_0)$, adică dacă obţinem o inegalitate numerică adevărată, atunci această inecuaţie defineşte semiplanul care include punctul $M_0(x_0, y_0)$, în caz contrar – celălalt semiplan.

## 14.8. Rezolvarea sistemelor de inecuaţii liniare prin metoda grafică

Aspectele teoretice expuse mai sus se folosesc pe larg la rezolvarea inecuaţiilor şi a sistemelor lor printr-o metodă particulară – metoda *grafică* (metoda *geometrică*), care se aplică cu succes în spaţiul bidimensional $\mathbf{R}^2$.

În cele ce urmează vom explica metoda unei astfel de soluţionări prin exemple.

**Exemplul 1.** Să se determine semiplanul definit prin inecuaţia

$$x - 2y + 2 < 0. \tag{14.1}$$

Scriem ecuaţia

$$x - 2y + 2 = 0 \tag{14.2}$$

şi trasăm dreapta $l$ definită prin ecuaţia (14.2) în raport cu sistemul rectangular de coordonate în plan $Oxy$ (fig. 14.17).

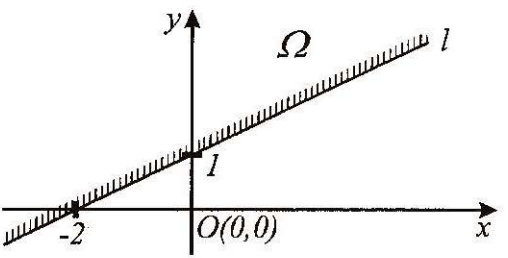



Fig. 14.17

Verificăm inecuaţia (14.1) cu ajutorul unui punct. Cel mai comod în acest scop este alegerea punctului $M_0 = O(0,0)$ – originea de coordonate. După substituirea coordonatelor punctului $O(0,0)$ în (14.1), obţinem $2 < 0$, adică coordonatele punctului $O(0,0)$ nu satisfac inecuaţia (14.1). Aceasta înseamnă că inecuaţia (14.1) defineşte acel semiplan limitat de dreapta $l$, definită prin ecuaţia (14.2), care nu conţine originea de coordonate $O(0,0)$. Se spune că *domeniul* $\Omega$ *al soluţiilor inecuaţiei* (14.1) este semiplanul haşurat în fig. 14.17. Coordonatele fiecărui punct al dreptei $l$ satisfac ecuaţia (14.2).

Se pot studia de asemenea şi sisteme de inecuaţii liniare cu două variabile, care, în cazul când toate inegalităţile sunt nestricte, totdeauna se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 \leq 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 \leq 0, \\ \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ A_mx + B_my + C_m \leq 0. \end{cases} \tag{14.3}$$

Se numeşte *domeniul soluţiilor* unui sistem de inecuaţii (14.3) mulţimea tuturor punctelor $M(x,y)$ ale căror coordonate satisfac toate inecuaţiile acestui sistem.

Domeniul $\Omega$ al soluţiilor sistemului de inecuaţii (14.3), evident, este intersecţia tuturor semiplanelor definite, respectiv, prin fiecare dintre aceste inecuaţii. Frontiera lui este o linie $L$ formată de dreptele ce limitează aceste semiplane. Deoarece semiplanele sunt mulţimi convexe, conform teoremei 14.1, intersecţia lor, adică domeniul $\Omega$ al soluţiilor sistemului de inecuaţii liniare, este o mulţime convexă. O astfel de mulţime de puncte din plan (considerată ca intersecţie de semiplane) formează un *domeniu poligonal convex*. Dacă acest domeniu, fiind o mulţime închisă, este mărginit, atunci el este o *suprafaţă poligonală convexă* (adică un *poligon convex* în reuniune cu interiorul său). Nu sunt excluse, de asemenea, cazurile în care domeniul poligonal convex nemărginit degenerează într-o dreaptă sau semidreaptă, iar poligonul convex – într-un segment sau punct.

Exemplul 2. Să se rezolve sistemul de inecuaţii liniare prin metoda grafică

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \leq 0, & (14.4) \\ x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0. & (14.5) \end{cases}$$

A găsi soluţiile sistemului dat de inecuaţii înseamnă a indica toate acele perechi ordonate de numere $x_1$, $x_2$ care satisfac ambele inecuaţii ale acestui sistem. Geometric, aceasta înseamnă a găsi toate punctele $M(x_1, x_2)$ care sunt situate în partea comună a semiplanelor definite, respectiv, prin inecuaţiile sistemului dat.

Construim dreptele $l_1$ şi $l_2$ definite, respectiv, prin ecuaţiile:

$$l_1: \quad x_1 + x_2 - 5 = 0$$

şi

$$l_2: \quad x_1 - 2x_2 + 2 = 0$$

în sistemul rectangular de coordonate $Ox_1x_2$. Verificăm fiecare dintre inecuaţiile sistemului dat cu ajutorul unui punct – originea de coordonate $O(0,0)$. În urma substituirii coordonatelor acestui punct în inecuaţia (14.4), obţinem $-5 \leq 0$, adică coordonatele punctului $O(0,0)$ satisfac inecuaţia (14.4). De aceea inecuaţia (14.4) defineşte acel semiplan limitat de dreapta $l_1$ (în fig. 14.18 el este haşurat) care include punctul $O(0,0)$. Substituind coordonatele punctului $O(0,0)$ în inecuaţia (14.5), obţinem $2 \leq 0$. Aceasta înseamnă că inecuaţia

(14.5) defineşte acel semiplan limitat de dreapta $l_2$ (în fig. 14.18 el este haşurat) care nu conţine punctul $O(0.0)$. Coordonatele punctelor $M(x_1, x_2)$ situate în partea haşurată a planului, cuprinsă între dreptele $l_1$ şi $l_2$, satisfac ambele inecuaţii (14.4) şi (14.5). Domeniul $\Omega$ al soluţiilor sistemului dat de inecuaţii este deci partea haşurată a planului, cuprinsă între dreptele indicate $l_1$ şi $l_2$ (fig. 14.18).

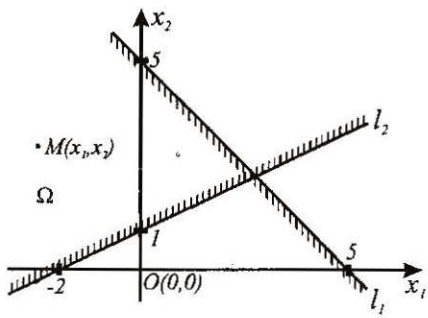



Fig. 14.18

**Exemplul 3.** Să se scrie cu ajutorul sistemului de inecuaţii corespunzător mulţimea de puncte situate în interiorul triunghiului cu vârfurile $A(1,2)$, $B(6,3)$, $C(4,5)$.

Evident, mulţimea punctelor triunghiului $ABC$ poate fi considerată ca intersecţia a trei semiplane, dintre care primul este limitat de dreapta $AB$ şi include punctul $C$, al doilea e limitat de dreapta $BC$ şi include $A$, iar al treilea este limitat de dreapta $AC$ şi include punctul $B$.

Să găsim inecuaţia care defineşte primul dintre aceste semiplane. Scriem ecuaţia dreptei $AB$ ce trece prin două puncte $A$ şi $B$:

$$\frac{x_1 - 1}{6 - 1} = \frac{x_2 - 2}{3 - 2},$$

sau $x_1 - 5x_2 + 9 = 0$.

Substituind în membrul stâng al acestei ecuaţii coordonatele punctului $C(4,5)$, obţinem $4 - 5 \cdot 5 + 9 = -12 < 0$. Prin urmare, inecuaţia ce defineşte primul dintre semiplanele indicate, adică semiplanul limitat de dreapta $AB$ şi care include punctul $C$, este

$$x_1 - 5x_2 + 9 < 0.$$

În mod analog, semiplanul limitat de dreapta $BC$ şi care include punctul $A$ este definit prin inecuaţia

$$x_1 + x_2 - 9 < 0,$$

iar semiplanul limitat de dreapta $AC$ şi care include punctul $B$ – prin inecuaţia

$$x_1 - x_2 + 1 > 0.$$

Aşadar, mulţimea punctelor interioare ale triunghiului dat se defineşte prin următorul sistem de inecuaţii liniare

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 9 < 0, \\ x_1 + x_2 - 9 < 0, \\ x_1 - x_2 + 1 > 0. \end{cases}$$

Construiţi figura respectivă de sine stătător.

Pentru sistemul de inecuaţii pot, de asemenea, să aibă loc cazuri speciale, când sistemul nu are nici o soluţie sau are numai o singură soluţie. Geometric, aceasta înseamnă că domeniile soluţiilor ale fiecăreia dintre inecuaţiile sistemului nu se intersectează (domeniul soluţiilor sistemului de inecuaţii este mulţimea vidă) sau au numai un singur punct comun. Convingeţi-vă că sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 9 > 0, \\ x_1 + x_2 - 9 > 0, \\ x_1 - x_2 + 1 < 0 \end{cases}$$

nu are soluţii, iar sistemul

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 9 \leq 0, \\ x_1 + x_2 - 9 \leq 0, \\ x_1 - x_2 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

are o singură soluţie, construind figurile respective.

E x e m p l u l 4. Să se rezolve sistemul de inecuaţii prin metoda grafică

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3 > 0, & (14.6) \\ 4x_1 - 3x_2 - 12 < 0, & (14.7) \\ 3x_1 + x_2 - 3 > 0. & (14.8) \end{cases}$$

Reprezentăm grafic dreptele (fig. 14.19):

$$\begin{aligned} l_1&: \quad x_1 - 3x_2 + 3 = 0, \\ l_2&: \quad 4x_1 - 3x_2 - 12 = 0, \\ l_3&: \quad 3x_1 + x_2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

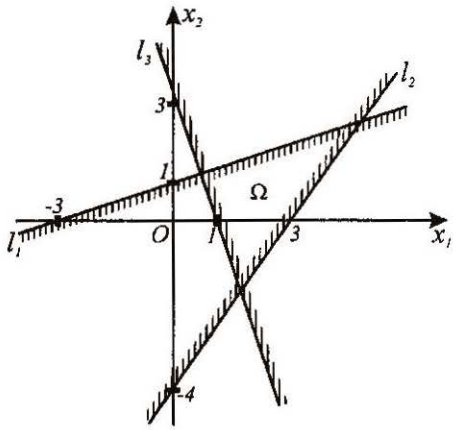



Fig. 14.19

Inecuaţia (14.6) este satisfacută de coordonatele punctelor semiplanului haşurat situat mai jos de dreapta $l_1$. Inecuaţiile (14.7) şi (14.8) sunt verificate de coordonatele punctelor semiplanelor haşurate situate mai sus de dreptele $l_2$ şi $l_3$, respectiv (fig. 14.19). Prin urmare, domeniul $\Omega$ al soluţiilor sistemului de inecuaţii (14.6)–(14.8) este partea planului cuprinsă în interiorul triunghiului dintre dreptele $l_1$, $l_2$, $l_3$ (fig. 14.19).

Un domeniu $\Omega$ care constă exclusiv din puncte interioare se numeşte *domeniu deschis*. Dacă însă domeniul $\Omega$ include şi punctele frontierei sale, atunci el se numeşte *domeniu închis*.

Apelând la exemplele 1–4, putem spune că domeniul $\Omega$ al soluţiilor inecuaţiei (14.1) este, evident, un semiplan deschis, haşurat în fig. 14.17, domeniul soluţiilor sistemului de inecuaţii (14.4) şi (14.5) este domeniul haşurat închis, cuprins între dreptele $l_1$ şi $l_2$ în fig. 14.18, iar domeniul soluţiilor sistemului de inecuaţii (14.6)–(14.8) este un domeniu deschis şi reprezintă triunghiul deschis cuprins între dreptele $l_1$, $l_2$, $l_3$ în fig. 14.19.

Exemplul 5. Să se rezolve prin metoda grafică sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 10 \geq 0, & (14.9) \\ x_1 + x_2 - 4 \leq 0, & (14.10) \\ x_1 \leq 1, & (14.11) \\ x_1 \geq -3, & (14.12) \\ x_2 \geq 1. & (14.13) \end{cases}$$

Reprezentăm grafic dreptele (fig. 14.20):

$$\begin{aligned} l_1&: \quad x_1 - 2x_2 + 10 = 0, \\ l_2&: \quad x_1 + x_2 - 4 = 0, \\ l_3&: \quad x_1 = 1, \\ l_4&: \quad x_1 = -3, \\ l_5&: \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

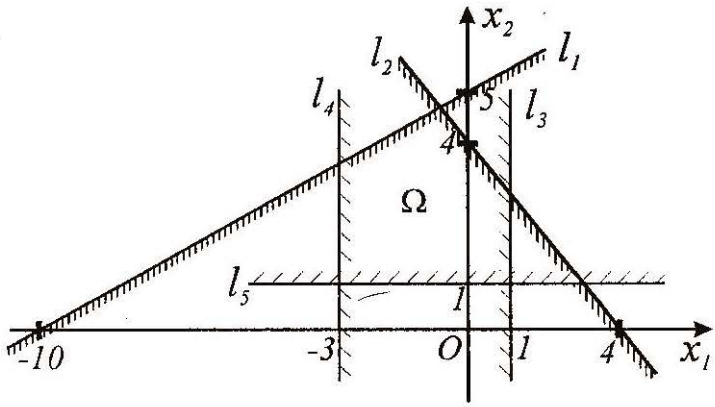



Fig. 14.20

Inecuaţiile (14.9)–(14.13) sunt satisfăcute de coordonatele punctelor domeniului haşurat în fig. 14.20. Domeniul $\Omega$ al soluţiilor sistemului de inecuaţii (14.9)–(14.13) este pentagonul cuprins între dreptele $l_1 - l_5$ (fig. 14.20).

În mod analog interpretării geometrice a inecuaţiilor cu două variabile (a se vedea consecinţa teoremei 14.5) se pot interpreta geometric inecuaţiile cu trei variabile

$$F(x, y, z) < 0 \qquad (14.14)$$

şi

$$F(x, y, z) > 0 \tag{14.15}$$

ca mulţimi de puncte ale spaţiului $\mathbf{R}^3$ ale căror coordonate satisfac, respectiv, inecuaţiile (14.14) şi (14.15). În particular, inecuaţiile liniare cu trei variabile

$$Ax + By + Cz + D < 0 \tag{14.16}$$

şi

$$Ax + By + Cz + D > 0 \tag{14.17}$$

definesc două *semispaţii* situate de diferite părţi ale planului care le separă, definit prin ecuaţia

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{14.18}$$

Această afirmaţie se demonstrează întocmai ca şi în cazul semiplanelor definite de inecuaţii cu două variabile (vezi teorema 14.5). Domeniul soluţiilor unui sistem de inecuaţii liniare este, prin definiţie, mulţimea tuturor punctelor ale căror coordonate satisfac toate inecuaţiile sistemului. Deci, *domeniul soluţiilor unui sistem de inecuaţii liniare*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \leq 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \leq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ A_mx + B_my + C_mz + D_m \leq 0 \end{cases}$$

*reprezintă intersecţia semispaţiilor definite de inecuaţiile acestui sistem.* Iar fiindcă orice semispaţiu este o mulţime convexă, conform teoremei 14.1, domeniul soluţiilor sistemului dat de inecuaţii liniare este o mulţime convexă. Această mulţime de puncte (considerată ca intersecţie de semispaţii) formează un *domeniu poliedric convex* sau (în cazul când mulţimea e mărginită) un *poliedru convex.*

## 14.9. Sisteme de inecuaţii liniare cu $n$ variabile

Considerăm un sistem de $m$ inecuaţii cu $n$ variabile

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \tag{14.1}$$

unde coeficienţii $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ şi termenii liberi $b_1, \ldots, b_m$ sunt numere reale.

Orice ansamblu ordonat de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care satisface toate inecuaţiile sistemului (14.1) se numuşte *soluţie* a acestui sistem de inecuaţii. Ansamblurile ordonate de $n$ numere reale $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care satisfac numai una dintre inecuaţiile sistemului (14.1), inecuaţia $i$, umplu un semispaţiu în spaţiul $\mathbf{R}^n$, adică mulţimea de puncte $\{M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i\}$. Soluţiile aparţin intersecţiei tuturor acestor semispaţii. Fiindcă fiecare dintre semispaţii este o mulţime convexă, conform teoremei 14.1, rezultă că mulţimea tuturor soluţiilor sistemului de inecuaţii liniare (14.1) reprezintă o mulţime convexă de puncte în $\mathbf{R}^n$. Această mulţime de puncte formează un *"poliedru convex"* în spaţiul $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$. Ca exemple de poliedre convexe în spaţiul de trei dimensiuni pot servi: prisma şi piramida triunghiulare, paralelipipedul, stratul mărginit de două plane paralale etc.

Exemplul 1. Domeniul soluţiilor sistemului de inecuaţii

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

în spaţiul $\mathbf{R}^3$ reprezintă geometric tetraedrul cu vârfurile $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, (fig. 14.21).

Exemplul 2. Mulţimea soluţiilor sistemului de inecuaţii

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

în spaţiul $\mathbf{R}^3$ reprezintă geometric reuniunea unghiului triedru cu interiorul său, având vârful în $A(1,0,0)$, iar muchiile lui – semidreptele $AO$, $AB$, $AC$ (fig. 14.21).

De menţionat că în cazul sistemului de inecuaţii cu trei variabile, rezolvarea grafică devine mai puţin ilustrativă, iar când numărul de variabile este mai mare ca trei – chiar imposibilă. În astfel de cazuri, sistemele de inecuaţii se rezolvă prin metode analitice, adică folosind calculul algebric.

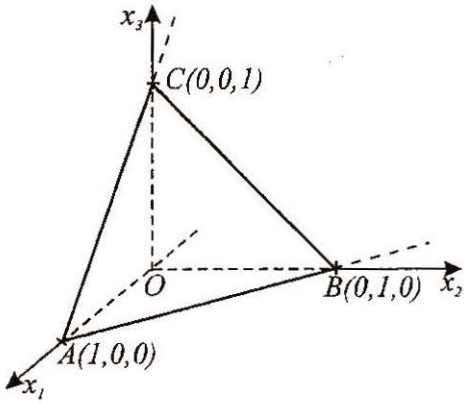



Fig. 11.21

## Exerciţii

**1.** Punctul $M_0 \in \mathbf{R}^n$ se numeşte *punct de acumulare* al unei mulţimi $V$ de puncte $n$-dimensionale dacă orice vecinătate a punctului $M_0$ conţine puncte ale mulţimii $V$ distincte de $M_0$. Să se demonstreze că: 1) fiecare vecinătate a punctului de acumulare $M_0$ al mulţimii $V$ conţine o mulţime infinită de puncte din mulţimea $V$; 2) orice punct interior al mulţimii $V$ este punct de acumulare al acestei mulţimi; 3) dacă un punct de acumulare al mulţimii $V$ nu este punct interior al acestei mulţimi, atunci el este un punct de frontieră a mulţimii $V$.

**2.** Să se demonstreze următoarele proprietăţi ale mulţimilor închise şi deschise:

a) intersecţia oricărui număr de mulţimi închise este o mulţime închisă;

b) reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este o mulţime închisă;

c) intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

d) reuniunea oricărui număr de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

e) o mulţime $V$ este închisă în $\mathbf{R}^n$ atunci şi numai atunci când ea este complementara unei mulţimi deschise $Q$ în raport cu $\mathbf{R}^n$, adică $V = \mathbf{R}^n \setminus Q$.

**3.** Să se scrie ecuaţia hiperplanului ce trece prin punctul $M(1, -1, 0, 3, -2)$ perpendicular pe vectorul $\overline{a} = (0, 1, -2, -3, 5)$.

**4.** Să se scrie ecuaţiile parametrice ale segmentului $[M_1M_2]$ care uneşte punctele $M_1(3, 2)$ şi $M_2(1, -4)$.

**5.** Să se demonstreze că mulţimea $\{M(x, y) \in \mathbf{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b\}$ este o mulţime convexă de puncte.

**6.** Se numeşte *acoperire convexă* a punctelor $M_1, M_2, \ldots, M_k$ mulţimea de puncte $\{P \in \mathbf{R}^n \mid \overline{OP} = \lambda_1\overline{OM}_1 + \lambda_2\overline{OM}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{OM}_k,\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1\}$. Să se demonstreze că acoperirea convexă totdeauna este o mulţime convexă.

**7.** Să se indice punctele extreme:

a) ale mulţimii de puncte $\{M(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$;

b) ale mulţimii $\{M(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$.

**8.** Să se reprezinte geometric mulţimea soluţiilor admisibile, vârfurile ei şi să se afle soluţiile de bază admisibile ale sistemului de ecuaţii:

a) $20x_1 + 15x_2 - 12x_3 = 60$ (sistem dintr-o singură ecuaţie);

b)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

**9.** Care este sensul geometric al unei inecuaţii liniare cu două variabile şi al unui sistem de astfel de inecuaţii?

**10.** Care este sensul geometric al unei inecuaţii şi al unui sistem de inecuaţii liniare cu trei variabile?

**11.** Să se găsească inecuaţia care defineşte semiplanul limitat de dreapta $3x - 2y + 5 = 0$ şi include punctul $C(4, 5)$. Să se verifice dacă este situat în acelaşi semiplan originea de coordonate.

**12.** Să se rezolve sistemele de inecuaţii prin metoda grafică.

a)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6 > 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 12 < 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3 > 0; \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq \frac{3}{2}; \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ 2x_1 \leq 3, \\ -x_1 \leq 3, \\ -3x_1 + 7x_2 \leq 21, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3. \end{cases}$$

CAPITOLUL 15

# Curbe și suprafețe de ordinul doi

## 15.1. Forma canonică a ecuațiilor curbelor de ordinul doi

### 15.1.1. Noțiunea de curbă de ordinul doi

Considerăm ecuația generală (algebrică) de gradul doi în raport cu variabilele $x$ și $y$ (a se vedea p. 11.3, cap. 11):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

unde coeficienții $A, B, C$ nu sunt concomitent egali cu zero, adică $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. De exemplu, $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$, $x^2 - y = 0$ sunt ecuații de gradul doi.

Fie în $R^2$ definit un sistem rectangular de coordonate $Oxy$. In caz general, se numește *linie* (sau *curbă)* definită printr-o ecuație $F(x, y) = 0$ mulțimea tuturor acelor și numai a acelor puncte $M(x, y)$ din planul $Oxy$ ale căror coordonate satisfac ecuația dată (vezi p. 11.2, cap. 11).

**Definiție. O** linie care într-un sistem rectangular de coordonate în plan se definește printr-o ecuație algebrică de gradul doi se numește *linie* (sau *curbă, figura) de ordinul doi* în plan.

Ca exemple de curbe de ordinul doi pot servi curbele cunoscute din matematica elementară: parabola, care este graficul funcției $y = ax^2 + bx + c$; cercul, a cărui ecuație are forma $x^2 + y^2 — r^2$; hiperbola - graficul funcției $xy = k$ sau $y = \frac{k}{x}$

### 15.1.2. Curbele de ordinul doi definite prin ecuaţiile lor canonice

Să cercetăm mai detaliat unele curbe remarcabile de ordinul doi din plan, definite analitic prin *ecuaţiile canonice* ale acestora într-un sistem rectangular de coordonate:

1) *elipsa*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \geq b);$$

2) *hiperbola*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0);$$

3) *parabola*

$$y^2 = 2px \quad (p > 0);$$

4) *o pereche de drepte concurente*

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0);$$

5) *o pereche de drepte paralele sau confundate*

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \geq 0).$$

## 15.2. Studierea formei curbei de ordinul doi utilizând ecuaţia canonică a sa

Vom scoate în evidenţă unele proprietăţi caracteristice ale curbelor enumerate mai sus.

**1. Elipsa**

1. Din ecuaţia canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \geq b) \qquad (15.1)$$

se observă că, concomitent cu coordonatele punctului $M(x, y)$ al elipsei, ecuaţia (15.1) se satisface şi de coordonatele punctelor $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$. Aceasta înseamnă că elipsa (definită prin ecuaţia sa canonică) este o curbă simetrică faţă de axele de coordonate $Oy$, $Ox$ şi faţă de originea de coordonate $O$.

2. Pentru $y = 0$, din (15.1) avem $x = \pm a$. Prin urmare, elipsa intersectează $Ox$ în punctele $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Pentru $x = 0$, avem $y = \pm b$, adică elipsa intersectează $Oy$ în punctele $B_1(0, b)$ şi $B_2(0, -b)$. Prin urmare, punctele $(\pm a, 0)$ şi $(0, \pm b)$ sunt situate pe elipsă.

3. Rezolvând ecuaţia (15.1) în raport cu $y$, iar apoi în raport cu $x$, obţinem ecuaţia elipsei sub următoarea formă:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{15.2}$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}. \tag{15.3}$$

Ecuaţia porţiunii elipsei din cadranul I va fi

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{15.4}$$

Pentru $|x| \geq a$, ecuaţia (15.2) dă valori imaginare pentru $y$. Prin urmare, toate punctele elipsei, deci şi întreaga elipsă, sunt situate între dreptele $x = a$ şi $x = -a$. În mod analog, din (15.3) rezultă că toate punctele elipsei sunt situate între dreptele $y = \pm b$. Aceasta înseamnă că elipsa nu iese în afara limitelor dreptunghiului $PQRS$ format de aceste drepte. Elipsa în întregime este cuprinsă în acest dreptunghi (fig. 15.1).

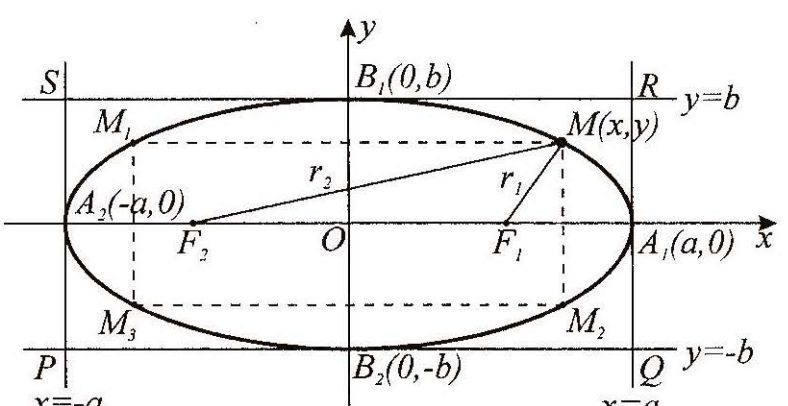



Fig. 15.1

4. Din ecuaţia (15.4) se constată că, concomitent cu creşterea lui $x$ de la 0 până la $a$, valoarea lui $y$ descreşte de la $b$ până la 0. Acum putem construi porţiunea elipsei din cadranul I (fig. 15.1). Având în vedere că elipsa e simetrică faţă de axele $Ox$ şi $Oy$, putem construi elipsa în întregime. Axele de simetrie ale elipsei se numesc *axele principale*, sau simplu *axele* elipsei, iar centrul de simetrie (punctul $O$ de intersecţie a axelor) – *centrul elipsei*. Punctele în care elipsa intersectează axele se numesc *vârfurile elipsei* (în fig. 15.1 ele sunt notate cu literele $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$). Vârfurile mărginesc pe axe segmentul $A_1A_2$ de lungime $2a$ şi segmentul $B_1B_2$ de lungime $2b$, care se numesc, respectiv, *axa mare* şi *axa mică* a elipsei. Mărimile $a$ şi $b$ ($a \geq b$) se numesc, respectiv, *semiaxa mare* şi *semiaxa mică* ale elipsei. Forma elipsei depinde de mărimea $\frac{b}{a}$. Dacă $a = b$, atunci (15.1) se poate scrie sub forma $x^2 + y^2 = a^2$, adică elipsa devine cerc.

Notăm
$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Mărimea
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$
se numeşte *excentricitatea elipsei*. Evident, pentru elipsă, $0 \leq e \leq 1$. Punctele $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$ se numesc *focarele elipsei*, iar distanţele de la focare până la un punct $M$ al elipsei – *razele focale* ale acestui punct. Razele focale ale unui punct arbitrar $M$ al elipsei le vom nota astfel: $r_1 = \rho(F_1, M)$ şi $r_2 = \rho(F_2, M)$. Forma generală a elipsei este reprezentată în fig. 15.1.

**Teorema 15.1.** *Elipsa reprezintă mulţimea tuturor punctelor $M$ din plan pentru care suma distanţelor la două puncte date $F_1$ şi $F_2$, numite focare, este o mărime constantă $2a$ mai mare ca distanţa dintre focare $2c$:*
$$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a, \tag{15.5}$$
$\rho(F_1, F_2) = 2c$, $2a > 2c$.

▷ Considerăm elipsa definită de ecuaţia canonică a sa (15.1). Fie $F_1(c, 0)$ şi $F_2(-c, 0)$ focarele elipsei, $M(x, y)$ un punct arbitrar al elipsei, iar $r_1 = \rho(F_1, M)$, $r_2 = \rho(F_2, M)$ razele focale ale ei (fig. 15.1).

Având în vedere că $a > b$ şi $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$, obţinem:

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} =$$

$$= x^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) - 2cx + a^2 = x^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} - 2cx + a^2 = (a - \frac{c}{a} \cdot x)^2 = (a - ex)^2;$$

$$r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = x^2 \cdot \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2 =$$

$$= (a + \frac{c}{a}x)^2 = (a + ex)^2.$$

Întrucât $e < 1$ şi $|x| \leq a$, deducem că $(a \pm ex) > 0$. De aici şi din egalităţile scrise mai sus rezultă formulele pentru razele focale ale punctului arbitrar $M(x, y)$ al elipsei:

$$r_1 = a - ex,$$
$$r_2 = a + ex.$$

De aici $r_1 + r_2 = 2a$, adică avem egalitatea (15.5). ◁

Elipsa poate fi construită mecanic, utilizând formula (15.5). Pentru aceasta luăm o aţă de lungimea $2a$, fixăm capetele ei în focarele $F_1$, $F_2$ şi cu creionul, dându-i aţei forma $F_1MF_2$, descriem cu punctul $M$ graficul elipsei. La cerc, $F_1$ şi $F_2$ se contopesc într-un singur punct – centrul cercului.

R e m a r c ă. Dacă la elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ va fi $b > a$, atunci focarele elipsei sunt situate pe axa $Oy$. Pentru astfel de elipsă, $e = \frac{c}{b}$, $c^2 = b^2 - a^2$, $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$, $r_{1,2} = b \mp ey$ (fig. 15.2).

**2. Hiperbola**

Considerăm ecuaţia canonică a hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0). \tag{15.6}$$

1. Din (15.6) este evident că, concomitent cu coordonatele punctului $M(x, y)$ al hiperbolei, ecuaţia (15.6) se satisface şi de coordonatele punctelor $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$. Aceasta înseamnă că hiperbola (definită prin ecuaţia sa canonică) este o curbă simetrică faţă de axele $Oy$, $Ox$ şi faţă de originea de coordonate $O$.

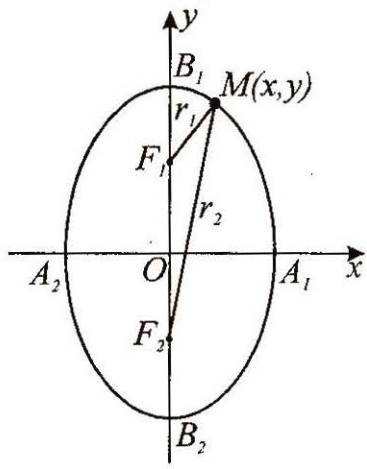



Fig. 15.2

2. Pentru $y = 0$, din (15.6) avem $x = \pm a$. Deci, hiperbola intersectează axa absciselor $Ox$ în punctele $A_1(a, 0)$ şi $A_2(-a, 0)$. Prin urmare, aceste puncte sunt situate pe hiperbolă. Mai construim încă şi punctele $B_1(0, b)$ şi $B_2(0, -b)$.

   Rezolvând (15.6) în raport cu $y$, aflăm ecuaţia hiperbolei sub următoarea formă

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{15.7}$$

   Pentru $|x| < a$, valorile lui $y$ sunt imaginare. Prin urmare, hiperbola nu intersectează axa $Oy$ şi nu are nici un punct al ei pe fâşia dintre dreptele $x = a$ şi $x = -a$. Aceasta înseamnă că hiperbola este situată în exteriorul fâşiei mărginite de dreptele $x = \pm a$ (fig. 15.3).

3. Din (15.7) rezultă că ecuaţia porţiunii de hiperbolă din cadranul I este

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{15.8}$$

   Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al porţiunii de hiperbolă din cadranul I. La creşterea nemărginită a abscisei $x$, ordonata $y$ de asemenea creşte nemărginit. Aceasta înseamnă că pentru $x \to +\infty$ punctul $M(x, y)$ se îndepărtează nemărginit "la dreapta" şi "în sus". Considerăm dreapta

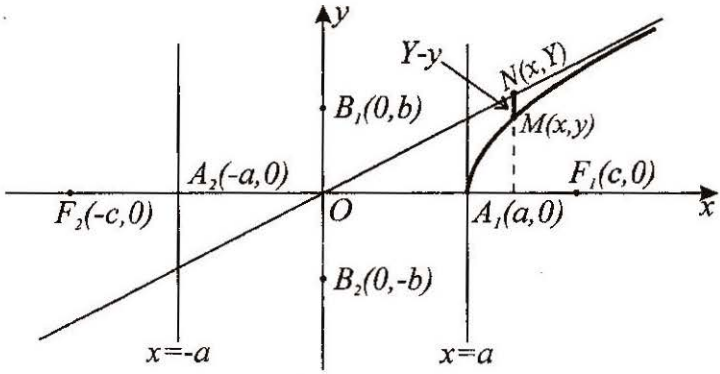



Fig. 15.3

$$Y = \frac{b}{a}x. \tag{15.9}$$

Aflăm diferenţa dintre ordonatele punctelor $M(x,y)$ şi $N(x,Y)$, care au una şi aceeaşi abscisă $x$. $M$ este situat pe hiperbolă, $N$ – pe dreapta (15.9). Obţinem

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Întrucât pentru punctele părţii hiperbolei din cadranul I $x \geq a$, rezultă că $Y - y > 0$ şi cu creşterea nemărginită a abscisei $x$, diferenţa $Y - y$ se micşorează nemărginit, adică $Y - y \to 0$ atunci când $x \to +\infty$. În felul acesta, punctul $M$ al hiperbolei, îndepărtându-se pe ramura hiperbolei din cadranul I, simultan se apropie nemărginit de dreapta $Y = \frac{b}{a}x$, ne atingând-o nicăieri (fig. 15.3). Această dreaptă se numeşte *asimptota hiperbolei*. Hiperbola mai are încă o asimptotă:

$$Y = -\frac{b}{a}x.$$

Acum putem construi porţiunea de hiperbolă din cadranul I (fig. 15.3). Folosind proprietatea de simetrie a hiperbolei faţă de

axele $Ox$ şi $Oy$, construim hiperbola integral (fig. 15.4). Hiperbola dată constă din două ramuri (ramura dreaptă şi ramura stângă) şi are două asimptote: $y = \frac{b}{a}x$ şi $y = -\frac{b}{a}x$.

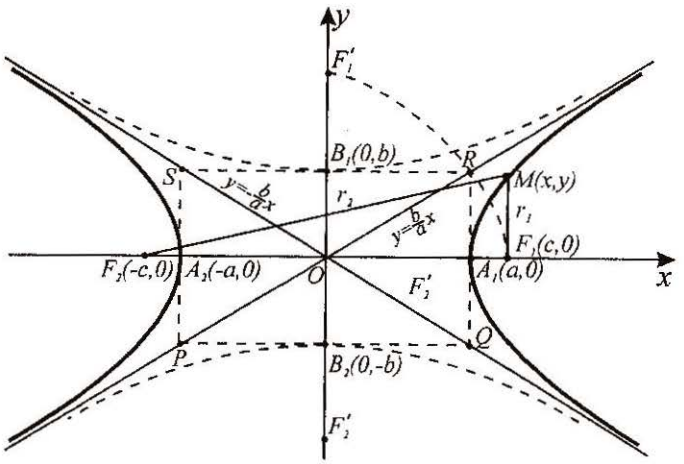



Fig. 15.4

Axele de simetrie ale hiperbolei se numesc *axele principale*, sau simplu *axele* hiperbolei, iar centrul de simetrie (punctul $O$ de intersecţie a axelor) – *centrul hiperbolei.* Una dintre axe intersectează hiperbola în două puncte, care se numesc *vârfurile hiperbolei* (în fig. 15.4 ele sunt notate cu literele $A_1$ şi $A_2$). Această axă se numeşte *axa reală* (sau *axa transversală*) a hiperbolei (axa $Ox$ în fig. 15.4). Cealaltă axă nu are puncte comune cu hiperbola şi se numeşte *axa imaginară* a hiperbolei (axa $Oy$ în fig. 15.4). Segmentul $A_1A_2$ de lungime $2a$ de asemenea se numeşte *axa reală*, iar segmentul $B_1B_2$ de lungime $2b$ – *axa imaginară* a hiperbolei. Dreptunghiul $PQRS$ cu laturile $2a$ şi $2b$, simetric faţă de axele de coordonate (fig. 15.4), se numeşte *dreptunghiul de bază* al hiperbolei. Mărimile $a$ şi $b$ se numesc, respectiv, *semiaxa reală* şi *semiaxa imaginară* ale hiperbolei.

Notăm

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Mărimea

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

se numeşte *excentricitatea hiperbolei.* Evident, pentru hiperbolă, $\frac{c}{a} = e > 1$. Punctele $F_1(c,0)$ şi $F_2(-c,0)$ se numesc *focarele hiperbolei*, iar mărimile $r_1 = \rho(F_1, M)$ şi $r_2 = \rho(F_2, M)$ – *razele focale* ale punctului arbitrar $M$ al hiperbolei.

Din cele expuse mai sus rezultă următorul procedeu practic de construire a hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

construim *dreptunghiul de bază* $PQRS$ cu laturile de lungime $2a$ şi $2b$. Diagonalele sale dau asimptotele $y = \pm\frac{b}{a}x$ ale hiperbolei (fig. 15.4). În continuare, $\rho(O,R) = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2} = c = \rho(O,F_1)$. De aceea, cu raza $OR$ construim focarele $F_1$ şi $F_2$. Mai departe, construim hiperbola în aşa fel, încât ea să fie tangentă la latura $QR$ a dreptunghiului de bază şi să se apropie nemărginit de asimptota sa (fig. 15.4).

Dacă semiaxele hiperbolei sunt egale: $a = b$, atunci hiperbola se numeşte *echilaterală* şi ecuaţia ei canonică ia forma $x^2 - y^2 = a^2$, iar asimptotele ei sunt diagonalele unghiurilor de coordonate: $y = \pm x$.

Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

are axa reală $Oy$ şi cea imaginară $Ox$. Vârfurile şi focarele ei sunt situate pe $Oy$ (fig. 15.4). Ea este reprezentată în fig. 15.4 prin linii punctate.

Două hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ şi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ pentru unele şi aceleaşi valori ale parametrilor $a$ şi $b$ se numesc *conjugate.* Aceste hiperbole au aceleaşi asimptote.

**T e o r e m a 15.2.** *Hiperbola reprezintă mulţimea punctelor $M$ din plan pentru care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la două puncte date $F_1$ şi $F_2$, numite focare, este o mărime constantă $2a$, mai mică decât distanţa dintre focare $2c$:*

$$|\rho(F_2, M) - \rho(F_1, M)| = 2a, \qquad (15.10)$$

$\rho(F_1, F_2) = 2c, \quad 2a < 2c.$

▷ Considerăm hiperbola definită de ecuaţia canonică a sa (15.6). Fie $F_1(c,0)$ şi $F_2(-c,0)$ focarele hiperbolei, $M(x,y)$ un punct arbitrar al hiperbolei cu razele focale $r_1 = \rho(F_1,M)$ şi $r_2 = \rho(F_2,M)$ (fig. 15.4). Fiindcă pentru punctele hiperbolei $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, avem:

$$r_1^2 = (x-c)^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2) =$$

$$= x^2(1+\frac{b^2}{a^2})-2cx+c^2-b^2 = \frac{c^2}{a^2}\cdot x^2-2cx+a^2 = (\frac{c}{a}x-a)^2 = (ex-a)^2;$$

$$r_2^2 = (x+c)^2+y^2 = c^2+2cx+x^2+y^2 = (\frac{c}{a}x+a)^2 = (ex+a)^2.$$

Întrucât pentru toate punctele hiperbolei $|x| \geq a$ şi $\frac{c}{a} = e > 1$, rezultă:

$$r_1 = |ex-a| = \begin{cases} ex-a, & x>0, \\ -ex+a, & x<0; \end{cases}$$

$$r_2 = |ex+a| = \begin{cases} ex+a, & x>0, \\ -ex-a, & x<0. \end{cases}$$

De aici $|r_2 - r_1| = 2a$, adică avem egalitatea (15.10). ◁

### 3. Parabola

1. Din ecuaţia canonică a parabolei

$$y^2 = 2px \quad (p>0) \tag{15.11}$$

se observă că, concomitent cu coordonatele punctului $M(x,y)$ al parabolei, ecuaţia (15.11) se satisface şi de coordonatele punctului $M_1(x,-y)$. Prin urmare, parabola definită prin ecuaţia sa canonică (15.11) este simetrică faţă de axa absciselor $Ox$.

2. Pentru $x=0$, din (15.11) avem $y=0$. Prin urmare, parabola trece prin originea de coordonate $O(0,0)$.

3. Rezolvând (15.11) în raport cu $y$, obţinem ecuaţia parabolei sub următoarea formă

$$y = \pm\sqrt{2px}. \tag{15.12}$$

Din (15.12) rezultă că $y$ ia valori reale numai pentru $x \geq 0$. Aceasta înseamnă că parabola este situată la dreapta de axa ordonatelor $Oy$.

4. Ecuaţia porţiunii parabolei din cadranul I, evident, este

$$y = \sqrt{2px}.$$

Din această ecuaţie se constată că o dată cu creşterea lui $x$, creşte şi $y$; dacă $x \to +\infty$, atunci şi $y \to +\infty$. Adică punctul arbitrar $M(x, y)$ al porţiunii parabolei din cadranul I iese din originea de coordonate $O$ şi o dată cu creşterea lui $x$ se deplasează "la dreapta" şi "în sus"; dacă $x \to +\infty$, atunci punctul $M$ se îndepărtează nemărginit atât de axa $Oy$, cât şi de axa $Ox$ (fig. 15.5).

Acum putem construi porţiunea de parabolă din cadranul I şi, utilizând proprietatea de simetrie a parabolei faţă de axa $Ox$, construim parabola integral (fig. 15.5).

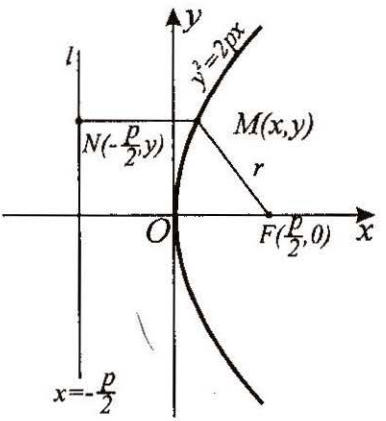



Fig. 15.5

Axa de simetrie (axa $Ox$) se numeşte *axa parabolei*, iar punctul $O$ de intersecţie a parabolei cu axa ei – *vârful parabolei*. Pentru parabola definită prin ecuaţia canonică (15.11), punctul $F(\frac{p}{2}, 0)$ se numeşte *focarul parabolei*, iar dreapta $x = -\frac{p}{2}$ – *directoarea parabolei*. Distanţa unui punct arbitrar $M(x, y)$ al parabolei la focarul $F$ se numeşte *raza focală* a acestui punct $M$ şi vom nota-o prin $r = \rho(F, M)$ (fig. 15.5).

**T e o r e m a 15.3.** *Parabola reprezintă mulţimea tuturor punctelor $M$ din plan, egal distanţate de un punct fix $F$, numit focar, şi de*

*o dreaptă fixă $l$ ce nu trece prin focar, numită directoare:*

$$\rho(F, M) = \rho(l, M). \tag{15.13}$$

▷ Considerăm parabola definită de ecuaţia canonică a sa (15.11). Construim dreapta $l$ definită de ecuaţia $x = -\frac{p}{2}$. Fie $F(\frac{p}{2}, 0)$ focarul parabolei, $M(x, y)$ un punct arbitrar al parabolei, $r = \rho(F, M)$ raza focală a punctului $M$, $d = \rho(l, M)$ distanţa punctului $M$ la dreapta $l$ şi $N(-\frac{p}{2}, y)$ proiecţia obtogonală a punctului $M$ pe dreapta $l$ (fig. 15.5). Atunci avem:

$$r^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = (x + \frac{p}{2})^2;$$

$$d^2 = (x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2 = (x + \frac{p}{2})^2.$$

De aici $r = d$, adică am obţinut egalitatea (15.13). ◁

Mărimea $p$ – distanţa focarului $F$ la directoarea $l$ – se numeşte *parametrul parabolei.* Pentru parabola $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, raza focală, evident, se determină prin formula

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

▷ Rezultă din egalitatea (15.13) şi din fig. 15.5. ◁

R e m a r c ă. În fig. 15.5 observăm că dacă am schimba sensul axei $Ox$, atunci ecuaţia parabolei va avea forma

$$y^2 = -2px,$$

iar dacă de schimbat rolurile axelor $Ox$ şi $Oy$, atunci ecuaţia parabolei va avea forma

$$x^2 = 2py.$$

Apar următoarele cazuri:

1. Dacă parabola se defineşte prin ecuaţia sa de forma

$$y^2 = -2px \ (p > 0),$$

atunci "ramurile" ei sunt îndreptate la stânga de $Oy$ (fig. 15.6). În acest caz, focarul este $F(-\frac{p}{2}, 0)$ şi directoarea $l$ are ecuaţia $x = p/2$.

Raza focală a punctului arbitrar $M(x, y)$ al parabolei se determină prin formula

$$r = -x + \frac{p}{2}.$$

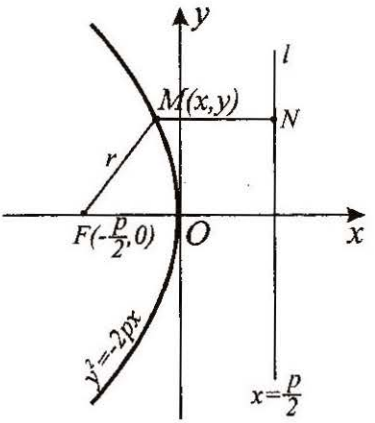



Fig. 15.6

2. Dacă parabola se defineşte prin ecuaţia canonică a sa

$$x^2 = 2py \ (p > 0) \text{ sau } x^2 = -2py \ (p > 0),$$

atunci directoarea parabolei este paralelă cu axa $Ox$, iar focarul este situat pe axa $Oy$ (fig. 15.7 şi 15.8).

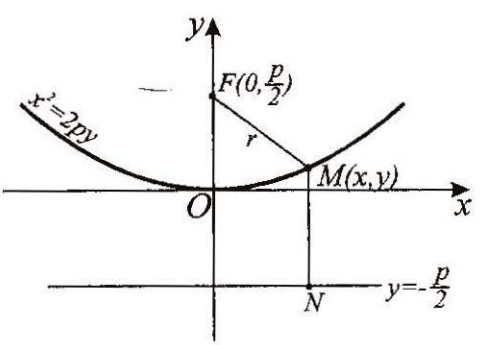



Fig. 15.7

Raza focală a punctului $M(x, y)$ al parabolei $x^2 = 2py$ se determină prin formula

$$r = y + \frac{p}{2},$$

iar pentru cel al parabolei $x^2 = -2py$ – prin formula

$$r = -y + \frac{p}{2}.$$

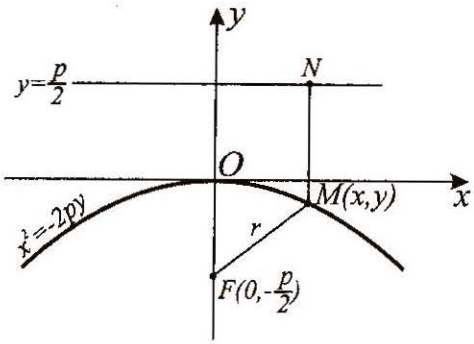



Fig. 15.8

**4. Pereche de drepte concurente**

Ecuaţia

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0) \tag{15.14}$$

defineşte o pereche de drepte concurente.

▷ Într-adevăr, ecuaţia (15.14) poate fi reprezentată sub forma $(ax - by)(ax + by) = 0$. Dar această ecuaţie se satisface numai de coordonatele punctelor din plan, situate pe dreptele:

$$ax - by = 0 \quad \text{şi} \quad ax + by = 0,$$

ce trec prin originea de coordonate. ◁

**5. Pereche de drepte paralele sau confundate**

Ecuaţia

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \geq 0) \tag{15.15}$$

defineşte o pereche de drepte paralele sau confundate.

▷ Într-adevăr, în acest caz esuaţia (15.15) ia forma $(x - a)(x + a) = 0$ şi deci se descompune în două ecuaţii: $x - a = 0$ şi $x + a = 0$. Aceste drepte, evident, sunt paralele (dacă $a \neq 0$) sau se confundă (dacă $a = 0$). ◁

## 15.3. Noţiunea de suprafaţă de ordinul doi. Forma canonică a ecuaţiilor suprafeţelor de ordinul doi

Fie în spaţiul $\mathbf{R}^3$ definit un sistem rectangular de coordonate $Oxyz$.

În caz general, se numeşte *suprafaţă* în $\mathbf{R}^3$, definită printr-o ecuaţie $F(x, y, z) = 0$, mulţimea tuturor acelor şi numai a acelor puncte

$M(x, y, z)$ ale spaţiului $\mathbf{R}^3$ ale căror coordonate satisfac ecuaţia dată (a se vedea p. 11.4, cap. 11).

**Definiţie.** O suprafaţă care într-un sistem rectangular de coordonate în spaţiul $\mathbf{R}^3$ se defineşte printr-o ecuaţie algebrică de gradul doi se numeşte *suprafaţă de ordinul doi.*

Se spune că un punct $M(x, y, z)$ este situat pe suprafaţa dată dacă coordonatele lui satisfac ecuaţia acestei suprafeţe.

Vom examina cazurile particulare ale suprafeţelor de ordinul doi, definite prin *ecuaţiile canonice* ale acestora în sistemul rectangular de coordonate:

1) *elipsoidul*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0);$$

2) *hiperboloidul cu o pânză*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0);$$

3) *hiperboloidul cu două pânze*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0);$$

4) *conul de ordinul doi*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0);$$

5) *paraboloidul eliptic*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p > 0, \ q > 0);$$

6) *paraboloidul hiperbolic*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ (p > 0, \ q > 0);$$

7) *punctul*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

8) *cilindre de ordinul doi*:

- *cilindru eliptic*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0);$$

- *cilindru hiperbolic*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0);$$

- *cilindru parabolic*

$$y^2 = 2px;$$

- *o pereche de plane care se intersectează*

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \ (a > 0, \ b > 0);$$

- *o pereche de plane paralele sau confundate*

$$x^2 - a^2 = 0 \quad (a \geq 0);$$

- *dreapta*

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Mărimile $a, b, c, p, q$, în genere, poartă denumirea de *parametri*.

## 15.4. Studierea formei unei suprafeţe prin metoda secţiunilor

Să scoatem în evidenţă unele proprietăţi caracteristice ale suprafeţelor enumerate mai sus.

Vom aplica *metoda secţiunilor paralele*, care în cazul dat constă în următoarele: pentru a determina forma şi poziţia unei suprafeţe de ordinul doi, definite prin ecuaţia ei canonică, este suficient de studiat geometric secţiunile obţinute prin secţionarea acestei suprafeţe cu planele de coordonate şi cu diverse plane paralele lor. Să arătăm aplicarea acestei metode prin exemple.

1. **Elipsoidul.** Să stabilim forma geometrică a elipsoidului definit de ecuaţia sa canonică

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0). \tag{15.1}$$

Pentru aceasta, examinăm secţiunile obţinute prin secţionarea elipsoidului dat cu plane paralele la planul de coordonate $Oxy$. Fiecare dintre atare plane se defineşte printr-o ecuaţie de forma $z=h$, unde $h$ – un număr real arbitrar, iar linia care se obţine în secţiune se defineşte prin două ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \tag{15.2}$$

Cercetăm ecuaţiile (15.2) pentru diferite valori ale lui $h$.

1. Dacă $|h|>c$ $(c>0)$, atunci $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<0$ şi ecuaţiile (15.2) definesc o elipsă imaginară, adică puncte de intersecţie a planului $z=h$ cu elipsoidul dat nu există.

2. Dacă $h=\pm c$, atunci $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ şi linia (15.2) degenerează în punctele $(0,0,c)$ şi $(0,0,-c)$ (planele $z=\pm c$ sunt tangente la elipsoidul dat).

3. Dacă $|h|<c$, atunci ecuaţiile (15.2) pot fi transcrise sub forma

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}}+\dfrac{y^2}{b^{*2}}=1, \\ z=h, \end{cases}$$

unde $a^*=a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$ şi $b^*=b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$.

De aici rezultă că planul $z=h$ intersectează elipsoidul după elipsa cu semiaxele $a^*$ şi $b^*$. O dată cu micşorarea lui $|h|$, valorile $a^*$ şi $b^*$ se măresc şi ating valorile lor maxime pentru $h=0$, adică în secţiunea obţinută prin secţionarea elipsoidului cu planul de coordonate $Oxy$ se obţine cea mai mare elipsă cu semiaxele $a^*=a$ şi $b^*=b$.

Un tablou analog se obţine şi la secţionarea suprafeţei date cu plane paralele la planele de coordonate $Oxz$ şi $Oyz$.

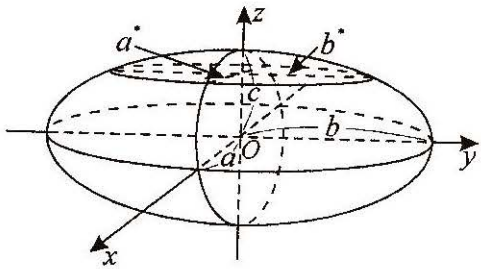



Fig. 15.9

În felul acesta, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta elipsoidul geometric ca o suprafaţă ovală închisă (fig. 15.9).

Mărimile $a, b, c$ se numesc *semiaxele* elipsoidului.

Dacă două semiaxe sunt egale, de exemplu $a = c$, atunci suprafaţa definită de ecuaţia (15.1) se numeşte *elipsoid de rotaţie*. În cazul $a = b = c$, elipsoidul este o *sferă*.

**2. Hiperboloidul cu o pânză.** Vom stabili forma suprafeţei definite de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0). \tag{15.3}$$

Pentru aceasta, examinăm secţiunile obţinute prin secţionarea ei cu planele de coordonate $Oyz$ $(x = 0)$ şi $Oxz$ $(y = 0)$. Obţinem, respectiv, ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

din care rezultă că în secţiuni se obţin hiperbole (fig. 15.10).

Să cercetăm secţiunile obţinute prin secţionarea hiperboloidului cu planele $z = h$, paralele planului de coordonate $Oxy$. Linia care se obţine în secţiune se defineşte prin ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

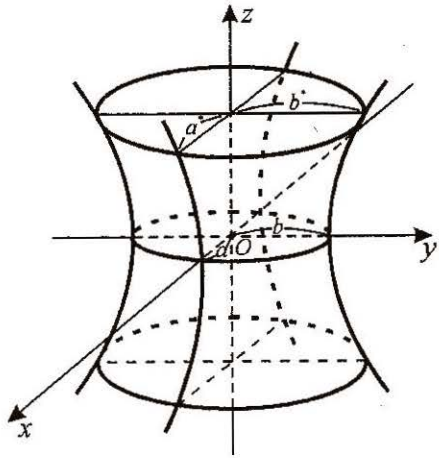



Fig. 15.10

unde $a^* = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ şi $b^* = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. De aici rezultă că planul $z = h$ intersectează hiperboloidul după elipsa cu semiaxele $a^*$ şi $b^*$, care ating valorile lor minime pentru $h = 0$, adică în secţiunea obţinută prin secţionarea hiperboloidului dat cu planul de coordonate $Oxy$ se obţine cea mai mică elipsă cu semiaxele $a^* = a$ şi $b^* = b$. La creşterea nemărginită a lui $h$, mărimile $a^*$ şi $b^*$ cresc nemărginit.

În felul acesta, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta geometric hiperboloidul cu o pânză ca o figură în formă de tub infinit, care se lărgeşte nemărginit o dată cu îndepărtarea (în ambele părţi) de la planul $Oxy$ (fig. 15.10).

Mărimile $a$, $b$, $c$ se numesc *semiaxele* hiperboloidului cu o pânză. Primele două sunt reprezentate în fig. 15.10, iar pentru a reprezenta pe desen semiaxa $c$, trebuie să construim dreptunghiul de bază al uneia dintre hiperbole.

Dacă $a = b$, atunci suprafaţa definită de ecuaţia (15.3) se numeşte *hiperboloid de rotaţie cu o pânză.*

**3. Hiperboloidul cu două pânze.** Vom stabili forma geometrică a suprafeţei definite de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0). \tag{15.4}$$

Pentru aceasta, examinăm secţiunile obţinute prin secţionarea supra-

feţei date cu planele de coordonate $Oxz$ $(y = 0)$ şi $Oxy$ $(z = 0)$. Obţinem, respectiv, ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

din care rezultă că în secţiuni se obţin hiperbole (fig. 15.11).

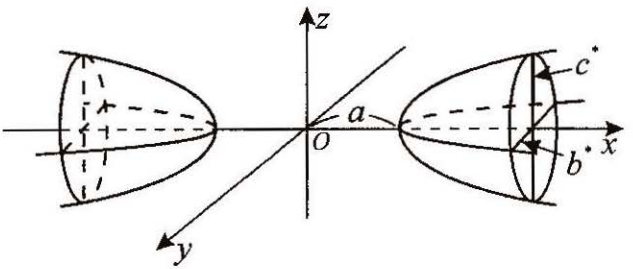



Fig. 15.11

Să cercetăm secţiunile obţinute prin secţionarea hiperboloidului dat cu planele $x = h$, paralele planului de coordonate $Oyz$. Linia care se obţine în secţiune se defineşte prin ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1, \\ x = h \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^{*2}} + \dfrac{z^2}{c^{*2}} = 1, \\ x = h, \end{cases} \tag{15.5}$$

unde $b^* = b\sqrt{\dfrac{h^2}{a^2} - 1}$, $c^* = c\sqrt{\dfrac{h^2}{a^2} - 1}$. De aici rezultă că pentru $|h| > a$ $(a > 0)$, planul $x = h$ intersectează hiperboloidul după elipsa cu semiaxele $b^*$ şi $c^*$. O dată cu creşterea lui $|h|$, mărimile $b^*$ şi $c^*$ de asemenea cresc.

Pentru $h = \pm a$, ecuaţiile (15.5) sunt satisfăcute de coordonatele punctelor $(a, 0, 0)$ şi $(-a, 0, 0)$ (planele $x = \pm a$ sunt tangente la suprafaţa dată).

Pentru $|h| < a$, ecuaţiile (15.5) definesc o elipsă imaginară, adică puncte de intersecţie a planului $x = h$ cu hiperboloidul dat nu există.

În felul acesta, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta hiperboloidul cu două pânze ca o suprafaţă ce constă din două

"pânze" (de aici şi denumirea), fiecare având forma unei cupe convexe nemărginite (fig. 15.11).

Mărimile $a$, $b$, $c$ sunt numite *semiaxele* hiperboloidului cu două pânze. În fig. 15.11 este reprezentată mărimea $a$. Pentru a reprezenta pe desen $b$ şi $c$, trebuie de construit dreptunghiurile de bază ale hiperbolelor din planele $Oxy$ şi $Oxz$.

Dacă $b = c$, atunci suprafaţa definită de ecuaţia (15.4) se numeşte *hiperboloid de rotaţie cu două pânze.*

**4. Conul de ordinul doi.** Să examinăm proprietăţile geometrice ale suprafeţei definite de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0). \tag{15.6}$$

La secţionarea acestei suprafeţe cu planul $Oyz$ ($x = 0$), obţinem linia

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

care se descompune în două drepte concurente:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

În mod analog, la secţionarea conului cu planul $Oxz$ ($y = 0$) de asemenea se obţin două drepte concurente:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(fig. 15.12).}$$

Cercetăm acum secţiunile obţinute prin secţionarea suprafeţei date cu planele $z = h$, paralele planului $Oxy$. Obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

unde $a^* = \dfrac{a|h|}{c}$, $b^* = \dfrac{b|h|}{c}$. De aici rezultă că în secţiuni se obţin elipse cu semiaxele $a^*$ şi $b^*$. Concomitent cu creşterea lui $|h|$, semiaxele $a^*$ şi $b^*$ de asemenea cresc.

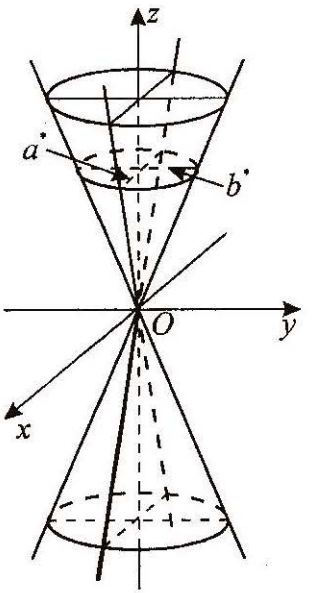



Fig. 15.12

Pentru $h = 0$, linia de intersecţie a suprafeţei cu planul $z = h$ degenerează în punctul $O(0, 0, 0)$.

În acest fel, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta conul dat ca o suprafaţă în forma indicată în fig. 15.12.

**5. Paraboloidul eliptic.** Vom cerceta cu ajutorul secţiunilor suprafaţa definită de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p > 0, \ q > 0). \tag{15.7}$$

Considerăm mai întâi secţiunile obţinute prin secţionarea suprafeţei date cu planele de coordonate $Oyz$ $(x = 0)$ şi $Oxz$ $(y = 0)$. Obţinem, respectiv, ecuaţiile

$$\begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

din care rezultă că în secţiuni se obţin parabole simetrice faţă de axa $Oz$ şi cu vârfurile în originea de coordonate (fig. 15.13).

Acum vom examina secţiunile obţinute prin secţionarea paraboloidului dat cu planele $z = h$, paralele planului de coordonate $Oxy$. Linia

care se obţine în secţiune se defineşte prin ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \tag{15.8}$$

unde $a^* = \sqrt{2ph}$ şi $b^* = \sqrt{2qh}$. De aici rezultă că pentru $h > 0$, planul $z = h$ intersectează paraboloidul eliptic după elipsa cu semiaxele $a^*$ şi $b^*$. O dată cu creşterea lui $h$, mărimile $a^*$ şi $b^*$ de asemenea cresc; pentru $h = 0$, elipsa degenerează într-un punct (planul $z = 0$ este tangent la paraboloidul dat). Pentru $h < 0$, ecuaţiile (15.8) definesc o elipsă imaginară, adică puncte de interseţie a planului $z = h$ cu paraboloidul dat nu există.

În felul acesta, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta paraboloidul eliptic ca o figură în formă de cupă convexă nemărginită (fig. 15.13).

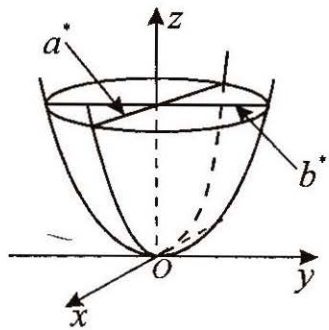



Fig. 15.13

Punctul $(0,0,0)$ se numeşte *vârful paraboloidului eliptic*; numerele $p$ şi $q$ – *parametrii* lui.

În cazul $p = q$, ecuaţiile (15.8) definesc o circumferinţă cu centrul pe axa $Oz$, adică paraboloidul eliptic poate fi privit ca o suprafaţă formată prin rotaţia parabolei în jurul axei sale. Atare suprafaţă se numeşte *paraboloid de rotaţie*.

**6. Paraboloidul hiperbolic.** Vom stabili forma geometrică a suprafeţei definite de ecuaţia canonică

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ (p > 0,\ q > 0). \tag{15.9}$$

Considerăm secţiunea obţinută prin secţionarea paraboloidului cu planul de coordonate $Oxz$ $(y = 0)$. Obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \tag{15.10}$$

din care rezultă că în secţiune se obţine o parabolă cu "ramurile" orientate în sus, simetrică faţă de axa $Oz$, şi cu vârful în originea de coordonate. În secţiunile suprafeţei cu plane paralele planului $Oxz$ $(y = h)$ se obţin de asemenea parabole orientate în sus:

$$\begin{cases} x^2 = 2p(z + \dfrac{h^2}{2q}), \\ y = h. \end{cases}$$

Considerăm secţiunea obţinută prin secţionarea paraboloidului dat cu planul $Oyz$ $(x = 0)$. Obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases}$$

din care rezultă că şi în acest caz în secţiune se obţine o parabolă, însă acum orientată în jos, simetrică faţă de axă $Oz$ şi cu vârful în originea de coordonate. Examinând secţiunile obţinute prin secţionarea paraboloidului cu planele $x = h$, paralele planului $Oyz$, obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} y^2 = -2q(z - \dfrac{h^2}{2p}), \\ x = h, \end{cases}$$

din care rezultă că pentru orice $h$, în secţiune se obţine o parabolă cu ramurile în jos, iar vârful este situat pe parabola definită de ecuaţiile (15.10).

Examinăm, în sfârşit, secţiunile obţinute prin intersectarea paraboloidului cu planele $z = h$, paralele planului $Oxy$. Obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

din care rezultă că pentru $h < 0$, în secţiune se obţin hiperbole care intersectează planul $Oyz$; pentru $h > 0$ – hiperbole care intersectează planul $Oxz$; pentru $h = 0$, hiperbola degenerează într-o pereche de drepte concurente:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

În felul acesta, secţiunile considerate dau posibilitate de a reprezenta geometric paraboloidul hiperbolic ca o suprafaţă în formă de şa (fig. 15.14).

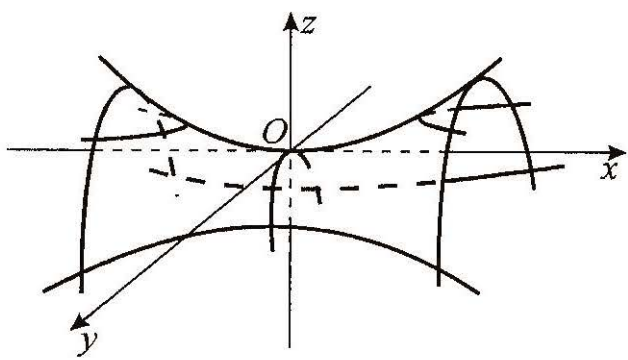



Fig. 15.14

Punctul $(0, 0, 0)$ se numeşte *vârful paraboloidului hiperbolic*; numerele $p, q$ – *parametrii* lui.

**7. Cilindre de ordinul doi.** Suprafeţele cilindrice, adică

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ – cilindrul eliptic,
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ – cilindrul hiperbolic şi
- $y^2 = 2px$ – cilindrul parabolic

sunt reprezentate, respectiv, în figurile 15.15, 15.16, 15.17.

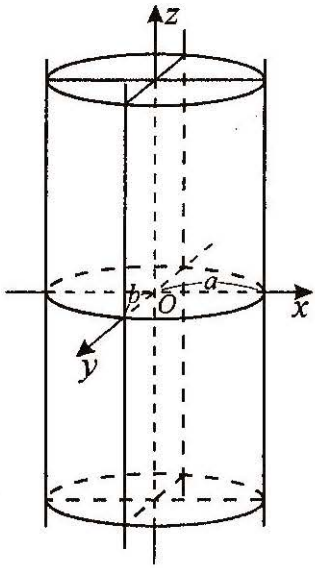



Fig. 15.15

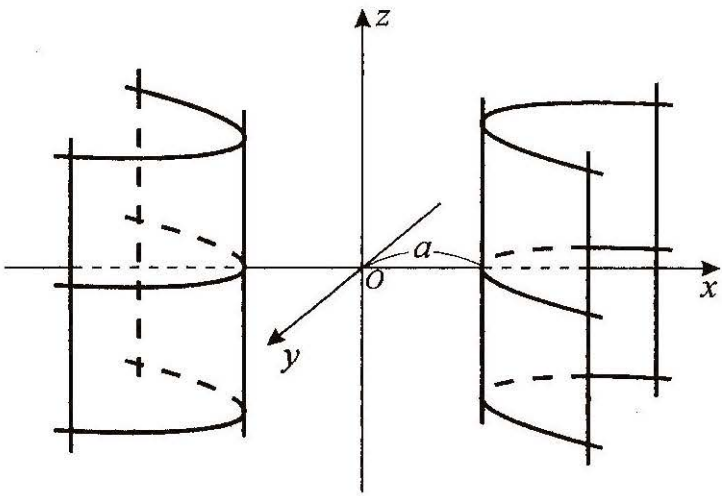



Fig. 15.16

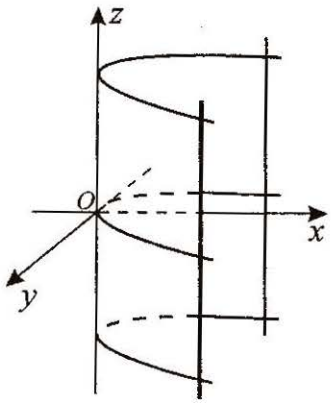



Fig. 15.17

## Exerciţii

**1.** Să se compună ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C(a,b)$ şi de rază $r$.

**2.** Să se demonstreze că ecuaţia generală algebrică de gradul doi (cu două necunoscute $x$ şi $y$) de forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

unde $A \neq 0$, defineşte un cerc.

**3.** Să se afle coordonatele centrului şi raza $r$ a cercului

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 8y + 31 = 0.$$

**4.** Să se construiască elipsa definită de ecuaţia ei canonică

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi să se scrie coordonatele focarelor, precum şi formulele pentru excentricitatea ei şi razele focale ale punctului arbitrar $M(x,y)$ al elipsei, în cazurile: 1) $a > b$; 2) $a < b$.

**5.** Să se construiască hiperbolele

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

şi pentru fiecare dintre ele să se scrie coordonatele focarelor, formulele pentru excentricitate, formulele asimptotelor şi ale razelor focale ale punctului arbitrar $M(x, y)$ al hiperbolei considerate.

**6.** Să se construiască parabolele definite prin ecuaţiile lor canonice:

a) $y^2 = 2px$;

b) $y^2 = -2px$;

c) $x^2 = 2py$;

d) $x^2 = -2py$ $(p > 0)$

şi pentru fiecare dintre ele să se scrie coordonatele focarului, formulele pentru directoarea ei şi raza focală a punctului arbitrar $M(x, y)$ al parabolei.

**7.** a) Să se demonstreze că graficul trinomului pătrat $y = ax^2 + bx + c$ reprezintă o parabolă cu axa paralelă la axa ordonatelor $Oy$. Să se scrie formula pentru determinarea coordonatelor vârfului parabolei şi să se construiască această parabolă.

b) Să se construiască graficul trinomului pătrat $x = ay^2 + by + c$.

În exerciţiile 8 – 19, aplicând metoda secţiunilor, să se determine forma şi poziţia suprafeţei definite prin ecuaţia canonică a sa.

**8.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$

**9.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.$

**10.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$

**11.** $x^2 + y^2 = 8z.$

**12.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1.$

**13.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = 1.$

**14.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{9} = -1.$

**15.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 2z.$

**16.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

**17.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

**18.** $y^2 = 6x.$

**19.** $x^2 - 4 = 0.$

CAPITOLUL 16

# Spaţii liniare

## 16.1. Noţiunea de spaţiu liniar

Am luat deja cunoştinţă de operaţia adunării vectorilor geometrici, de operaţia înmulţirii vectorilor cu numere reale şi am stabilit proprietăţile acestor operaţii (p. 10.6, cap. 10).

Pe de altă parte, obiectele noi studiate în cap. 3 – sistemele ordonate de $n$ numere reale, precum şi operaţiile adunării lor şi a înmulţirii cu un număr, evident, sunt obiecte de o altă natură decât vectorii geometrici.

Însă, după cum e uşor de constatat, operaţiile de "adunare" a acestor sisteme ordonate de $n$ numere şi de "înmulţire a lor cu un număr", executate după regulile expuse în p. 3.2, cap. 3, au aceleaşi proprietăţi ca şi operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un număr, efectuate asupra vectorilor geometrici, de exemplu:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a},$$
$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}),$$
$$\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}.$$

Întrucât există diverse mulţimi la care operaţiile au unele şi aceleaşi proprietăţi, este raţional de a le studia de pe anumite poziţii generale. Pentru aceasta este necesară o altă tratare, în sens mai general, a noţiunilor de bază, în primul rând, a noţiunilor de "vector" şi "spaţiu". O astfel de tratare generalizată se utilizează pe larg atât în matematică, cât şi în multe aplicaţii ale ei.

În urma unei atare studieri generalizate a mulţimilor cu operaţii, va apărea posibilitatea de a transfera proprietăţile operaţiilor unei

mulţimi de obiecte la o altă mulţime cu proprietăţi similare şi, o dată cu aceasta, de a transfera şi rezultatele cercetărilor efectuate.

În continuare vom studia mulţimi de obiecte de natură arbitrară, pentru elementele cărora într-un anumit mod (dar indiferent care) sunt definite operaţiile de "adunare" şi de "înmulţire cu un număr real", solicitând ca operaţiile indicate să posede aceleaşi proprietăţi ca şi operaţiile cu vectori geometrici. Astfel de mulţimi poartă numirea de spaţii liniare.

**Definiţie.** O mulţime $\mathcal{L}$ de obiecte (elemente) $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, ... de orice natură se numeşte *spaţiu liniar*, sau *spaţiu vectorial*, (peste câmpul numerelor reale) dacă:

a) pentru elementele mulţimii $\mathcal{L}$ este definită noţiunea de *egalitate*;

b) este dată o lege sau regulă (operaţie algebrică internă pe $\mathcal{L}$), în baza căreia fiecărei perechi ordonate $(\overline{x}, \overline{y})$ de elemente din $\mathcal{L}$ i se asociază câte un element unic determinat $\overline{z}$ din $\mathcal{L}$. Vom scrie $\overline{x} + \overline{y} = \overline{z}$ şi vom numi elementul $\overline{z}$ *suma* lui $\overline{x}$ cu $\overline{y}$, iar legea, prin convenţie, o vom numi "*adunare*" şi vom nota-o cu simbolul "+";

c) este dată o regulă (operaţie algebrică externă pe $\mathcal{L}$) conform căreia fiecărei perechi ordonate $(\alpha, \overline{x})$ formată cu un număr real $\alpha$ şi un element $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ i se asociază câte un element unic determinat $\overline{u}$ din $\mathcal{L}$. Vom scrie $\alpha\overline{x} = \overline{u}$ şi vom numi elementul $\overline{u}$ *produsul* elmentului $\overline{x}$ cu numărul $\alpha$ (sau prin scalarul $\alpha$) sau produsul lui $\alpha$ cu $\overline{x}$, iar regula, prin convenţie, o vom numi "*înmulţire prin scalar*" (sau "*înmulţire cu un număr*") şi vom nota-o cu "$\cdot$";

d) operaţiile indicate – "adunarea" şi "înmulţirea prin scalar" – satisfac următoarele cerinţe (axiome):

(1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ (proprietatea de comutativitate a adunării);

(2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ (proprietatea de asociativitate a adunării);

(3) există un element neutru, numit *elementul nul* $\overline{0} \in \mathcal{L}$, încât $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ oricare ar fi $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$;

(4) pentru fiecare element $\overline{x} \in \mathcal{L}$, există un element $\overline{x}' \in \mathcal{L}$, încât $\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}$;

(Elementul $\overline{x}'$ se numeşte *elementul opus* al elementului $\overline{x}$ sau *opusul lui* $x$ şi se notează cu $-\overline{x}$.)

(5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$ oricare ar fi $\overline{x} \in \mathcal{L}$ (rolul deosebit al factorului numeric 1);

(6) $\alpha(\beta\overline{x}) = (\alpha\beta)\overline{x}$ (proprietatea de asociativitate a înmulţirii prin scalari a elementului din $\mathcal{L}$);

(7) $(\alpha + \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$ (proprietatea de distributivitate a înmulţirii prin element a sumei numerelor);

(8) $\alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y}$ (propietatea de distributivitate a înmulţirii prin scalar a sumei elementelor din $\mathcal{L}$)

oricare ar fi $x, y, z \in \mathcal{L}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Elementele oricărui spaţiu liniar le vom numi *vectori*, deşi după natura lor concretă ei pot să nu semene deloc cu segmentele orientate, adică cu vectorii geometrici. Înseşi numerele reale $\alpha$ şi $\beta$, ce figurează în axiomele (1) – (8), se numesc "*scalari*".

Aşadar, o mulţime $\mathcal{L}$ de obiecte de natură arbitrară se numeşte *spaţiu liniar*, sau mai exact *spaţiu liniar real*, dacă pentru toate elementele din $\mathcal{L}$ este stabilită noţiunea de egalitate şi sunt definite operaţiile de "adunare" şi de "înmulţire prin scalar" şi, totodată, sunt satisfăcute axiomele (1) – (8).

Operaţiile de adunare a vectorilor şi de înmulţire a vectorilor cu scalari se numesc *operaţii liniare.*

Menţionăm că la introducerea noţiunii de spaţiu liniar facem abstracţie nu numai de natura obiectelor ce se studiază, ci şi de aspectul concret de formare a sumei elementelor şi a produsului elementului cu un număr (important este numai faptul ca aceste legi să satisfacă cele opt axiome din definiţia formulată mai sus).

R e m a r c ă. În definiţia formulată a spaţiului liniar în loc de numerele reale arbitrare $\alpha$ şi $\beta$ pot fi luate numere complexe arbitrare. În acest mod ajungem la noţiunea de *spaţiu liniar complex.*

În cele ce urmează vom studia numai spaţii liniare reale.

## 16.2. Exemple de spaţii liniare

Să dăm câteva exemple concrete de spaţii liniare.

E x e m p l u l 1. Cel mai remarcabil exemplu de spaţiu liniar este *mulţimea tuturor vectorilor geometrici liberi (segmentelor orientate)* din spaţiul nostru obişnuit.

În calitate de operaţii de "adunare" convenţională a vectorilor şi de "înmulţire prin scalar" convenţională în mulţimea dată de obiecte geometrice se consideră operaţiile obişnuite de adunare a vectorilor geometrici şi de înmulţire a lor cu un număr. A aduna doi vectori geometrici $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ înseamnă a-i aduce la originea comună şi a lua diagonala $\overline{OB}$ a paralelogramului construit pe ei ca pe laturi (a se vedea fig. 10.38).

A înmulţi un vector geometric cu un număr real $\alpha$ înseamnă "a mări" lungimea lui de $|\alpha|$ ori, ne schimbând sensul, dacă $\alpha > 0$, şi schimbându-l în opus, dacă $\alpha < 0$. Vectorul nul $\overline{0}$ va fi vectorul ale cărui origine şi extremitate coincid. Ca vector opus vectorului $\overline{x}$ se admite segmentul orientat, egal după lungime şi de sens contrar, $-\overline{x}$. Atunci se verifică uşor că operaţiile indicate satisfac axiomele (1)–(8).

Prin urmare, mulţimea tuturor vectorilor geometrici cu operaţiile obişnuite de adunare a vectorilor geometrici şi de înmulţire a lor cu un număr este un spaţiu liniar. Acest spaţiu totdeauna îl vom numi *spaţiul vectorilor-segmente obişnuite* (sau *al vectorilor geometrici*) şi îl vom nota $V_3$.

În mod analog, mulţimea tuturor vectorilor-segmente, coplanari unui plan dat, formează spaţiu liniar, pe care îl notăm cu $V_2$, iar mulţimea tuturor vectorilor-segmente, coliniari unei direcţii date, formează spaţiu liniar, pe care îl notăm $V_1$. Aceste spaţii liniare uneori se mai notează cu $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$ şi $\mathbf{R}^1$, respectiv.

Exemplul 2. Important pentru aplicaţiile în economie (iar pentru întreaga teorie a spaţiilor liniare şi drept exemplu de bază de spaţii liniare) este *spaţiul vectorilor-linie n-dimensionali* (*spaţiul aritmetic real* $\mathbf{R}^n$), care se construieşte în modul următor.

Fie $\mathbf{R}^n$ mulţimea tuturor sistemelor ordonate de $n$ numere reale (complexelor ordonate de $n$ numere) sau, cum li se mai spune, vectori-linie $n$-dimensionali (sau vectori-linie de "lungimea" $n$) de forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alcătuite din $n$ numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care se numesc componentele vectorului-linie. Vom nota elementul-linie arbitrar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al acestei mulţimi cu $\overline{x}$ şi vom scrie $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Doi vectori-linie se numesc *egali* dacă sunt egale componentele (numerele) lor respective.

Operaţiile de "adunare" convenţională a vectorilor-linie şi de

"înmulţire prin scalar" convenţională sunt definite, respectiv, după componente, conform regulilor:

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{y} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \end{aligned} \tag{16.1}$$

şi

$$\alpha\overline{x} = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \tag{16.2}$$

unde $\alpha$ – un număr real arbitrar.

Uşor de verificat că dacă în calitate de element nul al mulţimii se admite vectorul linie $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, atunci elementul opus al elementului $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va fi elementul $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ şi pentru operaţiile indicate asupra vectorilor-linie sunt satisfăcute toate axiomele (1) – (8), care definesc spaţiul liniar.

Aşadar, mulţimea tuturor complexelor ordonate de $n$ numere reale cu operaţiile introduse de "adunare" a vectorilor-linie şi de "înmulţire a unui vector cu un număr" după formulele (16.1) şi (16.2), respectiv, este un spaţiu liniar.

Acest spaţiu liniar $\mathbf{R}^n$ se numeşte *spaţiul vectorilor-linie n-dimensionali*, spaţiul aritmetic real de dimensiunea $n$, sau simplu *spaţiul aritmetic* şi, de asemenea, spaţiul numeric $n$-dimensional.

În mod analog, poate fi examinat spaţiul vectorilor-coloană de "înălţimea" $m$, notat $\mathbf{R}^m$.

Înseşi complexele $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – numere reale, se numesc *vectori n-dimensionali*, sau simplu *vectori* ai spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$.

E x e m p l u l 3. Fie $\mathbf{R}$ mulţimea tuturor numerelor reale cu operaţiile obişnuite a adunării şi înmulţirii numerelor. Se verifică uşor că $\mathbf{R}$ este spaţiu liniar.

Într-adevăr, dacă în $\mathbf{R}$ în calitate de "adunare" convenţională se admite operaţia de adunare obişnuită a numerelor, iar ca "înmulţire prin scalar" se admite operaţia de înmulţire obişnuită a unui număr (ca element al mulţimii $\mathbf{R}$) cu alt număr real, atunci devine evident că toate axiomele spaţiului liniar sunt satisfăcute.

E x e m p l u l 4. Fie $\mathbf{R}_+$ mulţimea tuturor numerelor reale nenegative. Fie că "adunarea" convenţională este adunarea "obişnuită", iar "înmulţirea cu un număr $\alpha$" convenţională este înmulţirea obişnuită

cu numărul $|\alpha|$ (altfel vom ieşi din mulţimea dată $\mathbf{R}_+$). Formează oare această mulţime $\mathbf{R}_+$ spaţiu liniar? Se dovedeşte că *nu formează.*

Într-adevăr, axiomele (1) şi (2) se satisfac. Elementul $\overline{0}$ este zeroul obişnuit. Însă elementul opus $-\overline{x}$ pentru orice număr pozitiv $\overline{x}$ aici nu este. De aceea, mulţimea numerelor reale nenegative cu operaţiile adunării aritmetice obişnuite şi a înmulţirii cu un număr în sensul indicat *nu formează* spaţiu liniar.

Exemplul 5. Fie $\{P_n(t)\}$ mulţimea tuturor polinoamelor obişnuite (algebrice) de nedeterminata $t$, de grad ce nu întrece numărul natural $n$, cu coeficienţii reali. Elementele $\overline{x}$ ale mulţimii date au forma

$$\overline{x} = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m,$$

unde $m \leq n$, $m$ – număr natural, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – numere reale (coeficienţi).

Fie că "adunarea" convenţională este adunarea algebrică obişnuită a polinoamelor, iar "înmulţirea cu numărul $\alpha$" convenţională este înmulţirea obişnuită a polinomului cu numărul $\alpha$. Atunci uşor de verificat că sunt satisfăcute toate cele 8 axiome. Prin urmare, mulţimea $\{P_n(t)\}$ a tuturor polinoamelor algebrice de nedeterminata $t$, de grad nu mai mare ca $n$, cu operaţiile obişnuite de "adunare a polinoamelor" şi de "înmulţire a lor cu un număr" este un spaţiu liniar.

Exemplul 6. Fie $C[a,b]$ mulţimea tuturor funcţiilor de forma $\overline{x} = f(t)$, definite şi continue pe segmentul $a \leq t \leq b$, cu operaţiile obişnuite pentru funcţii de "adunare" a lor şi de "înmulţire cu un număr". Elementele $\overline{x}$, $\overline{y} \in C[a,b]$, suma lor şi produsul cu un număr au forma:

$$\overline{x} = f(t),\ \overline{y} = \varphi(t),$$
$$\overline{x} + \overline{y} = f(t) + \varphi(t),\ \alpha\overline{x} = \alpha \cdot f(t).$$

Se verifică uşor că în acest exemplu sunt satisfăcute toate axiomele spaţiului liniar.

## 16.3. Subspaţii liniare ale unui spaţiu

Fie $\mathcal{L}$ un spaţiu liniar şi $S$ o submulţime de vectori din $\mathcal{L}$.

**Definiţie.** Submulţimea $S$ a spaţiului liniar ($S \subset \mathcal{L}$) se numeşte *subspaţiu liniar al lui* $\mathcal{L}$ dacă $S$ este un spaţiu vectorial faţă de operaţiile liniare din $\mathcal{L}$ (adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorului

cu un număr), cu alte cuvinte, dacă $S$ este *închisă* în $\mathcal{L}$ faţă de aceste operaţii.

Uşor se observă că cel mai mic subspaţiu este subspaţiul, numit *subspaţiul nul* $\mathcal{O}$, format dintr-un singur vector – vectorul nul $\overline{0} \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{O} = \{\overline{0}\} \subset \mathcal{L}$). Cel mai mare subspaţiu este însuşi spaţiul $\mathcal{L}$. Aceste două spaţii, $\mathcal{O}$ şi $\mathcal{L}$, se numesc *improprii*. Orice subspaţiu $S$ diferit de $\mathcal{O}$ şi $\mathcal{L}$ se numeşte *subspaţiu propriu*.

**Teorema 16.1.** (*criteriu necesar şi suficient*).
*Ca o submulţime $S$ a spaţiului liniar $\mathcal{L}$ să formeze subspaţiu liniar al lui $\mathcal{L}$, este necesar şi suficient să fie satisfăcute condiţiile:*

1) *dacă $\overline{x}$, $\overline{y} \in S$, atunci $\overline{x} + \overline{y} \in S$;*

2) *dacă $\overline{x} \in S$ şi $\alpha$ – un număr real oarecare, atunci $\alpha\overline{x} \in S$.*

▷ Necesitatea rezultă din faptul că aceste condiţii trebuie să fie respectate pentru orice subspaţiu liniar.

Pentru demonstrarea suficienţei trebuie de demonstrat că se satisfac toate 8 axiome ale spaţiului liniar. Justeţea axiomelor (1), (2), (5) – (8) este evidentă. Demonstrăm justeţea axiomei (3).

Întrucât condiţia 2) este satisfăcută pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, punând $\alpha = 0$, avem $0 \cdot \overline{x} = \overline{0} \in S$. Dar $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x} \in S$ şi, prin urmare, axioma (3) este adevărată.

Pentru a determina axioma (4), punem $\alpha = -1$. Deoarece dacă $\overline{x} \in S$, atunci $(-1)\overline{x} \in S$, iar $(-1)\overline{x} = -\overline{x}$, rezultă că submulţimea $S$ împreună cu orice element $\overline{x}$ conţine şi elementul opus al său $-\overline{x}$, ceea ce şi demonstrează satisfacerea axiomei (4). ◁

Dăm unele exemple de subspaţii liniare.

Exemplul 1. În spaţiul vectorilor geometrici $V_3$, vectorii coplanari cu un plan dat formează subspaţiul liniar $V_2$, deoarece se îndeplinesc, evident, condiţiile 1) şi 2) ale teoremei 16.1.

Exemplul 2. a) Submulţimea din spaţiul liniar $\mathcal{L}$, alcătuită din vectorii de forma

$$\overline{x} = \alpha\overline{e}, \tag{16.1}$$

unde $\alpha$ – un scalar arbitrar, iar $\overline{e}$ – un vector nenul fixat, este un subspaţiu liniar în $\mathcal{L}$;

b) mulţimea ce constă din vectorii de forma

$$\overline{x} = \alpha \overline{e}_1 + \beta \overline{e}_2, \tag{16.2}$$

unde $\alpha$ şi $\beta$ sunt scalari arbitrari, este un subspaţiu liniar al spaţiului $n$-dimensional $\mathcal{L}$.

Într-adevăr, pentru fiecare dintre aceste submulţimi din $\mathcal{L}$ se respectă, evident, condiţiile 1) şi 2) ale teoremei 16.1.

Exemplul 3. Mulţimea $\{P_n(t)\}$ a tuturor polinoamelor de grad nu mai mare ca $n$ de nedeterminata $t$, pentru $t$ admis pe segmentul $a \leq t \leq b$, este subspaţiu liniar al spaţiului liniar $C[a,b]$ al tuturor funcţiilor de forma $\overline{x} = f(t)$, continue pe acest segment (cu operaţiile obişnuite pentru funcţii a adunării şi a înmulţirii lor cu un număr).

## 16.4. Cele mai simple proprietăţi ale spaţiilor liniare

Înainte de a trece la studierea mai detaliată a spaţiilor liniare, vom expune cele mai simple consecinţe din axiomele (1) – (8).

Proprietatea 1. În orice spaţiu liniar $\mathcal{L}$ există *unicul vector nul* $\overline{0}$.

▷ Existenţa cel puţin a unui element nul $\overline{0}$ se afirmă de către axioma (3), adică $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$ oricare ar fi $\overline{x} \in \mathcal{L}$. Presupunem că există încă un element nul $\overline{0}_1$, adică $\overline{x} + \overline{0}_1 = \overline{x}$, $\forall \overline{x} \in \mathcal{L}$. Punând în prima egalitate $\overline{x} = \overline{0}_1$, iar în a doua $\overline{x} = \overline{0}$, obţinem $\overline{0}_1 + \overline{0} = \overline{0}_1$ şi $\overline{0} + \overline{0}_1 = \overline{0}$. În baza axiomei (1), rezultă $\overline{0}_1 = \overline{0}$ şi deci unicitatea elementului nul este stabilită. ◁

Proprietatea 2. În orice spaţiu liniar, fiecare vector $\overline{x}$ are *un singur vector opus* $-\overline{x}$.

▷ Existenţa pentru fiecare element $\overline{x}$ cel puţin a unui element opus $\overline{x}'$ se afirmă de axioma (4), adică $\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}$. Presupunem că există încă un alt element opus $\overline{x}''$ al elementului $\overline{x}$, adică $\overline{x} + \overline{x}'' = 0$. Însă atunci, în virtutea axiomelor (3), (2), (1), $\overline{x}' = \overline{x}' + \overline{0} = \overline{x}' + (\overline{x} + \overline{x}'') = (\overline{x}' + \overline{x}) + \overline{x}'' = \overline{0} + \overline{x}'' = \overline{x}''$, adică $\overline{x}' = \overline{x}''$ şi deci unicitatea pentru fiecare element $\overline{x}$ a elementului opus $\overline{x}' = -\overline{x}$ este demonstrată. ◁

Proprietatea 3. Într-un spaţiu liniar $\mathcal{L}$ au loc formulele $-\overline{0} = \overline{0}$, $-(-\overline{x}) = \overline{x}$, $-(\overline{x} + \overline{y}) = -\overline{x} - \overline{y}$, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{L}$.

▷ Într-adevăr, în baza axiomelor (1), (2), (3) şi a existenţei elementului opus unic $(-\overline{x})$ al elementului $\overline{x} \in \mathcal{L}$, avem: $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{0} + (-\overline{0}) = \overline{0}$, de unde rezultă $-\overline{0} = \overline{0}$; $(-\overline{x}) + [-(-\overline{x})] = \overline{0}$, $-\overline{x} + \overline{x} = \overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$. Deci $-(-\overline{x}) = \overline{x}$; $(\overline{x} + \overline{y}) + [-(\overline{x} + \overline{y})] = \overline{0}$, $(\overline{x}+\overline{y})+[(-\overline{x})+(-\overline{y})] = \overline{x}+\overline{y}+(-\overline{x})+(-\overline{y}) = [\overline{x}+(-\overline{x})]+[\overline{y}+(-\overline{y})] = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$, de unde rezultă $-(\overline{x} + \overline{y}) = (-\overline{x}) + (-\overline{y})$.

În expresiile de forma $(-\overline{x}) + \overline{y} + (-\overline{z})$ se admite de a omite parantezele şi a scrie $-\overline{x} + \overline{y} - \overline{z}$. ◁

**Definiţie.** Operaţia binară $(-)$ care se defineşte prin formula $\overline{x} - \overline{y} = \overline{x} + (-\overline{y})$ se numeşte operaţia *"scăderii"* vectorilor. Vectorul $\overline{x} - \overline{y}$ se numeşte *diferenţa* dintre vectorul $\overline{x}$ şi vectorul $\overline{y}$. Faptul că prin unul şi acelaşi simbol "$-$" se notează două operaţii diferite (operaţia trecerii la vectorul opus şi operaţia binară a scăderii) nu duce la careva confuzii.

P r o p r i e t a t e a 4. În orice spaţiu liniar $\mathcal{L}$, pentru fiecare element $\overline{x}$ are loc egalitatea $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$, adică la "înmulţirea" convenţională a oricărui element $\overline{x}$ al spaţiului liniar cu numărul 0 se obţine elementul nul $\overline{0}$ al spaţiului liniar.

▷ Considerăm elementul $\overline{x} + 0 \cdot \overline{x}$. Atunci, pe baza axiomelor (5) şi (7), avem $\overline{x} + 0 \cdot \overline{x} = 1 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x} = (1 + 0)\overline{x} = 1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$ şi, prin urmare, după axioma (3), $0 \cdot \overline{x}$ este elementul $\overline{0}$, adică $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$. ◁

P r o p r i e t a t e a 5. Pendru orice vector $\overline{x}$ al spaţiului liniar $\mathcal{L}$, vectorul opus este $-\overline{x} = (-1) \cdot \overline{x}$, adică pentru fiecare element $\overline{x}$, elementul opus $-\overline{x}$ este egal cu produsul acestui element $\overline{x}$ cu numărul $(-1)$.

▷ Examinăm elementul $\overline{x} + (-1)\overline{x}$. Atunci în baza axiomelor (5), (7) şi a proprietăţii 4, obţinem $\overline{x} + (-1)\overline{x} = 1 \cdot \overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} = [1 + (-1)]\overline{x} = 0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$ şi, după axioma (4), elementul $(-1)\overline{x}$ este elementul opus al elementului $\overline{x}$, adică $(-1)\overline{x} = -\overline{x}$. ◁

P r o p r i e t a t e a 6. Pentru orice număr real $\alpha$ şi orice vector $\overline{x}$ al spaţiului liniar $\mathcal{L}$ au loc egalităţile

$$-(\alpha\overline{x}) = (-\alpha)\overline{x} = \alpha(-\overline{x}).$$

▷Într-adevăr, în baza proprietăţii 5, avem $-\alpha\overline{x} = (-1) \cdot \alpha\overline{x} = ((-1) \cdot \alpha)\overline{x} = (\alpha \cdot (-1))\overline{x} = \alpha((-1)\overline{x}) = \alpha(-\overline{x})$, ceea ce şi demon-

strează justeţea formulelor indicate mai sus, care ne permit să demonstrăm următoarele propoziţii. ◁

P r o p r i e t a t e a 7. Legile distributive au loc şi pentru *diferenţă*, adică pentru orice numere reale $\alpha$, $\beta$ şi oricare vectori $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathcal{L}$ au loc următoarele:

$$(\alpha - \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} - \beta\overline{x} \quad \text{şi} \quad \alpha(\overline{x} - \overline{y}) = \alpha\overline{x} - \alpha\overline{y}.$$

▷ $(\alpha - \beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + (-\beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + (-(\beta\overline{x})) = \alpha\overline{x} - \beta\overline{x}$;

$\alpha(\overline{x} - \overline{y}) = \alpha(\overline{x} + (-1)\overline{y}) = \alpha\overline{x} + (-\alpha)\overline{y} = \alpha\overline{x} + (-(\alpha\overline{y})) = \alpha\overline{x} - \alpha\overline{y}$. ◁

P r o p r i e t a t e a 8. Pentru orice număr $\alpha$ şi vectorul nul $\overline{0}$ al spaţiului liniar are loc egalitatea $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

▷ Într-adevăr, $\alpha \cdot \overline{0} = \alpha[\overline{x} + (-\overline{x})] = \alpha(\overline{x} - \overline{x}) = \alpha\overline{x} - \alpha\overline{x} = \alpha\overline{x} + (-\alpha\overline{x}) = \overline{0}$. ◁

P r o p r i e t a t e a 9. Dacă pentru un număr oarecare $\alpha$ şi un vector $\overline{x}$ are loc relaţia $\alpha\overline{x} = \overline{0}$, atunci *sau* $\alpha = 0$, *sau* $\overline{x} = \overline{0}$.

▷ Într-adevăr, fie că are loc egalitatea $\alpha\overline{x} = \overline{0}$. Atunci poate să fie numai una dintre două posibilităţi: sau $\alpha = 0$, sau $\alpha \neq 0$. Cazul $\alpha = 0$ confirmă afirmaţia noastră. Dacă însă $\alpha \neq 0$, atunci avem $\overline{x} = 1 \cdot \overline{x} = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)\overline{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\overline{x}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \overline{0} = \overline{0}$. ◁

P r o p r i e t a t e a 10. Într-un spaţiu liniar $\mathcal{L}$, orice egalitate poate fi formal simplificată prin factorul comun nenul, indiferent dacă acest factor este număr sau vector, adică din

$$\alpha\overline{x} = \beta\overline{x},\ \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow \alpha = \beta, \text{ iar din}$$

$$\alpha\overline{x} = \alpha\overline{y},\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}.$$

▷ Într-adevăr, dacă $\alpha\overline{x} = \beta\overline{x}$ şi $\overline{x} \neq \overline{0}$, atunci avem $\alpha\overline{x} + (-\beta\overline{x}) = \beta\overline{x} + (-\beta\overline{x})$; $\alpha\overline{x} - \beta\overline{x} = \overline{0}$; $(\alpha - \beta)\overline{x} = \overline{0}$. Întrucât $\overline{x} \neq \overline{0}$, rezultă că $\alpha - \beta = 0$, sau $\alpha = \beta$. Dacă însă $\alpha\overline{x} = \alpha\overline{y}$, $\alpha \neq 0$, atunci $\alpha(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0}$ şi deci $\overline{x} - \overline{y} = \overline{0}$, adică $\overline{x} = \overline{y}$, ceea ce trebuia demonstrat. ◁

Aşadar, *din punctul de vedere al operaţiilor de "înmulţire", "adunare" şi "scădere" convenţionale, formal au loc toate regulile transformărilor echivalente ale expresiilor algebrice.*

## 16.5. Combinaţii liniare şi acoperiri liniare

În prealabil, menţionăm că definiţiile, teoremele şi alte afirmaţii expuse în cap. 3 pentru spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ se extind asupra spaţiului liniar $\mathcal{L}$. Majoritatea propoziţiilor din acest capitol se demonstrează întocmai ca în capitolul 3, unde ele au fost demonstrate pentru $\mathbf{R}^n$. De aceea ne mărginim numai la formularea acestor propoziţii fără demonstraţie.

### 16.5.1. Combinaţie liniară de vectori

Considerăm în spaţiul liniar real $\mathcal{L}$ o mulţime finită de vectori arbitrari (nu numaidecât diferiţi) $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, pe care o vom numi *sistem de vectori.*

Un sistem de vectori se numeşte *subsistem* al altui sistem de vectori dacă el constă integral din vectorii unei părţi a sistemului al doilea. În particular, subsistemul poate să coincidă şi cu întreg sistemul de vectori.

Expresia

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k, \tag{16.1}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt numere reale (scalari) oarecare, se numeşte *combinaţie liniară* de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$. Numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se numesc *coeficienţii combinaţiei liniare.* Orice combinaţie liniară (16.1) de vectorii sistemului dat reprezintă un anumit vector nou $\overline{x} \in \mathcal{L}$:

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k, \tag{16.2}$$

care se obţine din sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ ca rezultat al realizării câtorva operaţii liniare. Despre vectorul $\overline{x}$ din (16.2) se spune că $\overline{x}$ *este o combinaţie* liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ (sau a sistemului de vectori) sau că $\overline{x}$ *se exprimă* (*se reprezintă*) *liniar* prin aceşti vectori.

În calitate de exemple de combinaţie liniară şi de reprezentare liniară a unui vector prin vectorii sistemului dat de vectori pot servi exemplele 1 şi 2 din p. 3.5, cap. 3.

**L e m a 16.1.** *Dacă un vector* $\overline{x}$ *al spaţiului liniar* $\mathcal{L}$ *se exprimă liniar prin vectorii unui sistem de vectori* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, *atunci*

*acest vector $\overline{x}$ se va exprima liniar şi prin vectorii oricărui sistem completat de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$, care conţine toţi vectorii sistemului iniţial de vectori.*

Această lemă se poate formula şi astfel: *dacă un vector $\overline{x}$ se exprimă liniar prin vectorii unui subsistem al sistemului dat de vectori, atunci acest vector se exprimă liniar şi prin vectorii întregului acest sistem de vectori.*

**T e o r e m a 16.2** (proprietatea de tranzitivitate). *Dacă un vector $\overline{z}$ este o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r$, iar fiecare dintre aceşti vectori, la rândul său, este o combinaţie liniară de vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s$ din spaţiul liniar $\mathcal{L}$, atunci şi vectorul $\overline{z}$ poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s$.*

▷ Lema 16.1 şi teorema 16.2 se demonstrează exact ca aceleaşi teoreme din cap. 3, unde ele au fost demonstrate pentru spaţiul $\mathbf{R}^n$ (a se vedea lema 3.1 şi teorema 3.1). ◁

### 16.5.2. Acoperire liniară

Mai jos vom expune cea mai generală metodă de definire a subspaţiilor liniare.

Fie $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ un sistem oarecare de vectori din spaţiul liniar $\mathcal{L}$. Se numeşte *acoperirea liniară* a sistemului de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de forma

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – oricare numere reale, şi o vom nota cu simbolul $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >$.

Se verifică uşor că acoperirea liniară $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $\mathcal{L}$.

▷ Într-adevăr, fie $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k$, $\overline{y} = \beta_1\overline{x}_1 + \beta_2\overline{x}_2 + \ldots + \beta_k\overline{x}_k$, unde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$.

Atunci $\overline{x} + \overline{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\overline{x}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{x}_2 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\overline{x}_k \in \in < \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >$, $\alpha\overline{x} = (\alpha\alpha_1)\overline{x}_1 + (\alpha\alpha_2)\overline{x}_2 + \ldots + (\alpha\alpha_k)\overline{x}_k \in \in < \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >, \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$.

Prin urmare, conform teoremei 16.1, $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >$ este subspaţiu liniar al lui $\mathcal{L}$. ◁

Se mai spune uneori că subspaţiul $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k >$ este generat de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ sau că vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ formează un *sistem de generatori* pentru acest subspaţiu.

Acoperirea liniară $< \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, x_k >$, evident, conţine vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, pe care ea este construită. Pe de altă parte, orice subspaţiu ce conţine vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ conţine necesar şi toate combinaţiile liniare ale acestor vectori. De aceea, *acoperirea liniară a vectorilor* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *este cel mai mic subspaţiu liniar ce conţine vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$.

## 16.6. Dependenţă şi independenţă liniară

Introducem noţiunea de dependenţă şi independenţă liniară a vectorilor spaţiului liniar $\mathcal{L}$ în modul următor.

**Definiţia 1.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar dependent* dacă cel puţin unul dintre aceşti vectori ai sistemului poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de ceilalţi $k-1$ vectori, de exemplu,

$$\overline{x}_k = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{x}_{k-1}, \tag{16.1}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ – numere reale.

**Definiţia 2.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar dependent* dacă există aşa numere reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, nu toate nule ($|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| \neq 0$), încât să avem

$$\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k \overline{x}_k = \overline{0}. \tag{16.2}$$

Pentru cazul în care toţi coeficienţii sunt nuli, această egalitate, evident, se respectă trivial. O egalitate de forma (16.2) se numeşte *relaţie de dependenţă liniară* a vectorilor $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$.

Definiţia 2 este echivalentă cu definiţia iniţială 1 (a se vedea demonstraţia din p. 3.6, cap. 3).

**Definiţia 3.** Un sistem de vectori se numeşte *liniar independent* dacă nici unul dintre vectorii sistemului nu poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori.

Mai des însă se foloseşte o altă definiţie a independenţei liniare, echivalentă acestei definiţii.

**Definiţia 4.** Un sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se numeşte *liniar independent* dacă relaţia

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0} \quad (\alpha_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, k)$$

este posibilă numai în cazul $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, adică dacă avem implicaţia

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Uneori, în loc de "sistem de vectori liniar independent" vom spune "sistem de vectori liniar independenţi" şi "vectorii liniar dependenţi $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$" în loc de "sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, liniar dependent".

În calitate de exemple de sisteme de vectori liniar dependente şi liniar independente pot servi cele patru exemple din p. 3.6, cap. 3.

**T e o r e m a 16.3.** *Dacă vectorul $\overline{x}$ se poate reprezenta (scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, atunci în cazul în care sistemul $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar independent, această reprezentare (scriere) este unică, iar în cazul în care acest sistem este liniar dependent – nu este unică.*

**T e o r e m a 16.4.** *Dacă un subsistem oarecare (adică o parte) a unui sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ este liniar dependent, atunci şi întreg sistemul este liniar dependent.*

Teorema 16.4 mai poate fi formulată şi astfel: *dacă un sistem de vectori este liniar dependent, atunci orice sistem completat care conţine integral sistemul dat de vectori de asemenea este liniar dependent.*

C o n s e c i n ţ ă. *Dacă un sistem de vectori este liniar independent, atunci şi orice subsistem al său de asemenea este liniar independent.*

**T e o r e m a 16.5.** *Dacă vectorul nul $\overline{0}$ se întâlneşte în sistemul de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$, atunci acest sistem de vectori este liniar dependent.*

**T e o r e m a 16.6.** *Dacă printre vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ se află astfel de vectori $\overline{x}_p$ şi $\overline{x}_q$, încât $\overline{x}_p = \lambda\overline{x}_q$, unde $\lambda$ – un număr real, atunci acest sistem de vectori este liniar dependent.*

**Teorema 16.7.** *Vectorii* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ *sunt liniar dependenţi atunci şi numai atunci când sau* $\overline{x}_1 = \overline{0}$, *sau un vector* $\overline{x}_q$, $2 \leq q \leq k$, *este combinaţie liniară de vectorii precedenţi.*

▷ Demonstraţiile teoremelor 16.3 – 16.7 în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ sunt întocmai ca şi demonstraţiile aceloraşi teoreme în spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ (a se vedea teoremele 3.2 – 3.7). ◁

## 16.7. Echivalenţa sistemelor de vectori. Bazele şi rangul unui sistem de vectori

Considerăm două sisteme de vectori

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k \tag{16.1}$$

şi

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m. \tag{16.2}$$

**Definiţia 1.** Două sisteme de vectori (16.1) şi (16.2) se numesc *echivalente* dacă orice vector al fiecăruia dintre aceste sisteme se exprimă liniar prin vectorii celuilalt sistem.

Cu alte cuvinte, două sisteme (16.1) şi (16.2) sunt echivalente dacă fiecare vector al primului sistem se exprimă liniar prin vectorii sistemului al doilea şi reciproc. Vom nota acest fapt (16.1)~(16.2) ("~" – semnul echivalenţei).

Noţiunea de echivalenţă a două sisteme posedă proprietatea de tranzitivitate, adică dacă $A \sim B$, $B \sim C$, atunci $A \sim C$, unde $A$, $B$, $C$ – sisteme de vectori oarecare. Aceasta rezultă nemijlocit din tranzitivitatea noţiunii de combinaţie liniară a vectorilor.

**Teorema 16.8.** *Dacă fiecare dintre vectorii unui sistem liniar independent* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *se exprimă liniar prin vectorii* $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m$, *atunci* $n \leq m$.

Consecinţă. *Sistemele echivalente liniar independente constau din unul şi acelaşi număr de vectori.*

Un exemplu de sisteme de vectori echivalente este citat în p. 3.7, cap. 3.

Fie dat un sistem arbitrar de vectori (16.1):

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k,$$

astfel încât nu toţi vectorii săi sunt egali cu vectorul nul $\overline{0}$ şi fie că subsistemul

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2 \ldots, \overline{e}_r \tag{16.3}$$

al sistemului dat (16.1) constă din numărul maxim $r$ ($r \leq k$) de vectori liniar independenţi. În particular, subsistemul (16.3) poate şi să coincidă cu sistemul (16.1). Fiecare dintre vectorii $\overline{e}_i$ este unul dintre vectorii $\overline{x}_j$ ai sistemului (16.1). Atunci, după cum este arătat în p. 3.8, cap. 3, *orice vector $\overline{x}$ al sistemului* (16.1) *se exprimă liniar prin vectorii subsistemului său* (16.3), *ce constă din numărul maxim de vectori liniar independenţi.*

**Definiţia 2.** Un subsistem liniar independent (16.3) al sistemului dat de vectori (16.1) se numeşte *bază* a acestui sistem de vectori (16.1) dacă fiecare vector $\overline{x}$ al sistemului (16.1) se poate reprezenta (scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii sistemului (16.3):

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_r\overline{e}_r, \tag{16.4}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sunt numere reale (coeficienţi), iar $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ – vectorii subsistemului (16.3). Conform teoremei 16.3, scrierea (16.4) este unică.

În genere, după cum am arătat pentru $\mathbf{R}^n$, sistemul de vectori (16.1) poate avea mai mult decât o singură bază, iar sistemul în care toţi vectorii sunt nuli nu are bază.

În termenii sistemelor echivalente definiţia bazei poate fi formulată în felul următor.

Se numeşte *bază* a sistemului de vectori (16.1) un subsistem echivalent al său de vectori (16.3), liniar independent.

**T e o r e m a 16.9.** 1) *Orice subsistem format din numărul maxim de vectori liniar independenţi ai unui sistem de vectori* (16.1) *este o bază a acestui sistem de vectori* (16.1);

2) *toate bazele sistemului dat de vectori* (16.1) *şi cele ale sistemelor echivalente cu el constau din unul şi acelaşi număr maxim de vectori liniar independenţi.*

Din teorema 16.9 se constată că numărul vectorilor bazei a sistemului de vectori este o caracteristică a acestui sistem de vectori.

**Definiţia 3.** Se numeşte *rangul* unui sistem de vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ numărul $r$ de vectori ai unei baze oarecare a sa.

Prin definiţie, rangul sistemului de vectori nuli se consideră egal cu zero.

Un exemplu de aflare a bazei şi a rangului unui sistem dat de vectori este citat în p. 3.8, cap. 3.

**T e o r e m a 16.10.** *Fiecare subsistem liniar independent al unui sistem de vectori poate fi completat până la o bază a acestui sistem.*

▷ Demonstraţiile teoremelor 16.8 – 16.10, care se referă la vectorii spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$, rămân în vigoare şi pentru vectorii spaţiului liniar $\mathcal{L}$ (a se vedea teoremele 3.8, 3.10, 3.11). ◁

## 16.8. Bază a unui spaţiu liniar. Dimensiune a spaţiului

Fie dat un spaţiu liniar arbitrar, care constă nu numai din vectorul nul.

În astfel de spaţiu există vectorii nenuli şi, prin urmare, există un sistem liniar independent ce constă, cel puţin, dintr-un singur vector. Sunt posibile două cazuri: sau există un sistem liniar independent ce conţine un număr oricât de mare de vectori, sau există un sistem liniar independent care conţine numărul maxim de vectori. În primul caz, spaţiul se numeşte *de dimensiune infinită*, în al doilea – *de dimensiune finită*.

După cum arată exemplul următor, spaţiu de dimensiune infinită există.

Fie $\{P(t)\}$ mulţimea tuturor polinoamelor de nedeterminata $t$, cu coeficienţi reali. Această mulţime de polinoame în raport cu operaţiile obişnuite a adunării polinoamelor şi a înmulţirii polinomului cu un număr, după cum e uşor de verificat, formează spaţiu liniar.

Orice sistem dintr-un număr finit de polinoame de forma

$$1, t, t^2, \ldots, t^m, \ldots$$

constituie în acest spaţiu un sistem liniar independent.

▷ Într-adevăr, pentru orice numere naturale $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_k$, pentru polinoamele $t^{m_1}, t^{m_2}, \ldots, t^{m_k}$ din egalitatea $\alpha_1 t^{m_1} +$

$+\alpha_2 t^{m_2} + \ldots + \alpha_k t^{m_k} = 0$ rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Aceasta înseamnă că spaţiul $\{P(t)\}$ este de dimensiune infinită. ◁

În continuare vom studia numai spaţii de dimensiune finită, de aceea cuvintele "de dimensiune finită" le omitem şi vom spune, simplu, "spaţiu liniar" înţelegând prin aceasta "spaţiu liniar de dimensiune finită".

Aşadar, fie că în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ constituie un sistem ce constă din numărul maxim $n$ de vectori liniar independenţi. Aceasta înseamnă că pentru orice vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$, sistemul $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n, \overline{x}$ va fi liniar dependent (altfel, sistemul $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ nu ar consta din numărul maxim de vectori liniar independenţi). Atunci, conform teoremei 16.7, vectorul arbitrar $\overline{x}$ al spaţiului $\mathcal{L}$ se exprimă liniar prin vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ ai acestui spaţiu.

**Definiţia 1.** Un sistem de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ din spaţiul liniar $\mathcal{L}$ se numeşte *bază* a acestui spaţiu $\mathcal{L}$, dacă:

1) $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ este un sistem de vectori, liniar independent;

2) pentru fiecare vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ există aşa numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, încât $\overline{x}$ se poate exprima (reprezenta, scrie) ca o combinaţie liniară de vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ sub forma

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n. \qquad (16.1)$$

Egalitatea (16.1) se numeşte *scrierea vectorului* $\overline{x}$ *în baza dată* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$. Egalitatea (16.1) se mai numeşte, de asemenea, şi *descompunerea vectorului* $\overline{x}$ *după vectorii bazei* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$.

Conform teoremei 16.3, această scriere (descompunere) (16.1) este unică.

**T e o r e m a 16.11.** 1) *Într-un spaţiu liniar nenul* $\mathcal{L}$ *există mai mult decât o singură bază;*

2) *toate baz le spaţiului liniar* $\mathcal{L}$ *constau din unul şi acelaşi număr de vectori.*

▷ 1) Într-adevăr, deoarece $\mathcal{L}$ este un spaţiu liniar de dimensiune finită, în el există un sistem $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ ce constă din numărul maxim $n$ de vectori liniar independenţi. După cum deja am arătat, orice vector $\overline{x}$ al spaţiului $\mathcal{L}$ se exprimă liniar prin aceşti vectori, adică

sistemul de vectori $\overline{e}_1, e_2, \ldots, \overline{e}_n$ este bază a lui $\mathcal{L}$. Scrierea vectorului arbitrar $\overline{x}$ în această bază se determină de formula (16.1). Având deja o bază, putem demonstra, exact ca în $\mathbf{R}^n$, că în spaţiul liniar nenul $\mathcal{L}$ există mai mult decât o singură bază (a se vedea teorema 3.13).

2) Pentru demonstraţia părţii a doua a teoremei este suficient să observăm că toate bazele unuia şi aceluiaşi spaţiu liniar reprezintă sisteme de vectori echivalente, liniar independente. După cum se ştie, atare sisteme conţin unul şi acelaşi număr de vectori. ◁

Din teorema demonstrată rezultă că numărul vectorilor în bază este o caracteristică a spaţiului liniar. Acest fapt duce la următoarea noţiune.

**Definiţia 2.** Numărul vectorilor în orice bază a spaţiului liniar $\mathcal{L}$ se numeşte *dimensiunea* acestui spaţiu şi se notează $dim\,\mathcal{L}$.

Spaţiul liniar $\mathcal{L}$ se numeşte *n-dimensional* dacă o bază a sa constă din $n$ vectori. Acest spaţiu îl vom nota cu $\mathcal{L}_n$, dacă este necesar de a indica dimensiunea $n$.

**T e o r e m a 16.12.** 1) *Fiecare sistem de $n+1$ vectori ai spaţiului liniar n-dimensional $\mathcal{L}$ este liniar dependent;*

2) *orice $n$ vectori liniar independenţi ai spaţiului $\mathcal{L}$ formează o bază a lui $\mathcal{L}$;*

3) *numărul maxim de vectori liniar independenţi ai spaţiului $\mathcal{L}$ este egal cu dimensiunea $n$ a acestui spaţiu.*

**T e o r e m a 16.13.** *Orice sistem de $k$ vectori liniar independenţi $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_k$, $k < n$, ai spaţiului liniar n-dimensional $\mathcal{L}$ poate fi completat până la o bază a acestui spaţiu.*

▷ Teoremele 16.12 şi 16.13 se demonstrează întocmai ca aceleaşi teoreme din cap. 3, înlocuind $\mathbf{R}^n$ prin $\mathcal{L}$ (a se vedea teoremele 3.14 şi 3.15). ◁

În următoarele exemple vom determina dimensiunea spaţiilor liniare examinate în p. 16.2 ca "exemple de spaţii liniare".

E x e m p l u l 1. Considerăm spaţiul vectorilor geometrici $V_3$. Vom demonstra că *orice trei vectori necoplanari $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ ai spaţiului $V_3$ constituie o bază a spaţiului $V_3$.*

Într-adevăr, fie că vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ sunt necoplanari. Atunci ei sunt liniar independenţi, fiindcă, în caz contrar, unul dintre ei, de exemplu $\bar{e}_3$, s-ar exprima liniar prin ceilalţi doi. Însă relaţia $\bar{e}_3 = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$ înseamnă că $\bar{e}_3$ este diagonala paralelogramului construit pe vectorii $\alpha_1\bar{e}_1$ şi $\alpha_2\bar{e}_2$ cu originea comună $O$. Deoarece $\alpha_1\bar{e}_1$ şi $\alpha_2\bar{e}_2$ sunt situaţi în planul $\bar{e}_1 O\bar{e}_2$, în el este situat şi $\bar{e}_3$, ceea ce contrazice condiţia dată.

Pe de alte parte, fiecare vector $\bar{x} = \overline{OA}$ al spaţiului $V_3$ poate fi exprimat liniar prin vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (fig. 16.1). În felul acesta, sistemul $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ este o bază a spaţiului $V_3$ al tuturor vectorilor geometrici, prin urmare, $V_3$ are dimensiunea 3, adică este un spaţiu liniar 3-dimensional. Indicile de jos al notaţiei $V_3$ indică dimensiunea.

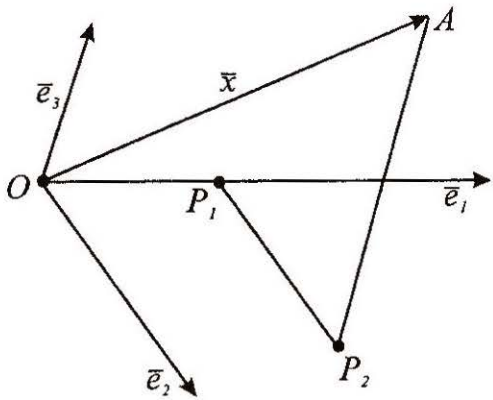



Fig. 16.1

În mod analog se demonstrează că mulţimea $V_2$ a tuturor vectorilor geometrici situaţi într-un plan este un spaţiu liniar 2-dimensional, iar mulţimea $V_1$ a tuturor vectorilor geometrici situaţi pe o dreaptă este un spaţiu liniar 1-dimensional.

Exemplul 2. Considerăm spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ al tuturor complexelor ordonate de $n$ scalari.

După cum se ştie (p. 3.9, cap. 3), spaţiul aritmetic $\mathbf{R}^n$ posedă baza canonică: $\bar{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \bar{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Numărul de vectori în această bază a spaţiului $\mathbf{R}^n$ este egal cu $n$.

Aşadar, dimensiunea spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$ este $n$ sau $\mathbf{R}^n$ este un spaţiu liniar $n$-dimensional.

Exemplul 3. Se verifică uşor că mulţimea funcţiilor de forma $f(t) = ae^t + be^{-t}$ formează un spaţiu liniar. Dimensiunea acestui spaţiu este egală cu doi. Aceasta rezultă din faptul că funcţiile $e^t$ şi $e^{-t}$ sunt liniar independente (egalitatea $\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-t} = 0$ este adevărată numai pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) şi formează o bază a spaţiului liniar considerat.

Noţiunea de "bază" pentru subspaţiu se introduce în mod analog ca şi pentru spaţiu.

**Definiţia 3.** Fie $\mathcal{L}$ un spaţiu liniar şi $S$ un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{L}$. Sistemul liniar independent de vectori $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_r$ ce aparţin subspaţiului $S$ se numeşte *bază* a subspaţiului $S$, dacă orice vector $\overline{x}$ din $S$ se exprimă liniar prin vectorii acestui sistem.

Subspaţiul $S$ se numeşte *r-dimensional* dacă o bază a sa constă din $r$ vectori, adică $dim\, S = r$.

Subspaţiul nul $\{\overline{0}\} \subset \mathcal{L}$ nu are bază . Prin definiţie, $dim\{\overline{0}\} = 0$.

Exemplul 4.

a. Ca bază a subspaţiului ce constă din vectorii de forma $\overline{x} = \alpha\overline{e}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$, iar $\overline{e}$ – un vector nenul fixat (a se vedea exemplul 2 din p. 16.3), serveşte sistemul de un singur vector $\overline{e}$. Dimensiunea subspaţiului este egală cu 1.

b. Drept bază a subspaţiului alcătuit din vectorii de forma $\overline{x} = \alpha\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_2$. unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ sunt liniar independenţi, serveşte sistemul din aceşti doi vectori $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$. Dimensiunea subspaţiului este egală cu 2.

## 16.9. Izomorfismul spaţiilor liniare

Noţiunea de spaţiu liniar constă din două părţi diferite. În primul rând, spaţiul liniar este o mulţime de elemente, numite vectori, în al doilea rând, în spaţiul liniar acţionează operaţiile adunării şi a înmulţirii cu un număr. De aceea, sau putem să ne interesăm ce sunt vectorii, sau putem să ne situăm pe punctul de vedere contrar şi să ne interesăm numai de proprietăţile operaţiilor indicate. Din această cauză, *două spaţii* aranjate la fel după structura lor în raport cu operaţiile adunării şi a înmulţirii cu un număr le vom considera că posedă proprietăţi la fel, identice, sau că sunt *izomorfe*.

Mai exact, noţiunea de izomorfism poate fi formulată în modul următor.

**Definiţie.** Două spaţii liniare $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}'$ se numesc *izomorfe* dacă între vectorii lor se poate stabili o corespondenţă bijectivă, astfel încât dacă vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ ai spaţiului $\mathcal{L}$ le corespund respectiv vectorii $\overline{x}'$ şi $\overline{y}'$ ai spaţiului $\mathcal{L}'$, atunci sumei $\overline{x}+\overline{y}$ de vectori ai primului spaţiu îi va corespunde suma $\overline{x}'+\overline{y}'$ de vectorii corespunzători ai celui de al doilea, iar produsului $\alpha\overline{x}$ (al unui număr $\alpha$ cu un vector al primului spaţiu) îi va corespunde produsul $\alpha\overline{x}'$ (al aceluiaşi număr cu vectorul corespunzător al celui de al doilea spaţiu).

Să enumerăm cele mai simple proprietăţi ale izomorfismului.

1. *Prin izomorfism vectorul nul se transformă (trece) în vectorul nul:*

$$\gamma:\ \overline{0}\mapsto\overline{0}'.$$

▷ Într-adevăr, prin izomorfismul $\gamma$: $\mathcal{L}\to\mathcal{L}'$, dacă un vector $\overline{x}\in\mathcal{L}$ trece în vectorul $\overline{x}'$ din $\mathcal{L}'$, atunci din $\overline{x}\mapsto\overline{x}'$ rezultă $\alpha\overline{x}\mapsto\alpha\overline{x}'$ pentru orice $\alpha$. Punând $\alpha=0$, obţinem $0\cdot\overline{x}\mapsto 0\cdot\overline{x}'$, adică vectorul nul $\overline{0}$ al primului spaţiu $\mathcal{L}$ trece în vectorul nul $\overline{0}'$ al spaţiului al doilea. ◁

2. *Prin izomorfism vectorii liniar independenţi trec în liniar independenţi.*

▷ Într-adevăr, fie că vectorii liniar independenţi $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_m$ din primul spaţiu $\mathcal{L}$ trec în vectorii $\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_m$ ai celui de al doilea $\mathcal{L}'$. Examinăm relaţia $\beta_1\overline{b}_1+\beta_2\overline{b}_2+\ldots+\beta_m\overline{b}_m=\overline{0}'$. Conform definiţiei izomorfismului, membrului stâng al acestei egalităţi îi corespunde în primul spaţiu $\mathcal{L}$ vectorul $\beta_1\overline{a}_1+\beta_2\overline{a}_2+\ldots+\beta_m\overline{a}_m$, iar vectorului nul $\overline{0}'$ îi corespunde în primul spaţiu vectorul nul $\overline{0}$. Prin urmare, $\beta_1\overline{a}_1+\beta_2\overline{a}_2+\ldots+\beta_m\overline{a}_m=\overline{0}$. Fiindcă vectorii $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_m$ sunt liniar independenţi, rezultă că $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_m=0$, adică vectorii $\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_m$ sunt liniar independenţi. ◁

3. *Orice bază a unui spaţiu liniar prin izomorfism trece din nou într-o bază a spaţiului liniar corespunzător.*

▷ Într-adevăr, fie că $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ este o bază a primului spaţiu $\mathcal{L}$ şi prin izomorfism aceşti vectori trec în vectorii $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$,

respectiv. Conform proprietăţii 2, acest sistem este liniar independent.

Fie $\overline{x}'$ un vector arbitrar al spaţiului $\mathcal{L}'$, iar $\overline{x}$ – preimaginea sa prin izomorfismul dat, adică $\overline{x} \mapsto \overline{x}'$. Conform condiţiei, vectorul $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ poate fi reprezentat sub forma $\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n$. După definiţia aplicaţiei izomorfe, suma $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n$ trebuie să treacă în suma $\alpha_1\overline{e}'_1 + \alpha_2\overline{e}'_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}'_n$ şi întrucât $\overline{x}$ trece în $\overline{x}'$, avem $\overline{x}' = \alpha_1\overline{e}'_1 + \alpha_2\overline{e}'_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}'_n$. Aceasta şi înseamnă că vectorii $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$ formează bază a spaţiului $\mathcal{L}'$, adică prin izomorfism baza trece în bază. ◁

Din proprietatea 3 nemijlocit ruzultă:

4. *Spaţiile liniare izomorfe au aceeaşi dimensiune.*

5. *Dacă două spaţii liniare au aceeaşi dimensiune, atunci ele sunt izomorfe.*

   ▷ Alegem în fiecare dintre spaţiile date $\mathcal{L}$ gi $\mathcal{L}'$ câte o bază oarecare, de exemplu, $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ şi $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$. Vectorii

$$\overline{x} = \alpha\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n,$$

$$\overline{x}' = \alpha_1\overline{e}'_1 + \alpha_2\overline{e}'_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}'_n,$$

   îi vom numi *corespunzători.*

   Uşor se arată că asocierea $\gamma$: $\overline{x} \mapsto \overline{x}'$ este un izomorfism, ceea ce şi demonstrează afirmaţia dată. ◁

Proprietăţile enumerate mai sus ale spaţiilor izomorfe arată că singura caracteristică semnificativă a spaţiului liniar de dimensiune finită este dimensiunea sa.

Fiecare spaţiu liniar se defineşte prin dimensiunea sa cu exactitate de până la izomorfism.

De aceea, *spaţiile vectorilor linie de lungimea n, pentru* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *cu exactitate de până la izomorfism epuizează în genere toate spaţiile liniare de dimensiune finită.* În particular, spaţiul obişnuit $V_3$ al segmentelor orientate este izomorf spaţiului vectorilor linie de lungimea 3.

Din cele expuse mai sus rezultă că studierea tuturor spaţiilor liniare $n$-dimensionale se reduce la studierea numai a singurului spaţiu aritmetic $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$. Operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un

număr în orice spaţiu liniar $n$-dimensional vor avea aceleaşi proprietăţi ca şi operaţiile respective în spaţiul $\mathbf{R}^n$.

## 16.10. Coordonatele vectorului. Operaţii liniare cu vectori daţi prin coordonate

Baza are o însemnătate colosală la studierea spaţiilor liniare, întrucât operaţiile de "adunare" şi de "înmulţire cu un număr", efectuate asupra vectorilor spaţiului liniar $\mathcal{L}$, fiind dată o bază oarecare, pot fi reduse la efectuarea operaţiilor respective asupra numerelor. Pentru aceasta, este suficient de a introduce coordonatele în spaţiul liniar.

**Definiţie.** Fiecare bază a spaţiului liniar $\mathcal{L}$ ai cărei vectori se iau într-o anumită ordine (adică un sistem ordonat de aceşti vectori) o vom numi *bază de coordonate*, sau *sistem de coordonate*, în spaţiul liniar $\mathcal{L}$.

În felul acesta, dacă

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n \tag{16.1}$$

este o bază de coordonate în $\mathcal{L}$, atunci aceeaşi vectori, luaţi în altă ordine, formează o altă bază de coordonate în $\mathcal{L}$. Această bază o vom nota uneori sub forma $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ sau $\{\overline{e}_i\}$, sau $\{\overline{e}\}$.

Se observă că fiecare vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ poate fi scris în mod unic în baza de coordonate (16.1) sub forma:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n. \tag{16.2}$$

Numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, adică coeficienţii acestei scrieri, se numesc *coordonatele vectorului* $\overline{x}$ în baza de coordonate dată (16.1). Faptul că vectorul $\overline{x}$ are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, luate în ordinea respectivă, îl vom nota astfel:

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{sau} \quad \overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{16.3}$$

Formula (16.3) poate fi considerată ca notarea simbolică a formulei (16.2) în baza de coordonate (16.1). Formulele (16.2) şi (16.3) sunt echivalente. Fiecare dintre ele înseamnă una şi aceeaşi noţiune, şi anume, că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza dată (16.1).

Complexul ordonat $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care constă din coordonatele respective ale vectorului $\overline{x}$ în baza de coordonate (16.1) a spaţiului

liniar $\mathcal{L}$ îl vom numi *linia de coordonate* a acestui vector $\overline{x}$, iar coloana, sau matricea-coloană, compusă din coordonatele respective ale vectorului $\overline{x}$ în baza (16.1):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se numeşte *coloana de coordonate* a vectorului $\overline{x}$ în această bază.

Din unicitatea descompunerii (16.2) rezultă că doi vectori $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ determinaţi prin coordonatele lor în baza dată $(\overline{e})$ sunt egali atunci şi numai atunci când coordonatele lor respective sunt egale:

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$

**Teorema 16.14.** *Dacă*

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

*atunci*

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

*şi*

$$\alpha\overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

*adică dacă doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ din spaţiul liniar $\mathcal{L}$ sunt daţi prin coordonatele lor într-o bază oarecare $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, atunci la adunarea acestor vectori, coordonatele lor corespunzătoare se adună, iar la înmulţirea vectorului arbitrar $\overline{x}$ cu un număr oarecare $\alpha$, toate coordonatele acestui vector se înmulţesc cu numărul $\alpha$.*

▷ Această teoremă se demonstrează pentru vectorii din spaţiul liniar $\mathcal{L}$ întocmai ca pentru $\mathbf{R}^n$ (a se vedea teorema 3.19). ◁

**Teorema 16.15.** 1) *Sistemul liniar independent de vectori are sistemul coloanelor (liniilor) de coordonate ale sale de asemenea liniar independente şi reciproc;*

2) *fiecare relaţie de dependenţă liniară a unui sistem de vectori are loc şi pentru sistemul de coloane (linii) de coordonate corespunzătoare şi reciproc.*

▷ Demonstraţia teoremei în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ este aceeaşi ca şi în spaţiul $\mathbf{R}^n$ (a se vedea teorema 3.20). ◁

## 16.11. Combinaţii liniare de vectori daţi prin coordonate şi legătura lor cu sistemele de ecuaţii liniare

Cercetarea multor probleme legate de dependenţa liniară se reduce la rezolvarea următoarei probleme.

*Fie că în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ de dimensiunea $n$ este dat un sistem de vectori*

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k \tag{16.1}$$

*şi un vector oarecare $\overline{b}$. Trebuie de stabilit dacă vectorul $\overline{b}$ este combinaţie liniară de vectorii sistemului dat* (16.1) *şi de aflat coeficienţii acestei combinaţii liniare.*

Raţionăm astfel. Dacă vectorul $\overline{b}$ este combinaţie liniară de vectorii sistemului (16.1), atunci există astfel de numere $x_1, x_2, \ldots, x_k$, încât

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_k\overline{a}_k = \overline{b}. \tag{16.2}$$

Prin urmare, problema pusă se reduce la cercetarea ecuaţiei vectoriale (16.2) în raport cu numerele $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Presupunem că vectorii sunt daţi prin coordonatele lor într-o bază oarecare $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ a acestui spaţiu, adică

$$\begin{aligned}
\overline{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}),\\
\overline{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}),\\
\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\\
\overline{a}_k &= (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}),\\
\overline{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_n).
\end{aligned}$$

Efectuând în (16.2) operaţiile liniare respective asupra coordonatelor vectorilor şi egalând coordonatele respective ale vectorilor din membrul stâng şi cel drept ai acestei ecuaţii vectoriale, obţinem:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &=& b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &=& b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k &=& b_n.
\end{array}\right. \tag{16.3}$$

Acest sistem de ecuaţii liniare exprimă forma de scriere prin coordonate a ecuaţiei (16.2), adică ecuaţia vectorială (16.2) şi sistemul de ecuaţii liniare (16.3) sunt echivalente: (16.2)$\Leftrightarrow$(16.3). Se spune că sistemul liniar (16.3) este compatibil, dacă el are cel puţin o soluţie, şi

incompatibil în cazul contrar. În felul acesta, răspunsul la întrebarea dacă vectorul $\overline{b}$ este combinaţie liniară de vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ sau nu se determină de compatibilitatea sau incompatibilitatea sistemului (16.3). *Dacă sistemul* (16.3) *este compatibil, atunci orice soluţie a sa dă coeficienţii descompunerii vectorului* $\overline{b}$ *după sistemul de vectori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$.

Dacă ne va interesa de este sistemul (16.1) liniar dependent sau nu, este suficient, evident, ca în egalitatea (16.2) să luăm în loc de $\overline{b}$ vectorul nul $\overline{0}$. Atunci vom obţine relaţia dependenţei liniare:

$$x_1\overline{a}_1 + \overline{x}_2\overline{a}_2 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \overline{0}, \tag{16.4}$$

care, în baza (16.2) şi (16.3), este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii liniare omogene:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k &= 0. \end{cases} \tag{16.5}$$

De aceea, *sistemul de vectori* (16.1) *este liniar dependent atunci şi numai atunci când sistemul de ecuaţii liniare omogene* (16.5) *are o soluţie nenulă* $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Dacă sistemul omogen (16.5) are numai singura soluţie nulă $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, atunci sistemul de vectori (16.1) este liniar independent.

E x e m p l u. Vectorii $\overline{a}_1(2,1,0,1)$, $\overline{a}_2(1,-1,2,1)$, $\overline{a}_3(1,2,-2,0)$ sunt liniar dependenţi, fiindcă egalitatea vectorială

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{0}$$

este echivalentă cu sistemul de ecuaţii liniare omogene

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

iar acest sistem de ecuaţii, după cum e uşor de stabilit, are soluţii nenule, de exemplu: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -1$.

## 16.12. Trecerea de la o bază la alta. Matricea de trecere

În unul şi acelaşi spaţiu liniar $\mathcal{L}$ există diverse baze de coordonate, adică sisteme de coordonate. De aceea apare întrebarea: cum se vor transforma coordonatele vectorului dacă vom trece de la un sistem de coordonate la altul.

Pentru a da răspuns la această întrebare, alegem în $\mathcal{L}$ două sisteme de coordonate (baze):

$$\{\overline{e}_i\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\} \tag{16.1}$$

şi

$$\{\overline{e}'_i\} = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n\}. \tag{16.2}$$

Convenţional primul sistem îl vom numi "vechi" (sau baza "veche"), iar pe cel de al doilea – "nou" (sau baza "nouă"). Fiindcă vectorii sistemului (16.1) formează o bază a spaţiului $\mathcal{L}$, vectorii sistemului (16.2) se exprimă liniar prin vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ ai sistemului (16.1).

Fie că scrierile vectorilor sistemului (16.2) în baza (16.1) sunt:

$$\begin{array}{rcl} \overline{e}'_1 & = & \tau_{11}\overline{e}_1 + \tau_{21}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{n1}\overline{e}_n, \\ \overline{e}'_2 & = & \tau_{12}\overline{e}_1 + \tau_{22}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{n2}\overline{e}_n, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{e}'_n & = & \tau_{1n}\overline{e}_1 + \tau_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + \tau_{nn}\overline{e}_n, \end{array} \tag{16.3}$$

unde $\tau_{ij}$ – coeficienţii corespunzători ai scrierii $j$, adică numere cunoscute.

Din coordonatele $\tau_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ale vectorilor $\overline{e}'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în baza $\{\overline{e}_i\}$ compunem matricea pătratică $T$ care are drept coloane ale sale întocmai coloanele de coordonate ale vectorilor $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$:

$$T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{bmatrix}. \tag{16.4}$$

**Definiţie.** Se numeşte *matricea de trecere* de la baza "veche" $\{\overline{e}_i\}$ la baza "nouă" $\{\overline{e}'_i\}$ matricea $T$ a cărei coloană $j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ este coloana de coordonate a vectorului $\overline{e}'_j$ în baza $\{\overline{e}_i\}$ (a se compara (16.3) cu (16.4)).

*Matricea de trecere $T$ este inversabilă, adică există matricea inversă $T^{-1}$.*

▷ Această afirmaţie rezultă din faptul că coloanele matricei $T$ sunt coloanele de coordonate ale vectorilor $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n$ în baza $\{\overline{e}_i\}$ şi ei, ca vectori ai bazei, sunt liniar independenţi. De aceea, coloanele matricei $T$, conform teoremei 16.15, sunt liniar independente. Aceasta înseamnă (a se vedea teorema 5.5 şi consecinţa 2 a teoremei 6.4) că matricea $T$ este inversabilă. ◁

Fie $\overline{x}$ un vector arbitrar din spaţiul liniar $\mathcal{L}$ şi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ – liniile de coordonate ale sale în bazele $\{\overline{e}_i\}$ şi $\{\overline{e}'_i\}$, respectiv. Atunci are loc formula

$$X = TX', \tag{16.5}$$

unde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad \text{– coloanele de coordonate}$$

ale vectorului $\overline{x}$ în bazele $\{\overline{e}_i\}$ şi $\{\overline{e}'_i\}$, respectiv, $T$ – matricea de trecere de la baza "veche" $\{\overline{e}_i\}$ la baza "nouă" $\{\overline{e}'_i\}$.

Formula (16.5) exprimă următoarea *regulă* de transformare a coordonatelor: *coloana de coordonate veche este egală cu produsul matricei de trecere (de la baza veche la cea nouă) prin coloana de coordonate nouă.*

Deducerea formulei (16.5), precum şi două exemple de matrice de trecere şi de aplicaţii ale ei, a se vedea în p. 3.12, cap. 3.

## 16.13. Spaţii euclidiene

### 16.13.1. Definiţia spaţiului euclidian

În spaţiul obişnuit $V_3$ al vectorilor-segmente se numeşte produsul scalar $(\overline{x}, \overline{y})$ a doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ produsul lungimilor acestor vectori prin cosinusul unghiului dintre ei:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = |\overline{x}| \cdot |\overline{y}| \cos\varphi. \tag{16.1}$$

Dacă vectorii $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ sunt daţi prin coordonatele lor $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ în sistemul rectangular de coordonate definit de trei versori ai axelor, reciproc perpendiculari, $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, atunci produsul scalar se exprimă prin formula

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \tag{16.2}$$

iar lungimea vectorului – prin egalitatea

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{16.3}$$

Pentru ca un spaţiu liniar abstract $\mathcal{L}$ să devină mai bogat în proprietăţi, în el, în afară de operaţiile de "adunare" convenţională şi de "înmulţire cu un număr" convenţională, care definesc acest spaţiu liniar, deseori se introduce încă o operaţie, ce reprezintă o generalizare a produsului scalar al vectorilor-segmente în spaţiul obişnuit $V_3$. Dar în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ încă nu am introdus noţiunea de lungime şi de unghi şi de aceea, pentru a defini produsul scalar, nu putem folosi formula (16.1). Totuşi acest produs poate fi definit printr-o formulă similară formulei (16.2).

**Definiţie.** Se numeşte *produs scalar* pe un spaţiu liniar real $\mathcal{L}$ o regulă conform căreia fiecărei perechi de vectori $\overline{x}, \overline{y}$ din $\mathcal{L}$ i se asociază un număr real, notat prin simbolul $(\overline{x}, \overline{y})$, astfel încât $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathcal{L}$ şi $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;

2. $(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$;

3. $(\alpha \overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y})$;

4. $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$ oricare ar fi $\overline{x} \neq \overline{0}$; $(\overline{x}, \overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Numărul real $(\overline{x}, \overline{y})$ asociat vectorilor $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{L}$ se numeşte *produsul scalar* al acestor vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$. Un spaţiu liniar $\mathcal{L}$ echipat cu un produs scalr se numeşte *spaţiu euclidian*. Condiţiile 1 – 4 se numesc *axiomele* spaţiului euclidian. Acest spaţiu, de obicei, se notează prin $\mathcal{E}_n$ (sau $E_n$), dacă dimensiunea lui este $n$.

Exemplul 1. Fie dat spaţiul liniar $V_3$ al vectorilor-segmente. Operaţia produsului scalar a doi vectori, definită în el ca de obicei (prin formula (16.1)), evident, satisface axiomele $1-4$. De aceea acest spaţiu liniar cu operaţia introdusă a produsului scalar prin formula (16.1) este un spaţiu euclidian.

Exemplul 2. Fie dat spaţiul liniar al vectorilor-linie $\mathbf{R}^n$. Numim produsul scalar a doi vectori $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ numărul $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$. Se verifică uşor că se satisfac toate axiomele $1-4$ şi de aceea acest spaţiu cu operaţia introdusă a produsului scalar prin formula de mai sus este un spaţiu euclidian.

### 16.13.2. Norma vectorului. Unghiul dintre doi vectori

În spaţiul euclidian se introduce noţiunea de normă a vectorului, care este generalizarea noţiunii de lungime pentru cazul spaţiului euclidian $n$-dimensional.

**Definiţia 1.** Se numeşte *norma* (uneori "*lungimea*") vectorului $\overline{x}$ în spaţiul euclidian $\mathcal{E}_n$ numărul $\sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}$. Se notează norma (lungimea) vectorului $\overline{x}$ cel mai des prin simbolul $|\overline{x}|$.

Aşadar, prin definiţie,

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}.$$

De aici $(\overline{x}, \overline{x}) = |\overline{x}|^2$.

**Teorema 16.16.** *Oricare ar fi vectorii $\overline{x}$, $\overline{y}$ dintr-un spaţiu euclidian, au loc inegalităţile:*

1. $|(\overline{x}, \overline{y})| \leq |\overline{x}| \cdot |\overline{y}|$,
2. $|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$.

Prima dintre aceste egalităţi se numeşte *inegalitatea Cauchy – Buniakovski.* Ea înseamnă că modulul produsului scalar a doi vectori este cel mult egal cu produsul lungimilor celor doi vectori. A doua egalitate se numeşte *inegalitatea triunghiului* (*Mincowski*) şi înseamnă că norma (lungimea) sumei a doi vectori nu întrece suma normelor (lungimilor) acestor vectori.

▷ Deducerea acestor formule, efectuată pentru vectorii din $\mathbf{R}^n$ rămâne în vigoare şi pentru vectorii spaţiului euclidian $\mathcal{E}_n$ (a se vedea formulele (3.4) şi (3.6) din p. 3.3, cap. 3). ◁

Pentru spaţiul euclidian arbitrar $\mathcal{E}_n$ se generalizează, de asemenea, şi noţiunea de "unghi între doi vectori".

**Definiţia 2.** Se numeşte *unghiul dintre doi vectori nenuli* $\overline{x}$ *şi* $\overline{y}$ în spaţiul euclidian unghiul $\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ cosinusul căruia se determină prin formula

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{|\overline{x}| \cdot |\overline{y}|},$$

ca şi în spaţiul obişnuit al vectorilor-segmente.

### 16.13.3. Bază ortonormată

Ca generalizare a noţiunii de perpendicularitate a vectorilor geometrici în spaţiul euclidian se introduce noţiunea de ortogonalitate a vectorilor. Doi vectori $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ din spaţiul euclidian $\mathcal{E}_n$ se numesc *ortogonali* dacă produsul scalar al lor este egal cu zero:

$$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

**Definiţie.** O bază formată din vectorii $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ în spaţiul euclidian se numeşte *bază ortogonală* dacă orice doi vectori $\overline{e}_i$, $\overline{e}_j$ $(i \neq j)$ a ei sunt ortogonali. Dacă, în plus, normele vectorilor bazei ortogonale $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ sunt egale cu 1, atunci baza se numeşte *bază ortonormată*, adică dacă

$$(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq j; \\ 1 & \text{pentru } i = j, \end{cases}$$

unde $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Dacă baza constă numai dintr-un singur vector, atunci de asemenea vom numi-o ortgonală.

Ca exemplu de bază ortonormată poate servi baza canonică a spaţiului aritmetic $\mathbf{R}^n$: $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

În mod analog ca şi în $\mathbf{R}^n$, se poate arăta că în spaţiul euclidian $\mathcal{E}_n$, fiind dată o bază arbitrară $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, totdeauna se poate construi o bază ortonormată a sa $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ (a se vedea procesul de ortogonalizare expus în p. 3.13.2, cap. 3). Deci în orice spaţiu euclidian există bază ortonormată.

Se poate de asemenea de demonstrat (întocmai ca în $\mathbf{R}^n$) că în spaţiul euclidian $\mathcal{E}_n$ scrierea vectorului arbitrar $\overline{x}$ al acestui spaţiu în baza ortonormată $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ a sa are forma:

$$\overline{x} = (\overline{x}, \overline{e}_1)\overline{e}_1 + \ldots + (\overline{x}, \overline{e}_n)\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}, \overline{e}_i)\overline{e}_i$$

(a se vedea demonstraţia teoremei 3.22).

## Exerciţii

**1.** Formează oare un spaţiu liniar polinoamele: a) de gradul $n$, b) de grad mai mic sau egal cu $n$, c) de grad mai mare sau egal cu $n$ ($n \neq 0$)?

**2.** Formează oare un spaţiu liniar toţi vectorii planului, neparaleli unei axe?

**3.** Fie $\mathbf{R}_+^*$ mulţimea tuturor numerelor reale pozitive. Admitem în calitate de "adunare" convenţională operaţia înmulţirii obişnuite a numerelor, iar ca "înmulţire cu un număr" convenţională – operaţia ridicării la puterea $\alpha$. Va fi oare această mulţime cu operaţiile indicate un spaţiu liniar?

**4.** Sunt oare liniar dependenţi vectorii:

a) $\overline{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\overline{x}_2 = (3, 6, 7)$;

b) $\overline{x}_1 = (5, 4, 3)$, $\overline{x}_2 = (3, 3, 2)$, $\overline{x}_3 = (8, 1, 3)$?

**5.** Se poate oare în spaţiul polinoamelor de grad nu mai mare decât doi de ales în calitate de bază polinoamele:

a) $1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 + 2t$;

b) $1 + t^2$, $1 - t^2$, $1 + 2t^2$?

**6.** Sunt daţi patru vectori $\overline{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\overline{a}_2 = (7, 14, 25)$, $\overline{a}_3 = (13, 12, 16)$ şi $\overline{b} = (0, 18, 30)$. Să se arate că vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ formează o bază a spaţiului 3-dimensional $\mathbf{R}^3$ al vectorilor-linie de lungimea 3 şi să se reprezinte vectorul $\overline{b}$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$.

**7.** Să se demonstreze că spaţiile liniare izomorfe au aceeaşi dimensiune.

**8.** Să se demonstreze că dacă două spaţii liniare au aceeaşi dimensiune, atunci ele sunt izomorfe.

**9.** În spaţiul vectorilor linie de lungimea 3 se ia sistemul de coordonate ce constă din vectorii $(1,3,5)$, $(6,3,2)$, $(3,1,0)$. Care sunt în acest sistem liniile de coordonate ale vectorilor $(3,7,1)$, $(0,0,1)$, $(2,3,6)$, $(1,1,1)$?

**10.** Spaţiul $\mathcal{L}$ este format din polinoamele de grad nu mai mare ca $n$, de nedeterminata $t$. Să se arate că polinoamele $1, t-1$, $(t-1)^2, \ldots, (t-1)^n$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{L}$. Să se găsească în această bază liniile de coordonate ale polinoamelor $2-3t+t^2, t^n$.

**11.** Avem sistemul de vectori $\overline{x}_1(1,1,1)$, $\overline{x}_2(0,0,1)$, $\overline{x}_3(2,2,3)$, $\overline{x}_4(2,-1,0)$, $\overline{x}_5(1,2,1)$. Să se aleagă din acest sistem un subsistem ce constă din numărul maxim de vectori liniar independenţi.

**12.** Este dată baza de coordonate $\overline{e}_1 = (1,0,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0)$, $\overline{e}_3 = (0,0,1)$ şi vectorul $\overline{a}(3,0,4)$ în această bază. Să se construiască o bază nouă, substituind vectorul $\overline{e}_1$ cu vectorul $\overline{a}$. Care coordonate va avea vectorul $\overline{x}$ în baza nouă de coordonate, dacă în cea veche $\overline{x}(6,9,12)$?

**13.** Să se determine toate subspaţiile liniare ale spaţiului liniar 3-dimensional.

**14.** Formează oare un subspaţiu liniar vectorii geometrici ai planului ale căror extremităţi sunt situate în I cadran (se presupune că vectorii au punctul lor de aplicaţie în originea de coordonate)?

**15.** Formează oare un subspaţiu liniar în spaţiul liniar $\mathcal{L}$ mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ din $\mathcal{L}$?

**16.** Să se demonstreze că mulţimea tuturor complexelor ordonate de patru numere $(x,y,u,v)$, pentru care se satisfac relaţiile $2x - 3y + 5u + v = 0$ şi $-3x + 2y + v = 0$, formează un subspaţiu liniar al spaţiului vectorial al tuturor complexelor ordonate de patru numere.

**17.** Să se demonstreze că polinoamele de o nedeterminată, de grad nu mai mare ca $n$, formează un subspaţiu al spaţiului vectorial al polinoamelor de aceeaşi nedeterminată cu coeficienţi reali.

**18.** Cum de introdus produsul scalar în spaţiul polinoamelor de o singură nedeterminată, de grad nu mai mare ca $n$, cu coeficienţi reali?

**19.** Vectorii liniar independenţi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt daţi în spaţiul $V_3$ prin coordonatele lor rectangulare. Să se afle un vector nenul ortogonal la ambii aceşti vectori.

**20.** Sunt daţi doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Pentru ce condiţii asupra numărului $\alpha$ vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b} + \alpha\overline{a}$ vor fi ortogonali?

**21.** În plan se fixează un sistem de coordonate, ce constă din doi vectori reciproc perpendiculari de lungimea 1, şi după aceasta se efectuează transformarea coordonatelor cu matricea de trecere

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Ce condiţii trebuie să satisfacă numerele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pentru ca vectorii sistemului nou de coordonate să fie reciproc perpendiculari şi să aibă lungimea 1?

**22.** Să se demonstreze că norma sumei oricărui număr de vectori nu întrece suma normelor acestor vectori.

**23.** Să se demonstreze că dacă produsul scalar al oricăror doi vectori geometrici ai spaţiului euclidian se exprimă prin egalitatea (16.2) din p. 16.13.1, atunci baza în raport cu care sunt luate coordonatele este ortonormată.

**24.** Să se de

CAPITOLUL 17

# Operatori liniari

## 17.1. Noţiunea de operator liniar

### 17.1.1. Definiţiile de bază

Fie $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ două spaţii liniare, ambele reale sau ambele complexe, dimensiunile cărora sunt egale, respectiv, cu $n$ şi $m$.

**Definiţia 1.** Se numeşte *operator* $f$ ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$ o aplicaţie (corespondenţă) de tipul $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ care asociază fiecărui vector $\overline{x}$ al spaţiului $\mathcal{L}$ un vector unic $\overline{y}$ din spaţiul $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Vectorul $\overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ care corespunde vectorului $\overline{x} \in \mathcal{L}$ prin aplicaţia $f$ se numeşte *imaginea* vectorului $\overline{x} \in \mathcal{L}$ prin operatorul $f$, iar $\overline{x}$ – *preimaginea* vectorului $\overline{y}$. Se spune de asemenea că operatorul $f$ transformă (trece) vectorul $\overline{x}$ în vectorul $\overline{y}$ şi se scrie: $\overline{y} = f(\overline{x})$. Faptul că vectorului $\overline{x} \in \mathcal{L}$ i se asociază vectorul $f(\overline{x}) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ este convenit de a-l nota sub forma: $\overline{x} \mapsto f(\overline{x})$.

Din definiţia operatorului rezultă că fiecare vector al spaţiului liniar $\mathcal{L}$ are o singură imagine, însă nu numaidecât fiecare vector al spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}$ are preimagine sau această preimagine este unică. Operatorul la care fiecare vector $\overline{y}$ din $\widetilde{\mathcal{L}}$ are o singură preimagine $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ se numeşte *bijectiv*.

Doi operatori $f$ şi $\varphi$ ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$ se numesc *egali* dacă pentru fiecare vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$, $f(\overline{x}) = \varphi(\overline{x})$.

Dacă spaţiul $\widetilde{\mathcal{L}}$ coincide cu spaţiul $\mathcal{L}$, atunci operatorul $f$ ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\mathcal{L}$ se numeşte *operator al spaţiului* $\mathcal{L}$.

**Definiţia 2.** Un operator $f$ ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$ se numeşte *operator liniar*, dacă pentru orice vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ şi $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ şi orice număr $\alpha$ (real, dacă spaţiile sunt reale, şi complex, dacă spaţiile sunt complexe) satisface condiţiile:

1. $f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2)$,

2. $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$.

Din aceste condiţii rezultă egalitatea:

$$f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2), \qquad (17.1)$$

unde $\alpha, \beta$ – oricare numere (reale sau complexe, corespunzător).

Reciproc, din egalitatea (17.1) rezultă condiţiile 1–2, adică 1-2$\Leftrightarrow$(17.1) (simbolul "$\Leftrightarrow$" înseamnă "echivalent"). În felul acesta, operatorul liniar $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ se defineşte de asemenea printr-o singură egalitate (17.1).

Dacă spaţiul $\widetilde{\mathcal{L}}$ coincide cu spaţiul $\mathcal{L}$, atunci operatorul liniar $f$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$, ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\mathcal{L}$ (sau care acţionează în $\mathcal{L}$), se numeşte de asemenea *transformare liniară a spaţiului* $\mathcal{L}$.

### 17.1.2. Exemple de operatori liniari

E x e m p l u l 1. *Prin definiţie, operatorul nul* $\mathcal{O}$ al spaţiului $\mathcal{L}$ este operatorul care asociază fiecărui vector $\overline{x} \in \mathcal{L}$ vectorul nul $\overline{0} \in \widetilde{\mathcal{L}}$, adică $\overline{x} \mapsto \overline{0}$ sau $\mathcal{O}(\overline{x}) = \overline{0}$, $\forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}$. Acest operator, evident, este liniar.

E x e m p l u l 2. *Operatorul identic* (sau *operatorul unitate* $\varepsilon$) al spaţiului liniar $\mathcal{L}$ este, prin dedfiniţie, operatorul care asociază fiecărui vector $\overline{x} \in \mathcal{L}$ acelaşi vector $\overline{x}$ (adică care lasă fiecare vector pe loc): $\overline{x} \mapsto \overline{x}$ sau $\varepsilon(\overline{x}) = \overline{x}$, $\forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}$. Operatorul identic $\varepsilon$, evident, este liniar.

E x e m p l u l 3. Fie $k$ un număr oarecare fixat. Fiecărui vector $\overline{x}$ al spaţiului liniar $\mathcal{L}$ îi asociem vectorul $\overline{y} = k\overline{x}$, adică definim operatorul $f$: $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ după convenţia: $\overline{x} \mapsto \overline{y} = f(\overline{x}) = k\overline{x}$. El se numeşte *operator scalar* sau *asemănare*, sau de asemenea *transformare proporţională* (cu coeficientul $k$). Acest operator $f$ este liniar.

Într-adevăr, condiţiile 1 şi 2 sunt satisfăcute: $f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = k(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = k\overline{x}_1 + k\overline{x}_2 = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2)$, $f(\alpha\overline{x}) = k(\alpha\overline{x}) = \alpha(k\overline{x}) = \alpha f(\overline{x})$, $\forall\, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x} \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Pentru $k = 0$, obţinem operatorul nul, iar pentru $k = 1$ – operatorul identic.

Exemplul 4. Fie $f$ *proiectarea ortogonală* a vectorilor (segmentelor orientate) din spaţiul $\mathbf{R}^3$ pe o axă $l$, care asociază fiecărui vector $\overline{x} = \overline{AB}$ proiecţia sa (geometrică) $\overline{y} = \overline{A'B'}$ pe această axă: $\overline{x} \mapsto \overline{y} = f(\overline{x}) = \pi_l(\overline{x})$ (fig. 17.1). Acest operator $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este liniar.

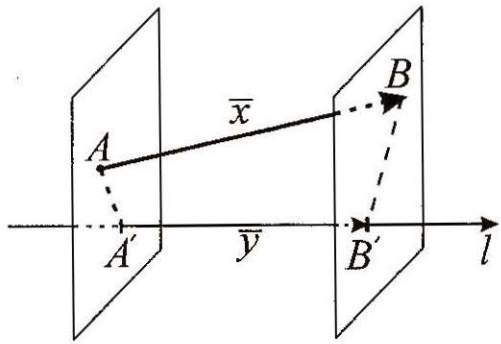



Fig. 17.1

Într-adevăr, ţinând cont de proprietăţile proiecţiilor vectorilor pe o axă, uşor se verifică proprietăţile 1 şi 2: $f(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \pi_l(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \pi_l\overline{x}_1 + \pi_l\overline{x}_2 = f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2)$ şi $f(\alpha\overline{x}) = \pi_l(\alpha\overline{x}) = \alpha\pi_l\overline{x} = \alpha f(\overline{x})$.

Prin urmare, conform definiţiei, acest operator $f$ este liniar.

Operatorul arătat poate fi definit exact în acelaşi fel şi în spaţiul $\mathbf{R}^2$.

Să citărm unele noţiuni şi notaţii pe care le vom utiliza mai jos. Fie $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ o bază oarecare (bază de coordonate) a spaţiului liniar $\mathcal{L}_n$. Această bază o vom nota prin $\{\overline{e}_1, e_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ sau $\{\overline{e}\}$. După cum se ştie, fiecare vector $\overline{x}$ poate fi scris în baza $\{\overline{e}\}$ în mod unic:

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n.$$

Coeficienţii acestei scrieri se numesc *coordonatele vectorului* $\overline{x}$ în baza dată $\{\overline{e}\}$ a spaţiului $\mathcal{L}_n$ şi se scrie $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Linia sau matricea-linie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ compusă din coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza de coordonate $\{\overline{e}\}$ a spaţiului $\mathcal{L}_n$ se numeşte *linia de coordonate* a acestui vector $\overline{x}$, iar coloana sau matricea-coloană (vector-coloană) compusă din coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza $\{\overline{e}\}$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se numeşte *coloana de coordonate* a vectorului $\overline{x}$ în aceeaşi bază.

E x e m p l u l 5. Alegem în spaţiul liniar $n$-dimensional real $\mathcal{L}_n$ o bază oarecare $\{\overline{e}_1, e_2, \ldots, \overline{e}_n\}$. Aceasta va asocia fiecărui vector coloana de cordonate a sa:

$$\overline{x} \mapsto f(\overline{x}) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

şi, prin urmare, va defini un operator liniar ce acţionează din spaţiul dat în spaţiul coloanelor de înălţimea $n$, adică $f$: $\mathcal{L}_n \to \mathbf{R}^n$.

Dacă fiecărui vector îi vom asocia prima coordonată a sa, atunci vom obţine un operator ce acţionează din spaţiul $\mathcal{L}_n$ în spaţiul liniar $\mathbf{R}$ al numerelor reale. În virtutea regulilor despre operaţiile cu coordonatele vectorilor, astfel de operator este liniar. Operatorii liniari de tipul: $f$: $\mathcal{L}_n \to \mathbf{R}$ se numesc *funcţionale liniare* şi se studiază aparte.

E x e m p l u l 6. Considerăm spaţiul aritmetic $n$-dimensional $\mathbf{R}^n$ al coloanelor de înălţimea $n$ şi matricea dreptunghiulară $A$ de dimensiunea $m \times n$. Fiecărei coloane $X$ din $\mathbf{R}^n$ îi asociem coloana $AX$. Ea are înălţimea $m$. În felul acesta, va fi definit un operator ce acţionează din $\mathbf{R}^n$ în $\mathbf{R}^m$. În virtutea proprietăţilor înmulţirii matricelor, acest operator $f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este liniar.

### 17.1.3. Imaginea şi nucleul operatorului liniar

**Definiţia 1.** Se numeşte *imaginea prin operatorul liniar* $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ (sau *mulţimea valorilor operatorului*) mulţimea vectorilor de forma $\overline{y} = f(\overline{x})$, $\forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}$, şi se notează $Im\ f$:

$$Im\ f = \{\overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}} \mid \overline{y} = f(\overline{x}), \forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}\}. \tag{17.2}$$

**Definiţia 2.** Se numeşte *nucleul operatorului liniar* $f$ mulţimea $Ker\ f$ a tuturor $\overline{x} \in \mathcal{L}$ pentru care $f(\overline{x}) = \overline{0}$ (engl. kernel – nucleu):

$$Ker\ f = \{\overline{x} \in \mathcal{L} \mid f(\overline{x}) = \overline{0}\}. \tag{17.3}$$

**Teorema 17.1.** *Imaginea $Im\, f$ prin operatorul liniar $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ este subspaţiu al spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}$, iar nucleul $Ker\, f$ – subspaţiu al spaţiului $\mathcal{L}$.*

▷ Într-adevăr, dacă $\overline{y}_1 = f(\overline{x}_1)$, $\overline{y}_2 = f(\overline{x}_2)$, atunci, în virtutea formulei (17.1), vectorul $f(\alpha_1\overline{x}_1+\alpha_2\overline{x}_2) = \alpha_1 f(\overline{x}_1)+\alpha_2 f(\overline{x}_2)$ aparţine, evident, $Im\, f$.

În mod analog se arată că $Ker\, f$ este subspaţiu al spaţiului $\mathcal{L}$.

Într-adevăr, dacă doi vectori trec în vectorul nul, atunci şi suma lor trece în vectorul nul. Dacă $f(\overline{x}) = \overline{0}$, atunci $f(\alpha\overline{x}) = \alpha f(\overline{x}) = \alpha\overline{0} = \overline{0}$. ◁

Dimensiunea imaginii $Im\, f$ a operatorului liniar se numeşte *rangul operatorului* şi se notează $dim(Im\, f)$, iar dimensiunea nucleului $Ker\, f$ se numeşte *defectul operatorului* şi se notează $dim(Ker\, f)$.

Exemplul 7. Fie $f$ operatorul de asemănare (sau transformarea proporţională) care transformă vectorul liber (segment orientat) $\overline{x} \in \in \mathbf{R}^3$ în vectorul coliniar lui: $\overline{x} \mapsto \overline{y} = f(\overline{x}) = k\overline{x}$, pentru $k$ fixat, $k \in \mathbf{R}$. Liniaritatea acestui operator este evidentă. Pentru $k \neq 0$, imaginea $Im\, f$ a operatorului de asemănare $f$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ este, evident, tot spaţiul $\mathbf{R}^3$, iar nucleul – vectorul nul $\overline{0}$, deoarece numai acest vector satisface în operatorul de asemănare egalitatea $f(\overline{x}) = \overline{0}$.

Prin urmare, rangul operatorului de asemănare $dim(Im\, f) = 3$, iar defectul său $dim(Ker\, f) = 0$.

### 17.1.4. Proprietăţile de bază ale operatorilor liniari

Din condiţia 2 din p. 17.1.1 rezultă imediat următoarele, cele mai simple, proprietăţi ale operatorilor liniari.

Proprietatea 1.

$$f(\overline{0}) = \overline{0}, \tag{17.4}$$

*adică operatorul liniar $f$: $\mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ transformă vectorul nul în vectorul nul.*

▷ Într-adevăr, $f(\overline{0}) = f(0 \cdot \overline{x}) = 0 \cdot f(\overline{x}) = \overline{0}$. ◁

Proprietatea 2.

$$f(-\overline{x}) = -f(\overline{x}), \tag{17.5}$$

*adică drept imagine a vectorului opus vectorului dat $\overline{x}$ serveşte vectorul opus imaginii vectorului $\overline{x}$.*

▷ Formula (17.5) se demonstrează în modul următor: $f(-\overline{x}) = f((-1)\overline{x}) = (-1)f(\overline{x}) = -f(\overline{x})$. ◁

Proprietatea 3.

Dacă $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$, adică $f$ este un operator liniar ce acţionează din $\mathcal{L}_n$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, atunci are loc relaţia:

$$f(\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k) = \alpha_1 f(\overline{x}_1) + \alpha_2 f(\overline{x}_2) + \\ + \ldots + \alpha_k f(\overline{x}_k), \qquad (17.6)$$

$\forall\, \overline{x}_i \in \mathcal{L}$, $\forall \alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, adică *operatorul liniar al spaţiului liniar $\mathcal{L}_n$ transformă orice combinaţie liniară de vectorii $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$ în aceeaşi combinaţie liniară (cu aceeaşi coeficienţi) a imaginilor acestor vectori.*

▷ Pentru a deduce formula (17.6), este suficient de aplicat inducţia matematică după $k$. Pentru $k = 1$, formula (17.6) coincide cu formula 2 din p. 17.1.1. Fie că formula (17.6) este adevărată pentru $(k-1)$ termeni. Atunci $f(\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k) = f[\alpha_1\overline{x}_1 + (\alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k)] = f(\alpha_1\overline{x}_1) + f(\alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{x}_k) = \alpha_1 f(\overline{x}_1) + \alpha_2 f(\overline{x}_2) + \ldots + \alpha_k f(\overline{x}_k)$. ◁

Fie $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază oarecare (bază de coordonate) a spaţiului liniar $\mathcal{L}_n$. Considerăm un operator liniar arbitrar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ (sau $\overline{x} \mapsto f(\overline{x}) = \overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}}_m$, $\forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}_n$).

Operatorul liniar $f$ transformă (trece) vectorii bazei $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$, corespunzător, în vectorii $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), \ldots, f(\overline{e}_n)$. De aici, în virtutea formulei (17.6), rezultă concluzia:

dacă

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i, \qquad (17.7)$$

atunci

$$f(\overline{x}) = x_1 f(\overline{e}_1) + x_2 f(\overline{e}_2) + \ldots + x_n f(\overline{e}_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overline{e}_i), \qquad (17.8)$$

adică imaginea oricărui vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se poate totdeauna exprima prin imaginile vectorilor bazici conform formulelor (17.7)–(17.8). Prin urmare, operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ va fi definit complet dacă sunt date imaginile vectorilor bazici, adică *$f$ se defineşte complet de către imaginile vectorilor bazici.*

**Teorema 17.2.** *Prin operatorul liniar* $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ *subspaţiul liniar* $\mathcal{L}'$ *din* $\mathcal{L}_n$ *trece în subspaţiul liniar* $f(\mathcal{L}')$ *din* $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, *iar dimensiunea lui* $f(\mathcal{L}')$ *nu întrece dimensiunea lui* $\mathcal{L}'$.

▷ Într-adevăr, fie $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k\}$ o bază în $\mathcal{L}'$. Pentru orice vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}'$, avem $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_k\overline{e}_k$ şi, prin urmare, $f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e}_1 + \ldots + x_k\overline{e}_k) = x_1 f(\overline{e}_1) + \ldots + x_k f(\overline{e}_k)$. Aceasta înseamnă că vectorul arbitrar $f(\overline{x})$ al mulţimii $f(\mathcal{L}')$ a tuturor imaginilor vectorilor din $\mathcal{L}'$ este o combinaţie liniară de vectori $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_k)$. Reciproc, fiecare combinaţie liniară de vectorii $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_k)$, evident, este imaginea unui anumit vector din $\mathcal{L}'$. Dacă $\overline{y}_1 = f(\overline{x}_1)$ şi $\overline{y}_2 = f(\overline{x}_2)$ sunt doi vectori arbitrari ai mulţimii $f(\mathcal{L}')$, atunci, în virtutea formulei (17.1), avem $f(\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2) = \alpha_1 f(\overline{x}_1) + \alpha_2 f(\overline{x}_2)$, adică combinaţia liniară $\alpha_1 f(\overline{x}_1) + \alpha_2 f(\overline{x}_2)$ aparţine mulţimii $f(\mathcal{L}')$. Prin urmare, $f(\mathcal{L}')$ este subspaţiu liniar din $\widetilde{\mathcal{L}}_m$.

Baza sistemului de vectori $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_k)$ este, evident, şi bază a spaţiului $f(\mathcal{L}')$, iar această bază nu poate avea mai mult decât $k$ vectori, adică dimensiunea subspaţiului $f(\mathcal{L}')$ nu întrece dimensiunea $k$ a subspaţiului $\mathcal{L}'$. ◁

## 17.2. Legătura dintre matrice şi operatorii liniari. Matricea operatorului liniar

Considerăm spaţiile liniare $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ de dimensiunile $n$ şi $m$, respectiv, şi un operator $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$. Fie $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ o bază în $\mathcal{L}_n$. Atunci $f$ transformă (trece) vectorii bazei $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ ai spaţiului $\mathcal{L}_n$, corespunzător, în vectorii $f(\overline{e}_1) = \overline{a}_1$, $f(\overline{e}_2) = \overline{a}_2, \ldots, f(\overline{e}_n) = \overline{a}_n$ ai spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}_m$. Alegem de asemenea o bază şi în spaţiul $\widetilde{\mathcal{L}}_m$. Fie aceasta $\{\overline{p}\} = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_m\}$. Fiecare dintre vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ se scrie în baza dată $\{\overline{p}\}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$:

$$\begin{aligned} f(\overline{e}_1) &= \overline{a}_1 = a_{11}\overline{p}_1 + a_{21}\overline{p}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{p}_m, \\ f(\overline{e}_2) &= \overline{a}_2 = a_{12}\overline{p}_1 + a_{22}\overline{p}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{p}_m, \\ &\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\overline{e}_n) &= \overline{a}_n = a_{1n}\overline{p}_1 + a_{2n}\overline{p}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{p}_m, \end{aligned} \tag{17.1}$$

sau scurt

$$f(\overline{e}_j) = \overline{a}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{p}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Din coordonatele $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ ale vectorilor $f(\overline{e}_j) = \overline{a}_j$ în baza $\{\overline{p}\}$ a spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ compunem matricea de tipul $m \times n$, luând coloana de coordonate a vectorului $f(\overline{e}_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în calitate de coloana $j$ a matricei $A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{17.2}$$

**Definiţie.** Se numeşte *matricea operatorului liniar*[1] $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$, respectiv ale spaţiilor $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, matricea care are drept coloane ale sale, respectiv, coloanele de coordonate ale vectorilor $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_n)$ în baza $\{\overline{p}\}$.

În cuplul ales de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ ale spaţiilor liniare $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, respectiv, în virtutea scrierii în mod unic a vectorului în baza dată, matricea $A$ a operatorului liniar $f$ este definită în mod unic.

Cunoscând imaginile $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_n)$ ale vectorilor bazei $\{\overline{e}\}$ prin operatorul $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$, folosind (17.7)–(17.8) din p. 17.1 şi însuşi acest operator $f$, putem mai întâi să scriem aceste imagini în baza $\{\overline{p}\}$ a spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ conform formulelor (17.1). Apoi, având relaţiile (17.1), putem scrie imediat matricea $A = A_{m\times n}$ a operatorului liniar $f$, ţinând cont de faptul că coloanele ei sunt corespunzător coloanele de coordonate ale imaginilor $f(\overline{e}_1), \ldots, f(\overline{e}_n)$ în baza $\{\overline{p}\}$ a spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}_m$.

Reciproc, pentru fiecare matrice $A$ de dimensiunea $m \times n$, putem mai întâi în baza $\{\overline{p}\}$ a spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ să găsim vectorii

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= a_{11}\overline{p}_1 + a_{21}\overline{p}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{p}_m, \\ \cdots\cdots & \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{a}_n &= a_{1n}\overline{p}_1 + a_{2n}\overline{p}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{p}_m, \end{aligned}$$

iar apoi să construim operatorul $f$ ce trece vectorii bazei $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, corespunzctor, în vectorii $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$, adică: $f(\overline{e}_1) = \overline{a}_1$, $f(\overline{e}_2) = \overline{a}_2, \ldots, f(\overline{e}_n) = \overline{a}_n$. Vectorului arbitrar $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i$ scris în baza $\{\overline{e}\}$ a spaţiului $\mathcal{L}_n$ îi asociem vectorul

[1] Operatorul liniar cu matricea $A$ în cuplul ales de baze se mai notează, de asemenea, cu aceeaşi literă $A$ şi se scrie $A\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$, $\overline{y} = A\overline{x}$, $A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A(\overline{x}_1) + A(\overline{x}_2)$, $A(\alpha\overline{x}) = \alpha A(\overline{x})$.

$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{a}_i$, adică

$$f(\overline{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{a}_i.$$

Se poate arăta că acest operator $f$ este liniar şi totodată unic.

În felul acesta, matricea $A = A_{m\times n}$ defineşte în cuplul ales de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ ale spaţiilor $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$. Acest operator este unic şi matricea sa, evident, este $A$.

Aşadar, am demonstrat că *alegerea bazelor* $\{\overline{e}\}$ *şi* $\{\overline{p}\}$ *în spaţiile liniare* $\mathcal{L}_n$ *şi* $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ *stabileşte o corespondenţă bijectivă între operatorii liniari ce acţionează din* $\mathcal{L}_n$ *în* $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ *şi matricele de dimensiunea* $m \times n$.

Dacă spaţiul $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ coincide cu spaţiul $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n$, atunci în calitate de bază $\{\overline{p}\}$ luăm aceeaşi bază $\{\overline{e}\}$ a spaţiului $\mathcal{L}$ şi matricea operatorului liniar $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (evident pătratică de ordinul $n$) are forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{17.3}$$

Coloanele ei sunt coloanele de coordonate ale vectorilor $f(\overline{e}_i)$ în baza aleasă $\{\overline{e}\}$. Matricea $A$ din (17.3) se numeşte *matricea transformării liniare* $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Aşadar, matricea transformării liniare $f$ a spaţiului liniar $\mathcal{L}$ este matricea $A$ în care coloana $j$ este coloana de coordonate a vectorului $f(\overline{e}_j) = \overline{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ în baza aleasă $\{\overline{e}\}$ a spaţiului $\mathcal{L}$.

În felul acesta, operatorii liniari în spaţiile de dimensiune finită pot fi descrişi şi studiaţi cu ajutorul matricelor.

Expunem câteva exemple de operatori liniari şi de matrice a lor.

E x e m p l u l 1. Fie $\varepsilon$ operatorul identic al spaţiului liniar $\mathcal{L}_n$, iar $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ – o bază în $\mathcal{L}_n$. Atunci $\varepsilon(\overline{e}_1) = \overline{e}_1$, $\varepsilon(\overline{e}_2) = \overline{e}_2, \ldots, \varepsilon(\overline{e}_n) = \overline{e}_n$ şi matricea operatorului identic în orice bază are forma:

$$A = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

adică este matricea unitate şi reciproc: matricea unitate de ordinul

$n$ defineşte operatorul identic al spaţiului liniar $n$-dimensional $\mathcal{L}_n$ în orice bază a sa.

Exemplul 2. Fie $f$ *operatorul de asemănare* (*transformarea de asemănare*, sau *asemănare*, cu coeficientul $k$) în plan, adică a spaţiului liniar $\mathbf{R}^2$ al tuturor vectorilor-segmente ai planului. Transformarea constă în faptul că toţi vectorii se întind de $k$ ori ($k$ – un număr real oarecare). Fiecărui vector $\overline{x}$ al acestui plan îi asociem vectorul $\overline{y}$ conform regulii $\overline{x} \mapsto \overline{y} = f(\overline{x}) = k\overline{x}$. Liniaritatea acestui operator este evidentă.

Dacă $\overline{x} = \overline{OM}$ şi $f(\overline{x}) = \overline{OM'}$ şi dacă punctul $M$ parcurge o figură $F$, atunci $M'$ parcurge o figură $F'$. Punctul $O$ se numeşte *centrul de asemănare* al figurilor $F$ şi $F'$ (fig. 17.2).

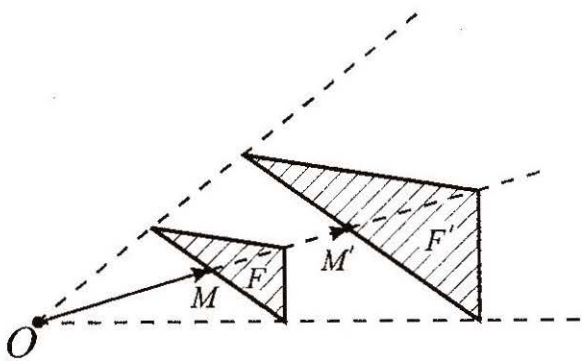



Fig. 17.2

Fie $\overline{e}_1$ şi $\overline{e}_2$ o bază arbitrară a spaţiului $\mathbf{R}^2$. Imaginile acestor vectori bazici prin operatorul dat $f$ au forma: $f(\overline{e}_1) = k\overline{e}_1$, $f(\overline{e}_2) = k\overline{e}_2$. Prin urmare, matricea operatorului dat $f$ în oricare bază $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ a spaţiului $\mathbf{R}^2$ are forma:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Dacă $f$ este asemănare cu coeficientul $k$ în spaţiu, adică $f(\overline{x}) = k\overline{x}$, unde $k$ – un număr şi $\overline{x} \in \mathbf{R}^3$, atunci matricea lui are forma:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$

În aşa fel, transformarea de asemănare are matricea diagonală la care

toate elementele diagonalei principale sunt egale cu coeficientul de asemănare $k$.

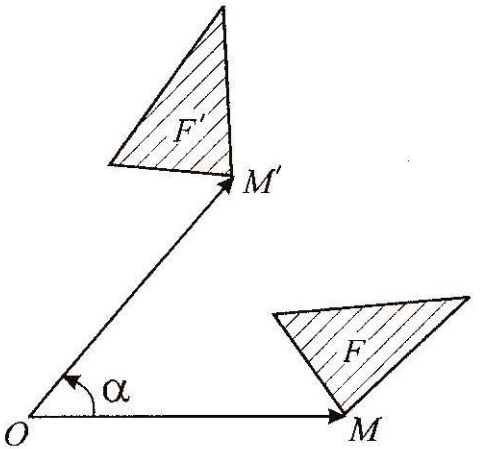



Fig. 17.3

E x e m p l u l 3. Fie $f$ *rotaţia* planului cu un unghi $\alpha$. Transformarea constă în rotirea vectorilor planului în jurul unui punct $O$ în una şi aceeaşi parte cu unul şi acelaşi unghi $\alpha$: dacă $\overline{x} = \overline{OM}$, atunci $\overline{y} = f(\overline{x}) = \overline{OM'}$, unde $|\overline{OM'}| = |\overline{OM}|$ şi $(\overline{OM}, \overline{OM'}) = \alpha$. Fiecărui vector $\overline{x}$ al acestui plan îi asociem vectorul indicat $\overline{y}$ obţinut prin rotirea lui $\overline{x}$ cu unghiul $\alpha$: $\overline{x} \mapsto \overline{y} = \overline{OM'} = f(\overline{x})$. Se verifică uşor că acest operator $f$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este liniar. El este numit *operatorul de rotaţie*.

Dacă $M$ parcurge o careva figură $F$, atunci $M'$ parcurge figura $F'$, care se obţine în urma rotirii figurii $F$ în jurul punctului $O$ cu unghiul dat $\alpha$ (fig. 17.3).

Considerăm baza ortonormată $\overline{i}$, $\overline{j}$ a spaţiului $\mathbf{R}^2$, alcătuită din versorii axelor $Ox$ şi $Oy$, respectiv, ale sistemului rectangular de coordonate $Oxy$.

Aflăm matricea $A$ a operatorului de rotaţie $f$ în baza $\overline{i}$, $\overline{j}$ (fig. 17.4, a,b).

Avem:

$$f(\overline{i}) = \overline{OA} + \overline{OB} = \quad \overline{i}\cos\alpha + \overline{j}\sin\alpha,$$
$$f(\overline{j}) = \overline{OC} + \overline{OD} = -\overline{i}\sin\alpha + \overline{j}\cos\alpha,$$

aşa că matricea căutată a operatorului de rotaţie $f$ în baza ortonor-

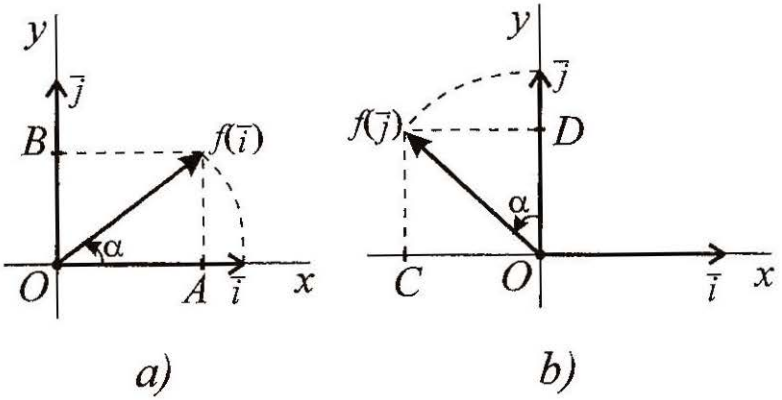



Fig. 17.4

mată $\vec{i}$, $\vec{j}$ are forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Exemplul 4. Fie $f$ *simetria* vectorilor *faţă de o dreaptă* în plan (*simetria axială*). Transformarea constă în faptul că pe fiecare vector $\overline{x} = \overline{OM}$ al planului operatorul $f$ îl transformă (îl trece) *în* vectorul lui simetric $f(\overline{x}) = \overline{x}' = \overline{OM}'$ faţă de o dreaptă (axă) $Ox$, unde $MM' \perp Ox$, $|\overline{EM}'| = |\overline{EM}|$, $E$ – mijlocul segmentului $MM'$ (fig. 17.5).

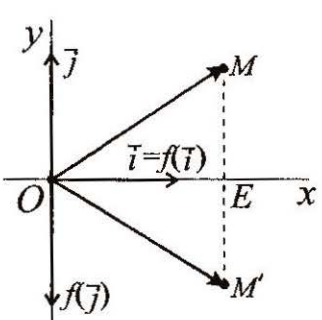



Fig. 17.5

Uşor de verificat că acest operator $f$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ este liniar.
Din figura 17.5 rezultă că în baza ortonormată $\vec{i}$, $\vec{j}$ a spaţiului $\mathbf{R}^2$,

unde $\bar{i}$ este vectorul axei $Ox$, avem:

$$f(\bar{i}) = \bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j},$$

$$f(\bar{j}) = -\bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + (-1) \cdot \bar{j}$$

şi deci matricea operatorului dat $f$ (a simetriei axiale) în baza ortonormată $\bar{i}$, $\bar{j}$ este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Evident, $Im\ f = \mathbf{R}^2$, iar $Ker\ f = \{\bar{0}\}$.

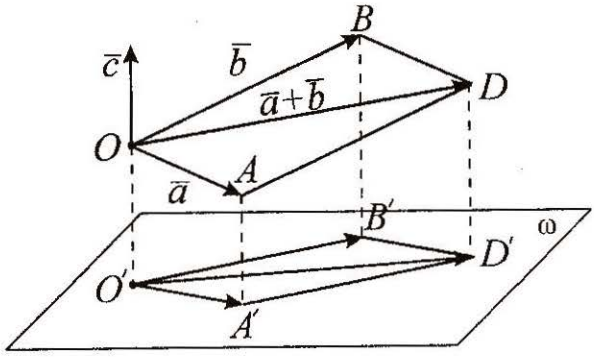



Fig. 17.6

Exemplul 5. Fie $f$ proiectarea ortogonală a vectorilor spaţiului $\mathbf{R}^3$ pe planul de coordonate $Oxy$ al sistemului de coordonate rectangular în spaţiu $Oxyz$. Transformarea constă în faptul că operatorul $f$ îi asociază fiecărui vector $\bar{x} = \overline{AB}$ proiecţia sa (geometrică) $\bar{x} = \overline{A'B'}$ pe planul $Oxy$: $\bar{x} \mapsto \bar{y} = f(\bar{x}) = \pi_{xy}\bar{x}$. Liniaritatea acestui operator $f$: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ rezultă din proprietăţile proiecţiilor vectorilor pe un plan. Demonstrăm aceste proprietăţi. Aplicăm vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ într-un punct $O$ al spaţiului, adică construim vectorii $\overline{OA} = \bar{a}$ şi $\overline{OB} = \bar{b}$. Construim de asemenea şi suma lor $\overline{OD} = \bar{a} + \bar{b}$. Proiectăm ortogonal vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi suma lor $\bar{a} + \bar{b}$ pe un plan $\omega$, care e perpendicular la un vector $\bar{c}$ (fig. 17.6).

Întrucât la proiectare dreptele paralele trec în drepte paralele, paralelogramul $OADB$ se va proiecta în paralelogramul $O'A'D'B'$ şi de aceea diagonala sa va fi $\bar{a}' + \bar{b}'$, unde $\bar{a}'$ şi $\bar{b}'$ – proiecţiile (geometrice)

ale vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, adică $\pi_\omega \bar{a} = \bar{a}'$ şi $\pi_\omega \bar{b} = \bar{b}'$. Prin urmare, avem: $\pi_\omega \overline{OD} = \overline{O'D'} = \bar{a}' + \bar{b}'$, de unde rezultă formula:

$$\pi_\omega(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_\omega \bar{a} + \pi_\omega \bar{b}. \tag{17.4}$$

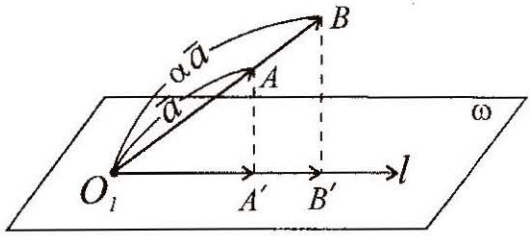



Fig. 17.7

Dintr-un punct oarecare $O_1$ al planului $\omega$ construim vectorii $\overline{O_1A} = \bar{a}$ şi $\overline{O_1B} = \alpha\bar{a}$, unde $\alpha$ – un număr real oarecare (fig. 17.7). Fie $A'$ şi $B'$ proiecţiile ortogonale ale punctelor $A$ şi $B$ pe planul $\omega$. Considerăm dreapta $O_1B'$ ca axă. Atunci proiecţiile ortogonale ale vectorilor $\overline{O_1A} = \bar{a}$ şi $\overline{O_1B} = \alpha\bar{a}$ pe planul $\omega$ pot fi considerate ca proiecţiile acestor vectori pe axa $l$: $\pi_\omega \bar{a} = \pi_l \bar{a}$ şi $\pi_\omega(\alpha\bar{a}) = \pi_l(\alpha\bar{a})$. Dar pentru proiecţiile vectorului pe o axă (a se vedea teorema 10.5) este adevărată formula $\pi_l(\alpha\bar{a}) = \alpha\pi_l\bar{a}$, de unde rezultă formula:

$$\pi_\omega(\alpha\bar{a}) = \alpha\pi_\omega\bar{a}. \tag{17.5}$$

Demonstrăm acum liniaritatea operatorului dat $f$ aplicând formulele (17.4) şi (17.5):

$$f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \pi_{xy}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \pi_{xy}(\bar{x}_1) + \pi_{xy}\bar{x}_2 = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2),$$

$$f(\alpha\bar{x}) = \pi_{xy}(\alpha\bar{x}) = \alpha\pi_{xy}\bar{x} = \alpha f(\bar{x}),$$

$$\forall\, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \text{ şi } \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Aşadar, operatorul proiectării $f$ este liniar.

Considerăm baza $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ a spaţiului $\mathbf{R}^3$ formată din versorii axelor de coordonate $Ox, Oy$ şi $Oz$, respectiv. Întrucât avem $f(\bar{i}) = \bar{i}$, $f(\bar{j}) = \bar{j}$, $f(\bar{k}) = \bar{0}$, matricea operatorului proiectării $f$ în baza ortonormată $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ are forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Evident, în acest caz, mulţimea valorilor operatorului este planul $Oxy$, iar nucleul său îl alcătuiesc toţi vectorii perpendiculari pe acest plan, aşa că $Im\, f = \mathbf{R}^2$, $dim(Im\, f) = 2$, $Ker\, f = \mathbf{R}$ şi $dim(Ker\, f) = 1$.

Exemplul 6. Fie $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ operatorul liniar care transformă (trece) orice vector $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ din $\mathbf{R}^3$ în vectorul $\overline{y} = f(\overline{x})$ al spaţiului $\mathbf{R}^2$, unde

$$\overline{y} = (x_1 + 3x_2, x_2 - x_3).$$

Să se afle matricea operatorului $f$ în cuplul de baze canonice ale acestor spaţii.

Considerăm în $\mathbf{R}^3$ baza canonică $\overline{i} = (1,0,0)$, $\overline{j} = (0,1,0)$, $\overline{k} = (0,0,1)$, iar în $\mathbf{R}^2$ – baza $\overline{i}' = (1,0)$, $\overline{j}' = (0,1)$. Avem:

$$f(\overline{i}) = \overline{y}_1 = (1 + 3 \cdot 0, 0 - 0) = (1,0) = 1 \cdot \overline{i}' + 0 \cdot \overline{j}',$$

$$f(\overline{j}) = \overline{y}_2 = (0 + 3 \cdot 1, 1 - 0) = (3,1) = 3\overline{i}' + 1 \cdot \overline{j}',$$

$$f(\overline{k}) = \overline{y}_3 = (0 + 3 \cdot 0, 0 - 1) = (0,-1) = 0 \cdot \overline{i}' - \overline{j}'.$$

Conform definiţiei, matricea $A$ a operatorului dat $f$ are forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

## 17.3. Scrierea prin coordonate a unui operator liniar

Fie $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ două spaţii liniare. Considerăm un operator liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$, care în bazele alese $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ în $\mathcal{L}_n$ şi $\{\overline{p}\} = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_m\}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ se defineşte prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

adică

$$f(\overline{e}_j) = a_{1j}\overline{p}_1 + a_{2j}\overline{p}_2 + \ldots + a_{mj}\overline{p}_m \ (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (17.1)$$

Fie că coordonatele vectorului arbitrar $\overline{x}$ şi ale imaginii sale $\overline{y} = f(\overline{x})$ $(\overline{x} \mapsto f(\overline{x}) = \overline{y})$ în bazele $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ sunt, corespunzător,

$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, adică

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n, \\ \overline{y} &= y_1\overline{p}_1 + y_2\overline{p}_2 + \ldots + y_m\overline{p}_m. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Vom afla cum sunt legate coordonatele vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$. Aplicând formula (17.6) din p. 17.1 şi ţinând seama de definiţia matricei operatorului liniar, obţinem pentru imaginea combinaţiei liniare de vectori în baza $\{\overline{p}\}$ următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) = f(x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n) = x_1 f(\overline{e}_1) + x_2 f(\overline{e}_2) + \ldots + \\ + x_n f(\overline{e}_n) = x_1(a_{11}\overline{p}_1 + a_{21}\overline{p}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{p}_m) + \\ + x_2(a_{12}\overline{p}_1 + a_{22}\overline{p}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{p}_m) + \ldots + \\ + x_n(a_{1n}\overline{p}_1 + a_{2n}\overline{p}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{p}_m) = \\ = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\overline{p}_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\overline{p}_2 + \ldots + \\ + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)\overline{p}_m. \end{aligned}$$

În virtutea scrierii unice a unui vector într-o bază dată, din această egalitate şi din (17.2) rezultă formulele căutate:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{17.3}$$

Formulele (17.3) pot fi scrise sub forma matriceală:

$$Y = AX, \tag{17.4}$$

unde $A$ – matricea operatorului liniar $f$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ – matrice-coloane}$$

formate din coordonatele vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y} = f(\overline{x})$, respectiv în bazele $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$.

Formula (17.3) sau (17.4) dă posibilitate de a determina pentru orice vector dat $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ imaginea sa: $\overline{y} = f(\overline{x}) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, deoarece coordonatele vectorului $\overline{y} = f(\overline{x})$ în baza $\{\overline{p}\}$ se exprimă liniar prin coordonatele vectorului $\overline{x}$ în baza $\{\overline{e}\}$.

În felul acesta, formulele (17.3) şi (17.4) reprezintă operatorul liniar $f$ cu matricea $A$ sub forma exprimată prin coordonate. Coeficienţii acestor formule sunt daţi, dacă este dată matricea $A$ a operatorului liniar $f$. Vom numi formula (17.3) sau (17.4) *scrierea prin coordonate* (sau *reprezentarea prin coordonate*) a operatorului dat $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ ale acestor spaţii.

Şi reciproc, dacă este dată una dintre formulele (17.3) sau (17.4), atunci în baza proprietăţilor înmulţirii matricei cu un vector, în cuplul de baze arbitrare $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ ale spaţiilor $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ ea defineşte un unic operator liniar: $\overline{x} \mapsto \overline{y} = f(\overline{x})$ din $\mathcal{L}_n$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, unde coordonatele imaginii $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ în baza $\{\overline{p}\}$ se exprimă prin coordonatele preimaginii $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu formula (17.3) sau (17.4). Matricea $A$ a acestui operator $f$ este matricea sistemului liniar (17.3). Aşadar, dacă operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ are în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ matricea $A$, atunci vectorii bazei $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ se transformă cu ajutorul coloanelor acestei matrice (formula (17.1), iar coordonatele vectorului arbitrar $\overline{x} \in \mathcal{L}_n$ – cu ajutorul liniilor ei (formula (17.3)).

E x e m p l u. Fie $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ operatorul liniar care în cuplul de baze $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ şi $\{\overline{p}\} = \{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

În baza $\{\overline{e}\}$ este dat vectorul $\overline{x} = (-2, 3, 1)$. Să se afle coordonatele vectorului $\overline{y} = f(\overline{x})$ în baza $\{\overline{p}\}$.

Fie că vectorul $\overline{y} = f(\overline{x})$ în baza $\{\overline{p}\}$ are coordonatele $\overline{y} = (y_1, y_2)$. Atunci, conform formulei (17.4), avem

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

de unde $\overline{y} = f(\overline{x}) = (4; 2)$ în baza $\{\overline{p}\}$.

**T e o r e m a 17.3.** *Rangul matricei $A$ a operatorului liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ este egal cu rangul acestui operator:*

$$r(A) = dim(Im\, f). \tag{17.5}$$

▷ Fie $r(A) = r$. Conform definiţiei rangului matricei, există un sistem maxim din $r$ coloane liniar independente ale matricei $A$, numite coloane bazice. După cum se ştie, sistemul de coloane bazice formează bază pentru sistemul coloanelor matricei $A$. Pe de altă parte, cunoaştem teorema:

1) sistemul liniar independent de vectori are coloanele de coordonate ale sale de asemenea liniar independente şi reciproc;

2) fiecare relaţie de dependenţă liniară a unui sistem de vectori are loc şi pentru sistemul de coloane de coordonate corespunzătoare şi reciproc.

Fie acum $j_1, j_2, \ldots, j_r$ numerele de ordine ale coloanelor bazice ale matricei $A$. Aceasta înseamnă, conform teoremei amintite, că vectorii $f(\overline{e}_{j_1}), \ldots, f(\overline{e}_{j_r})$ sunt liniar independenţi şi că fiecare vector $f(\overline{e}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este combinaţie liniară a lor. Prin urmare, putem exprima liniar imaginea oricărui vector $f(\overline{x})$ numai prin $f(\overline{e}_{j_1}), \ldots, f(\overline{e}_{j_r})$. În felul acesta, vectorii $f(\overline{e}_{j_1}), \ldots, f(\overline{e}_{j_r})$ formează bază în mulţimea valorilor operatorului $f$, adică a spaţiului liniar $Im\, f$, iar numărul lor determină dimensiunea acestui spaţiu, adică rezultă $r(A) = r = dim(Im\, f)$. ◁

**Teorema 17.4.** *Suma rangului operatorului liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m$ şi a dimensiunii nucleului său $Ker\, f$ este egală cu dimensiunea spaţiului ce se aplică $\mathcal{L}_n$:*

$$dim(Im\, f) + dim(Ker\, f) = n. \tag{17.6}$$

▷ Conform formulei (17.4), nucleul operatorului liniar se determină de către sistemul omogen de ecuaţii liniare $AX = 0$ cu $n$ necunoscute. După cum se observă din (17.5), rangul $r(A) = r$ al matricei acestui sistem este egal cu rangul operatorului $dim(Im\, f)$. Pe de altă parte, după cum se ştie, mulţimea soluţiilor sistemului omogen de ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute formează un spaţiu liniar dimensiunea căruia este egală cu $n - r$, unde $r$ – rangul matricei sistemului. Fie că dimensiunea nucleului operatorului $dim(Ker\, f)$ este egală cu $d$. Atunci, conform teoremei despre proprietăţile coordonatelor vectorului, amintită în procesul demonstraţiei teoremei 17.3, conchidem că spaţiul soluţiilor

sistemului omogen indicat de asemenea are dimensiunea sa egală cu $d$. Atunci reiese că $d = n - r$, de unde rezultă (17.6). ◁

Aşadar, dacă $A$ este matricea operatorului liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$, atunci $dim(Im\, f) = r(A)$, iar $dim(Ker\, f) = n - r(A) = n - r$.

În particular, egalitatea $r = n$ este condiţia necesară şi suficientă pentru ca operatorul să aibă nucleul nul.

**Teorema 17.5.** *Operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ este bijectiv atunci şi numai atunci când dimensiunile spaţiilor coincid şi sunt egale cu rangul operatorului.*

▷ Într-adevăr, întrucât operatorul liniar este bijectiv, sistemul de ecuaţii liniare (17.4) are o singură soluţie $X$ pentru orice coloană de termeni liberi $Y$. Faptul că acest sistem are soluţie pentru orice $Y$ înseamnă că $\widetilde{\mathcal{L}}_m = Imf$, iar faptul că această soluţie este unică, conform teoremei Kronecker-Cappelli (caz de unicitate), este echivalent cu $r(A) = n$, unde $n$ — numărul de necunoscute ale sistemului. Prin urmare, în baza acestor egalităţi şi a egalităţii (17.5), faptul că operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$ este bijectiv este echivalent cu condiţia $dim\, \mathcal{L}_n = dim\, \widetilde{\mathcal{L}}_m = dim(Imf)$. ◁

## 17.4. Modificarea matricei unui operator liniar la substituirea bazelor. Matrice asemenea

Considerăm operatorul liniar $f\colon \mathcal{L}_n \to \widetilde{\mathcal{L}}_m$. Dacă în $\mathcal{L}_n$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ este ales un cuplu oarecare de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$, corespunzător, atunci $f$ se defineşte de matricea $A$ a sa. Fie $\{\overline{e}'\}$ şi $\{\overline{p}'\}$ un alt cuplu de baze ale acestor spaţii, care sunt legate, respectiv, cu $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ prin matricele de trecere $S$ şi $T$. În cuplul de baze $\{\overline{e}'\}$ şi $\{\overline{p}'\}$ operatorul $f$ are matricea $B$. Problema noastră este de a găsi legătura dintre $A$ şi $B$.

Considerăm un vector arbitrar $\overline{x}$ din spaţiul $\mathcal{L}_n$ şi imaginea sa $\overline{y} = f(\overline{x})$. Notăm coloanele de coordonate ale lui $\overline{x}$ în bazele $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{e}'\}$, respectiv, prin $X$ şi $X'$, iar coloanele de coordonate ale vectorului $\overline{y}$ în bazele $\{\overline{p}\}$ şi $\{\overline{p}'\}$ — prin $Y$ şi $Y'$. Atunci, conform formulelor cunoscute de transformare a coordonatelor vectorului la trecerea la o bază nouă în spaţiul liniar, avem următoarele relaţii:

$$X = SX', \quad Y = TY'. \tag{17.1}$$

Pe de altă parte, conform formulei (17.4) din p. 17.3, avem:

$$Y = AX, \quad Y' = BX'. \tag{17.2}$$

Substituind (17.1) în prima dintre egalităţile (17.2), obţinem $TY' = ASX'$. Întrucât matricea de trecere totdeauna are inversa sa, putem afla $Y'$ din această egalitate: $Y' = T^{-1}ASX'$. Comparând ultima egalitate cu egalitatea a doua din (17.2), avem $BX' = T^{-1}ASX'$, de unde rezultă formula:

$$B = T^{-1}AS. \tag{17.3}$$

Aceasta şi este legătura căutată între matricele $A$ şi $B$.

R e m a r c ă. Menţionăm că la demonstraţia teoremei am utilizat *lema:*

*Fie $A$, $B$ matrice de dimensiunea $m \times n$. Dacă pentru orice coloană de coordonate:*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

*se respectă egalitatea*

$$AX = BX, \tag{17.4}$$

*atunci $A = B$.*

▷ Dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2 \ldots, n)$, atunci pentru valorile $x_j = 1$, $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n; k \neq j)$ egalitatea (17.4) dă $a_{ij} = b_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, adică $A = B$. ◁

Următoarea teoremă exprimă dependenţa dintre matricele unui şi aceluiaşi operator liniar al spaţiului $\mathcal{L}_n$ în diverse baze.

**T e o r e m a 17.6.** *Dacă $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ şi $\{\overline{e}'\} = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n\}$ sunt două baze ale spaţiului liniar $\mathcal{L}_n$ şi $A$ – matricea operatorului liniar (transformării liniare) $f: \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_n$ în baza veche $\{\overline{e}\}$, atunci matricea $B$ a acestui operator în baza nouă $\{\overline{e}'\}$ are forma*

$$B = T^{-1}AT, \tag{17.5}$$

*unde $T$ – matricea de trecere de la baza veche $\{\overline{e}\}$ la baza nouă $\{\overline{e}'\}$.*

▷ În spaţiul liniar $\mathcal{L}_n$ fixăm două baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{e}'\}$. Operatorul $f$ ce acţionează din $\mathcal{L}_n$ în $\mathcal{L}_n$, evident, poate fi considerat ca acţionând din $\mathcal{L}_n$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, unde $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ a coincis cu $\mathcal{L}_n$ ($\widetilde{\mathcal{L}}_m = \mathcal{L}_n$).

În acest caz, în calitate de al doilea cuplu de baze $\{\overline{p}\}$ şi $\{\overline{p}'\}$ din $\widetilde{\mathcal{L}}_m$, despre care s-a vorbit la începutul acestui paragraf, poate fi luat acelaşi cuplu de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{e}'\}$ ale spaţiului $\mathcal{L}_n$. Atunci matricele de trecere: $S$ de la baza $\{\overline{e}\}$ la baza $\{\overline{e}'\}$ şi $T$ de la $\{\overline{p}\}$ la $\{\overline{p}'\}$, coincid, adică $S = T$. Prin urmare, din formula (17.3) deducem $B = T^{-1}AT$, unde $A$ – matricea operatorului liniar $f$ în baza $\{\overline{e}\}$, $B$ – matricea aceluiaşi operator în baza $\{\overline{e}'\}$, iar $T$ – matricea de trecere de la baza $\{\overline{e}\}$ la baza $\{\overline{e}'\}$ a spaţiului $\mathcal{L}_n$. ◁

Consecinţă. *Dacă o transformare liniară $f$ are matricea sa nedegenerată într-o bază oarecare, atunci în orice altă bază matricea acestei transformări va fi de asemenea nedegenerată.*

▷ Într-adevăr, dacă $A$ şi $B$ sunt matricele transformării liniare $f$ în două baze diverse, fiind totodată $\det A \neq 0$, şi întrucât $B = T^{-1}AT$, unde $T$ – matrice nedegenerată, atunci, conform teoremei cunoscute despre determinantul produsului matricelor, $\det B = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T \neq 0$. ◁

Exemplu. În baza $\{\overline{e}\} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ transformarea $f$ are matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se găsească matricea transformării $f$ în baza $\{\overline{e}'\} = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\}$, unde $\overline{e}'_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{e}'_2 = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$.

Întrucât

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix},$$

rezultă că

$$B = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 5/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să introducem noţiunea de asemănare a matricelor.

**Definiţie.** O matrice $B$ se numeşte *asemenea* cu matricea $A$ (sau $A$ şi $B$ sunt asemenea) dacă există o matrice nedegenerată $T$, astfel că

$$B = T^{-1}AT.$$

Vom spune că matricea $B$ se obţine prin transformarea matricei $A$ cu ajutorul matricei $T$.

Din teorema 17.6, evident, rezultă că matricele care definesc una şi aceeaşi transformare liniară în diverse baze sunt asemenea între ele.

**Teorema 17.7.** *Două matrice pătratice $A$ şi $B$ de ordinul $n$ atunci şi numai atunci definesc una şi aceeaşi transformare liniară $f$ în diverse baze când aceste matrice sunt asemenea.*

▷ Necesitatea rezultă nemijlocit din teorema 17.6.

*Suficienţa.* Fie $B = T^{-1}AT$, unde $A$, $B$ – matrice pătratice şi $T$ – matrice nedegenerată. Matricea $A$ defineşte în baza aleasă $\{\overline{e}\}$ o transformare liniară $f$. Construim altă bază $\{\overline{e}'\}$, care se obţine din baza $\{\overline{e}\}$ cu ajutorul matricei de trecere $T$ de la $\{\overline{e}\}$ la $\{\overline{e}'\}$. Atunci, conform teoremei 17.6, transformarea $f$ în această bază $\{\overline{e}'\}$ are matricea $B_1 = T^{-1}AT = B$, unde $T$ – matricea de trecere de la $\{\overline{e}\}$ la $\{\overline{e}'\}$. În felul acesta, matricele $A$ şi $B$ definesc una şi aceeaşi transformare $f$ în bazele considerate $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{e}'\}$. ◁

**Teorema 17.8.** *Dacă matricele $A$ şi $B$ sunt asemenea, atunci polinoamele caracteristice ale lor coincid* (a se vedea p. 8.1.1):

$$det\,(A - \lambda E) = det\,(B - \lambda E).$$

▷ Fie $B = T^{-1}AT$. Întrucât matricea scalară $\lambda E$ de ordinul $n$ comutează cu orice matrice pătratică de ordinul $n$ şi deoarece $det\,T^{-1} \cdot det\,T = 1$, avem:

$$det\,(B - \lambda E) = det\,(T^{-1}AT - \lambda E) = det\,(T^{-1}(A - \lambda E)T) =$$

$$= det\,T^{-1} \cdot det\,(A - \lambda E) \cdot det\,T = det\,(A - \lambda E).$$ ◁

## 17.5. Operaţii cu operatori liniari

### 17.5.1. Suma operatorilor şi înmulţirea operatorului cu un număr

În mulţimea operatorilor liniari ce acţionează din $\mathcal{L}_n$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ definim operaţiile *sumei* unor astfel de operatori şi a *înmulţirii* operatorului cu un număr.

Se numeşte *suma operatorilor* $f$ şi $g$ ce acţionează din $\mathcal{L}_n$ în $\widetilde{\mathcal{L}}_m$ operatorul $h$ definit de egalitatea:

$$h(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x}),\ \forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}_n.$$

Suma $h$ a operatorilor $f$ şi $g$ vom nota-o $f + g$, adică $(f + g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) + g(\overline{x})$.

Evident, $f + g = g + f$.

Se numeşte *produsul operatorului* $f$ *cu numărul* $\lambda$ operatorul $h_1$ definit de egalitatea

$$h_1(\overline{x}) = \lambda(f(\overline{x})),\ \forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}_n.$$

Produsul operatorului $f$ cu numărul $\lambda$ îl vom nota cu $\lambda f$. Deci

$$(\lambda f)(\overline{x}) = \lambda(f(\overline{x})),\ \forall\, \overline{x} \in \mathcal{L}_n.$$

Pentru fiecare operator $f$ definim operatorul opus $-f$ prin relaţia:

$$-f = (-1)f.$$

Fie că în spaţiile liniare $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ sunt alese bazele $(\overline{e})$ şi $(\overline{p})$, respectiv.

**Teorema 17.9.** *Dacă operatorii liniari* $f$ *şi* $g$ *ce acţionează din* $\mathcal{L}$ *în* $\widetilde{\mathcal{L}}$ *au corespunzător matricele* $A$ *şi* $B$ *într-un cuplu de baze, atunci operatorii* $f+g$ *şi* $\lambda f$, *unde* $\lambda$ *- un număr oarecare, de asemenea sunt liniari şi au în acelaşi cuplu de baze, rerspectiv, matricele* $A + B$ *şi* $\lambda A$.

▷ a) Demonstrăm liniaritatea operatorilor $f + g$ şi $\lambda f$. Într-adevăr, pentru orice vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathcal{L}$ şi oricare numere $\alpha$ şi $\beta$, avem

$$(f + g)(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) + g(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) =$$

$$= \alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2) + \alpha g(\overline{x}_1) + \beta g(\overline{x}_2) =$$

$$= \alpha(f(\overline{x}_1) + g(\overline{x}_1)) + \beta(f(\overline{x}_2) + g(\overline{x}_2)) =$$

$$= \alpha(f + g)(\overline{x}_1) + \beta(f + g)(\overline{x}_2);$$

$$(\lambda f)(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \lambda[f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2)] =$$

$$= \lambda[\alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2)] = \alpha[\lambda f(\overline{x}_1)] + \beta[\lambda f(\overline{x}_2)] =$$

$$= \alpha(\lambda f)(\overline{x}_1) + \beta(\lambda f)(\overline{x}_2).$$

b) Aflăm matricele operatorilor $f + g$ şi $\lambda f$.

Fie $\overline{y} = f(\overline{x})$, $\overline{z} = g(\overline{x})$, $\overline{y}+\overline{z} = f(\overline{x})+g(\overline{x}) = (f+g)(\overline{x})$. Atunci, în virtutea proprietăţii coordonatelor vectorilor că la adunarea

vectorilor coordonatele lor corespunzătoare se adună, în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$, $\{\overline{p}\}$, avem $Y = AX$, $Z = BX$, $Y + Z = CX$, unde $A$, $B$ – matricele operatorilor $f$ şi $g$, corespunzător; $C$ – matricea operatorului $f + g$ în cuplul dat de baze; $X$, $Y$, $Z$ – matrice-coloane compuse din coordonatele vectorilor $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$. Din primele două ecuaţii matriceale rezultă că $Y + Z = (A + B)X$. Comparând această ecuaţie cu a treia ecuaţie, avem $C = A + B$, adică operatorul $f+g$ are în acelaşi cuplu de baze matricea $A+B$.

Dacă $\overline{y} = f(\overline{x})$, $\overline{z}_1 = (\lambda f)(\overline{x}) = \lambda(f(\overline{x}))$, unde $\lambda$ – un număr, atunci avem $Y = AX$ şi $Z_1 = DX$, unde $D$ – matricea operatorului $\lambda f$ în cuplul dat de baze. Atunci, în baza proprietăţii coordonatelor vectorilor că la înmulţirea vectorului cu un număr toate coordonatele vectorului dat se înmulţesc cu acest număr, rezultă $Z_1 = \lambda(AX) = (\lambda A)X$. Comparând între ele expresiile egale cu $Z_1$, obţinem $D = \lambda A$, adică operatorul $\lambda f$ are, în acelaşi cuplu de baze, matricea $\lambda A$. ◁

### 17.5.2. Produsul operatorilor

Fie $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$, şi $\overline{\mathcal{L}}$ trei spaţii liniare de dimensiunile $k$, $n$ şi $m$, respectiv.

Operatorul $h_2$ care se obţine ca rezultat al executării succesive a operatorilor $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ şi $g$: $\widetilde{\mathcal{L}} \to \overline{\mathcal{L}}$, adică care transformă (trece) orice element $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ nemijlocit în elementul $h_2(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$ din $\overline{\mathcal{L}}$, se numeşte *produsul* sau *compunerea* operatorilor $g$ şi $f$ şi se notează $g \circ f$ sau $gf$. În felul acesta, prin definiţie,

$$(g \circ f)(\overline{x}) = g(f(\overline{x})). \tag{17.1}$$

Menţionăm că în general, ca şi pentru matrice, $f \circ g \neq g \circ f$.

Să demonstrăm că *produsul $g \circ f$ al operatorilor liniari este un operator liniar.*

▷ Într-adevăr, pentru orice vectori $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathcal{L}$, avem:

$$(g \circ f)(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = g(f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2)) =$$

$$= g(\alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2)) = \alpha g(f(\overline{x}_1)) +$$

$$+\beta g(f(\overline{x}_2)) = \alpha(g \circ f)(\overline{x}_1) + \beta(g \circ f)(\overline{x}_2),$$

unde $\alpha$, $\beta$ – oricare numere. Aceasta înseamnă că operatorul $g \circ f$ este liniar. $\triangleleft$

Fie că în spaţiile liniare $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ şi $\overline{\mathcal{L}}$ sunt alese bazele $\{\overline{e}\}$, $\{\overline{p}\}$ şi $\{\overline{q}\}$, respectiv. Notăm prin $A$ matricea operatorului liniar $f$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$, iar prin $B$ – matricea operatorului liniar $g$ în cuplul de baze $\{\overline{p}\}$ şi $\{\overline{q}\}$.

**Teorema 17.10.** *Dacă în bazele alese $\{\overline{e}\}$, $\{\overline{p}\}$ şi $\{\overline{q}\}$ operatorii liniari $f$ şi $g$ au, respectiv, matricele $A$ şi $B$, atunci produsul lor $g \circ f$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{q}\}$ are matricea $BA$.*

$\triangleright$ Fie $\overline{y} = f(\overline{x})$, $\overline{z} = g(\overline{y})$, $\overline{z} = g(f(\overline{x})) = (g \circ f)(\overline{x})$. Atunci, conform formulei (17.4) din p. 17.3, avem $Y = AX$, $Z = BY$, $Z = CX$, unde $C$ – matricea operatorului $g \circ f$ în cuplul respectiv dat de baze; $X$, $Y$ – matricele-coloane compuse din coordonatele vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{y}$, respectiv. Ecuaţiile $Z = BY$, $Y = AX$ duc la ecuaţia $Z = BAX$. Comparând această ecuaţie cu ecuaţia $Z = CX$, conchidem că $C = BA$. $\triangleleft$

Exemplu. Se dau operatorii liniari $f$, $g$ şi $h$, corespunzător cu matricele

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

în bazele respective. Să se afle matricea operatorului $(f + g) \circ h$.

Matricea $D$ a operatorului căutat se defineşte prin egalitatea

$$D = (A + B)C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ -20 & 12 \end{bmatrix}.$$

### 17.5.3. Proprietăţile operaţiilor cu operatori liniari

Sunt adevărate următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu operatori liniari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$).

1° $f + g = g + f$.

2° $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3° $f + \mathcal{O} = f$.

4° $f + (-f) = \mathcal{O}$.

5° $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$.

6° $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f, \qquad \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.$

7° $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$.

8° $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

9° $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$.

10° $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

▷ Adevărul proprietăţilor 1° – 6° este evident. Demonstrăm proprietatea 10°. Într-adevăr, conform difiniţiei, produsul operatorilor liniari:

$$[f \circ (g \circ h)](\overline{x}) = f[(g \circ h)(\overline{x})] = f[g(h(\overline{x}))];$$

$$[(f \circ g) \circ h](\overline{x}) = (f \circ g)(h(\overline{x})) = f[g(h(\overline{x}))],$$

de unde rezultă adevărul proprietăţii 10°.

Proprietăţile 7° – 9° se demonstrează în mod analog. ◁

## 17.6. Operatori liniari nedegeneraţi

Fie $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ două spaţii liniare.

**Definiţia 1.** Un operator liniar $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$, se numeşte *nedegenerat* dacă nucleul său $Kerf$ constă numai din vectorul nul, adică:

$$f(\overline{x}) = \overline{0} \;\Rightarrow\; \overline{x} = \overline{0}, \tag{17.1}$$

iar spaţiile $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ au aceeaşi dimensiune ($dim\,\mathcal{L} = dim\,\widetilde{\mathcal{L}}$).

Operatorul $f$, care are matricea sa pătratică, îl vom numi *degenerat* dacă egalitatea $f(\overline{x}) = \overline{0}$ este posibilă şi pentru un $\overline{x} \neq \overline{0}$.

Operatorul proiectării din exemplul 5 din p. 17.2, evident, este degenerat, deoarece trece vectorii nenuli, ortogonali la planul $Oxy$ în vectorul nul. Nedegeneraţi sunt, spre exemplu, operatorii de asemănare şi de rotaţie.

Din definiţia opeatorului nedegenerat rezultă că defectul său $n - r$ este egal cu zero, adică $dim(Kerf) = 0$.

Să citărm o altă definiţie, echivalentă, a operatorului nedegenerat.

**Definiţia 2.** Operatorul liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$, se numeşte *nedegenerat* dacă matricea sa $A$ într-un cuplu de baze oarecare ale acestor spaţii este nedegenerată, adică dacă

$$det\ A \neq 0. \tag{17.2}$$

▷ Într-adevăr, din condiţia (17.1) imediat rezultă $dim(Kerf) = 0$. De aici, ţinând cont de faptul că dimensiunile spaţiilor $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ coincid, în baza definiţiei matricei $A$ a operatorului liniar $f$ şi din teoremele 17.3 şi 17.4 rezultă că $A$ este o matrice pătratică de ordinul $n$, unde $n$ este dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}$ şi $r(A) = dim(Imf) = n$. Prin urmare (a se vedea consecinţa 2 a teoremei 6.4), avem relaţia

$$(r(A) = n) \Leftrightarrow (|A| \neq 0).$$

Reciproc, fie că matricea $A$ a operatorului liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ este nedegenerată, adică $|A| \neq 0$. Matricea $A$, evident, este pătratică de ordinul $n$, ceea ce înseamnă că spaţiile $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ au aceeaşi dimensiune $n$. Din relaţia $(|A| \neq 0) \Leftrightarrow (r(A) = n)$, care are loc pentru matricea pătratică de ordinul $n$, şi din teorema 17.3 rezultă $r(A) = dim(Imf) = n$. De aici şi din teorema 17.4 avem $dim(Kerf) = 0$, ceea ce înseamnă $f(\overline{x}) = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

Aşadar, definiţiile 1 şi 2 sunt echivalente. ◁

**Teorema 17.11.** *Un operator liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$, este nedegenerat atunci şi numai atunci când acest operator este bijectiv.*

▷ *Necesitatea.* Fie că operatorul liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ într-un cuplu de baze $\{\overline{e}\}$ şi $\{\overline{p}\}$ ale acestor spaţii, respectiv, are matricea sa $A$ nedegenerată, adică $detA \neq 0$. În acest caz, având în vedere definiţia matricei $A$ a operatorului liniar, rezultă că $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ au aceeaşi dimensiune $n$. Fixând un vector arbitrar $\overline{y}_0 = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, examinăm preimaginea $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a acestui vector, adică $f(\overline{x}) = \overline{y}_0$. Atunci are loc egalitatea matriceală $AX = Y_0$, unde $X$ – matricea-coloană compusă din coordonatele vectorului $\overline{x}$, iar $Y_0$ – matricea-coloană din coordonatele vectorului $\overline{y}_0$. Întrucât $detA \neq 0$, sistemul de ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute, echivalent acestei ecuaţii matriceale, are o singură soluţie: $x_1 = x_1^\circ, x_2 = x_2^\circ, \ldots, x_n = x_n^\circ$. Aceasta înseamnă că orice vector $\overline{y}_0 = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ din $\widetilde{\mathcal{L}}$ are o singură preimagine $\overline{x} = \overline{x}_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$.

*Suficienţa.* Fie că operatorul liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ este bijectiv şi într-un cuplu de baze ale acestor spaţii are matricea $A$. Conform teoremei 17.5, spaţiile $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ au aceeaşi dimensiune $n$ şi deci matricea $A$ a operatorului liniar este pătratică de ordinul $n$. Fiindcă fiecare imagine $f(\overline{x}) = \overline{y}_0 = (y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ are o singură preimagine $\overline{x} = \overline{x}_0 = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, sistemul de $n$ ecuaţii liniare cu $n$ necunoscute $AX = Y_0$ are o singură soluţie. Prin urmare, $r(A) = n$ (căci dacă ar fi $r(A) < n$, conform teoremei Kronecker-Cappelli, sistemul ar avea mai mult decât o singură soluţie). Însă pentru matricea pătratică de ordinul $n$ are loc relaţia $(r(A) = n) \Leftrightarrow (|A| \neq 0)$. Aşadar, $det\ A \neq 0$, adică operatorul liniar $f$ este nedegenerat. ◁

C o n s e c i n ţ ă. *Operatorul liniar nedegenerat transformă vectorul nenul de asemenea în vector nenul.*

▷ Într-adevăr, fiecare operator liniar trece vectorul nul în vector nul. Conform teoremei 17.11, operatorul liniar nedegenerat este bijectiv, de aceea el trece orice vector nenul în vector nenul. ◁

**T e o r e m a 17.12.** *Produsul a doi operatori liniari nedegeneraţi este un operator liniar nedegenerat.*

▷ Fie $f$ şi $g$ operatori liniari nedegeneraţi, respectiv cu matricele $A$ şi $B$ într-un cuplu ales de baze. Întrucât aceşti operatori sunt nedegeneraţi, avem $det\ A \neq 0$, $det\ B \neq 0$. Produsul a doi operatori liniari este un operator liniar (p. 17.5.2). Produsul $g \circ f$ al acestor operatori va fi de asemenea nedegenerat, deoarece el are matricea $BA$ (conform teoremei 17.10) şi deci

$$det\ BA = det\ B \cdot \det A \neq 0. \quad \triangleleft$$

## 17.7. Operatorul invers. Condiţia de inversabilitate a unui operator liniar

Fie $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$ spaţii liniare. Considerăm operatorul $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$. Vom reaminti că operatorul se numeşte bijectiv dacă fiecare vector $\overline{y}$ din $\widetilde{\mathcal{L}}$ este imaginea a unui şi numai a unui vector $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$. Cu alte cuvinte, operatorul este bijectiv dacă fiecare vector are o singură preimagine.

Dacă operatorul $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ este bijectiv, atunci el este *inversabil*, adică posedă operatorul $\varphi\colon \widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$ care acţionează invers în raport cu $f$ în modul următor.

Deoarece pentru fiecare $\overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ există un singur $\overline{x} \in \mathcal{L}$, astfel încât $\overline{x} \mapsto \overline{y}$ sau $\overline{y} = f(\overline{x})$, putem compune o nouă asociere: $\overline{y} \mapsto \overline{x}$, $\forall\, \overline{y} = f(\overline{x}) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, adică operatorul $\varphi$: $\widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$, astfel încât $\overline{x} = \varphi(\overline{y})$. Prin urmare, $\varphi$ satisface egalitatea:

$$\varphi \circ f = \varepsilon,$$

unde $\varepsilon$ – operatorul identic al spaţiului $\mathcal{L}$, care trece fiecare vector $\overline{x}$ al spaţiului $\mathcal{L}$ în sine însuşi. Matricea acestui operator $\varepsilon$ este matricea unitate

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă se efectuează mai întâi operatorul $\varphi$: $\widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$, iar apoi operatorul $f$, atunci exact în acelaşi mod obţinem egalitatea

$$f \circ \varphi = \widetilde{\varepsilon},$$

unde $\widetilde{\varepsilon}$ – operatorul identic al spaţiului $\widetilde{\mathcal{L}}$.

**Definiţie.** Fie dat un operator $f$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$. Operatorul $\varphi$: $\widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$ (dacă există) se numeşte *operatorul invers* al operatorului $f$ şi se notează prin $f^{-1}$, dacă

$$\varphi \circ f = \varepsilon \quad \text{şi} \quad f \circ \varphi = \widetilde{\varepsilon}, \tag{17.1}$$

unde $\varepsilon$ şi $\widetilde{\varepsilon}$ – operatorii identici ai spaţiilor $\mathcal{L}$ şi $\widetilde{\mathcal{L}}$, respectiv. Cu alte cuvinte, pentru fiecare $\overline{x}$ din $\mathcal{L}$ trebuie să fie $\varphi(f(\overline{x})) = \overline{x}$ şi $f(\varphi(\overline{y})) = \overline{y}$ pentru fiecare $\overline{y}$ din $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Operatorul $\varphi$ definit de relaţiile (17.1) este unic. Într-adevăr, dacă $\varphi'$: $\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ e un alt operator, astfel încât $\varphi' \circ f = \varepsilon$, $f \circ \varphi' = \widetilde{\varepsilon}$, atunci, conform teoremei 1.1, obţinem:

$$\varphi = \varepsilon \circ \varphi = (\varphi' \circ f) \circ \varphi = \varphi' \circ (f \circ \varphi) = \varphi' \circ \widetilde{\varepsilon} = \varphi'.$$

Din definiţie rezultă că dacă $\varphi$ este operatorul invers al operatorului $f$, atunci $f$ – operatorul invers al lui $\varphi$. Operatorii $f$ şi $\varphi$ ce satisfac condiţia (17.1) se numesc *reciproc inverşi*.

Din (17.1) rezultă că pentru operatorul inversabil $f$ are loc relaţia:

$$\overline{y} = f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \varphi(\overline{y}) = f^{-1}(\overline{y}).$$

Dacă operatorul $f$ acţionează din $\mathcal{L}$ în $\mathcal{L}$ şi este bijectiv, atunci egalităţile (17.1) se scriu sub forma:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \varepsilon, \tag{17.2}$$

unde $\varepsilon$ – operatorul identic.

Să demonstrăm liniaritatea operatorului invers al unui operator liniar.

▷ Fie $\overline{y}_1$ şi $\overline{y}_2$ vectori arbitrari din $\widetilde{\mathcal{L}}$, iar $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ – unicii vectori din $\mathcal{L}$ ce le corespund lor, pentru care $\overline{y}_1 = f(\overline{x}_1)$, $\overline{y}_2 = f(\overline{x}_2)$. Atunci, luând în consideraţie liniaritatea operatorului $f$, obţinem:

$$f^{-1}(\alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2) = f^{-1}(\alpha f(\overline{x}_1) + \beta f(\overline{x}_2)) =$$

$$= f^{-1}[f(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2)] = (f^{-1} \circ f)(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) =$$

$$= \varepsilon(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 =$$

$$= \alpha f^{-1}(\overline{y}_1) + \beta f^{-1}(\overline{y}_2). \triangleleft$$

Se pune întrebarea: când un operator liniar posedă operatorul invers? Răspunsul urmează din următoarea teoremă.

**Teorema 17.13.** *Ca un operator liniar $f$ să posede operatorul invers, este necesar şi suficient ca acest operator să fie bijectiv.*

▷ *Necesitatea.* Presupunem că operatorul liniar $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ posedă operatorul invers, dar nu este bijectiv. Atunci nu fiecare vector din $\widetilde{\mathcal{L}}$ are preimagine în $\mathcal{L}$ prin operatorul $f$ sau pentru careva vector din $\widetilde{\mathcal{L}}$ această preimagine nu este unică. În primul caz, există un vector $\overline{u}$ din $\widetilde{\mathcal{L}}$ care nu aparţine imaginii operatorului $Imf$, adică $\overline{u} \notin Imf$. Întrucât operatorul $f$ are operatorul invers, avem

$$\overline{u} = (f \circ f^{-1})\overline{u} = f[f^{-1}(\overline{u})] \in Imf,$$

ceea ce contrazice alegerii lui $\overline{u}$. În cazul al doilea, există un vector $\overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ care are două preimagini diferite $\overline{x}_1$ şi $\overline{x}_2$ din $\mathcal{L}$, adică $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq \overline{0}$ şi $\overline{y} = f(\overline{x}_1) = f(\overline{x}_2)$. Dar atunci $f(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0}$ şi fiindcă $f$ posedă operatorul invers, avem

$$f^{-1}[f(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)] = f^{-1}(\overline{0}), \quad (f^{-1} \circ f)(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0},$$
$$\varepsilon(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0}, \quad \overline{x}_1 - \overline{x}_2 = \overline{0}.$$

Dar mai sus am remarcat că $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \neq \overline{0}$. Contrazicerea obţinută demonstrează necesitatea condiţiei teoremei.

*Suficienţa.* Fie că $f$ este un operator bijectiv ce acţionează din $\mathcal{L}$ în $\widetilde{\mathcal{L}}$. Atunci fiecărui element $\overline{y} \in \widetilde{\mathcal{L}}$ îi corespunde un element unic $\overline{x} \in \mathcal{L}$, astfel încât $\overline{y} = f(\overline{x})$. De aceea există operatorul $f^{-1}$ care posedă proprietatea că $f^{-1}(\overline{y}) = f^{-1}(f(\overline{x})) = \overline{x}$. Conform definiţiei, $f^{-1}$ este operatorul invers al operatorului $f$. $\triangleleft$

Se poate demonstra, de asemenea, că această teoremă este adevărată pentru un operator, nu numaidecât liniar.

C o n s e c i n ț ă. *Un operator liniar posedă operatorul invers atunci și numai atunci când acest operator este nedegenerat.*

▷ Rezultă din teoremele 17.11 și 17.13. ◁

Fie că $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ este un operator liniar inversabil, adică posedă operatorul invers $f^{-1}$ ce satisface condițiile (17.1). Atunci, conform teoremei 17.13, operatorul $f$ este bijectiv, iar, în conformitate cu teorema 17.5, dimensiunile spațiilor $\mathcal{L}$ și $\widetilde{\mathcal{L}}$ coincid.

Fie $\{\overline{e}\}$ și $\{\overline{p}\}$ baze fixate în spațiile $\mathcal{L}$ și $\widetilde{\mathcal{L}}$, respectiv. Atunci în cuplul dat de baze operatorilor liniari $f$ și $f^{-1}$ le corespund matricele unice $A$ și $B$, fiind matrice pătratice de același ordin care, conform egalităților (17.1) și teoremei 17.10, satisfac relația $BA = AB = E$, unde $E$ – matricea unitate. Evident, $B$ este matricea inversă a matricei $A$, adică $B = A^{-1}$.

Din aceste egalități rezultă că matricele $A$, $A^{-1}$ și $E$ sunt matrice pătratice de unul și același ordin $n$, unde $n$ – dimensiunea fiecăruia dintre spațiile $\mathcal{L}$ și $\widetilde{\mathcal{L}}$. Prin urmare, egalitățile (17.1) și (17.2) se pot scrie și ca egalități matriceale:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{17.3}$$

Așadar, dacă operatorul liniar inversabil $f$ în cuplul de baze $\{\overline{e}\}$ și $\{\overline{p}\}$ are matricea $A$, atunci operatorul $f^{-1}$ în cuplul de baze $\{\overline{p}\}$ și $\{\overline{e}\}$ are matricea $A^{-1}$.

Pentru a calcula matricea inversă $A^{-1}$ efectiv, se poate aplica metoda eliminării complete a necunoscutelor (a se vedea p. 4.6, cap. 4) sau matricea adjunctă (p. 5.7, cap. 5).

**T e o r e m a 17.14.** *Pentru orice operator liniar nedegenerat $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ cu matricea dată $A$ într-un cuplu de baze ale spațiilor $\mathcal{L}$ și $\widetilde{\mathcal{L}}$ există un singur operator invers cu matricea $A^{-1}$ în cuplul respectiv de baze.*

▷ Într-adevăr, din consecința teoremei 17.13 rezultă că operatorul liniar nedegenerat $f\colon \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ cu matricea $A$ într-un cuplu de baze $\{\overline{e}\}$ și $\{\overline{p}\}$ ale spațiilor $\mathcal{L}$ și $\widetilde{\mathcal{L}}$ posedă operatorul invers $f^{-1}$. Conform celor expuse mai sus, operatorul $f^{-1}$ în cuplul de baze $\{\overline{p}\}$ și $\{\overline{e}\}$ are matricea $A^{-1}$ și totodată $f^{-1}$ este unic. ◁

Se verifică ușor că dacă operatorii liniari $f$ și $g$ sunt bijectivi, atunci produsul lor $g \circ f$ (a se vedea p. 17.1.1 și p. 17.5.2) este un operator liniar bijectiv, pentru care drept operator invers al său servește $f^{-1} \circ g^{-1}$, adică

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{17.4}$$

Aceasta rezultă din teoremele 17.11, 17.12 și din egalitățile:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ [f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})] = g \circ [(f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}] =$$
$$= g \circ (\varepsilon \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \varepsilon,$$

unde $e$ - operatorul identic respectiv.

## Exerciții

1. Fie date coordonatele vectorului $\overline{x}$ într-o baza a spațiului liniar $\mathcal{L}$. Să se clarifice dacă sunt liniari următorii operatori:
   a) operatorul f, care transformă (trece) orice vector $\overline{x}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ în vectorul $f(\overline{x}_1) = \overline{y}_1 = (\alpha_1 - 3\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2)$;
   b) operatorul $\varphi$, care transformă orice vector $\overline{x}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$ în vectorul
   $$f(\overline{x}_1) = (\alpha_1^2, \alpha_1 + \alpha_2);$$
   - c) $f(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{a})\overline{a}$, $\forall \overline{x} \in \mathbf{R}^n$, $\overline{a}$ - vector fixat.
2. Pentru operatorul liniar $f$ din exemplul precedent să se afle matricea sa $A$ în aceeași bază în care sunt date coordonatele vectorilor.
3. Să se afle matricea operatorului liniar $f$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ pentru care $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $f(\overline{x}) = \overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$, $y_3 = x_1$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.
4. Fie $f$: $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ operatorul liniar cu matricea
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Să se afle *Kerf* și *Imf*.
5. Să se demonstreze că operatorul liniar $f$: $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, pentru care $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $f(\overline{x}) = (x_2, x_3, x_1)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, este bijectiv.

# Cuprins

Prefață 3

PARTEA I
ELEMENTE **DE ALGEBRA LINIARĂ**

Capitolul 1. **Mulțimi și aplicații (funcții)** 5
1.1. Noțiunea de mulțime . . . 5
1.1.1. Mulțime, submulțime. Notații (5). - 1.1.2. Simboluri logice (7). -1.1.3. Simbolul £ (sigma) (8).
1.2. Operații cu mulțimi . . . 9
1.2.1. Reuniunea mulțimilor (9). - 1.2.2. Intersecția mulțimilor (10). -1.2.3. Diferența a două mulțimi (11). -1.2.4. Produs cartezian (12).
1.3. Numere reale și mulțimi numerice . . . 13
1.3.1. Noțiuni despre numere reale (13). - 1.3.2. Valoarea absolută a unui număr real (13).
1.4. Metoda inducției matematice . . . 14
1.5. Noțiunea de aplicație (funcție) . . . 15
1.5.1. Definițiile de bază (15). - 1.5.2. Reprezentarea grafică a unei aplicații (17). -1.5.3. Exemple de. aplicații (17). -1.5.4. Noțiunea de funcție (18).
1.6. Moduri de definire a unei aplicații (funcții) . . . 19
1.6.1. Aplicații definite sintetic (19). - 1.6.2. Aplicații definite analitic (21).
1.7. Aplicații injective, surjective, bijective . . . 22
1.7.1. Aplicație injectivă (22). - 1.7.2. Aplicație surjectivă (23). - 1.7.3. Aplicație bijectivă (24). - 1.7.4. Transformare și substituție ale unei mulțimi (25).
1.8. Produs de aplicații . . . 25
1.9. Aplicația inversă . . . 28
1.9.1. Inversarea aplicațiilor (28). - 1.9.2. Funcția inversă (29).
1.10. Graficul unei funcții . . . 30
1.11. Clasificarea mulțimilor. Puterea unei mulțimi . . . 32
1.11.1. Mulțimi finite, num arabile, nenum arabile (32). - 1.11.2. Echivalența a două mulțimi (32).
1.12. Legi de compoziție . . . 33
1.12.1. Noțiunea de lege de compoziție (33). - 1.12.2. Lege de compoziție externă (34).
Exerciții . . . 35

Capitolul 2. **Sisteme** de **ecuații liniare și rezolvarea lor prin** metoda **eliminării complete** 38
2.1. Noțiunea de sistem de ecuații liniare și de soluție a sa . . . 38
**2.1.1. Preliminarii** (38). -2.1.2. Definițiile de bază (39).

2.2. Echivalența sistemelor liniare . . . 43
2.3. Sisteme liniare explicitate . . . 47
2.4. Metoda eliminării complete (metoda Jordan-Gauss) . . . 49
2.5. Tabelele lui Gauss (de sistematizare a calculelor după metoda Jordan-Gauss) . . . 54
2.6. Sisteme de ecuații omogene liniare . . . 68
2.7. Soluții de bază admisibile ale sistemului de ecuații liniare . . . 70
Exerciții . . . 80

Capitolul 3. **Spațiul vectorial «-dimensional $R^n$** **82**
**3.1.** Noțiunea de punct n-dimensionai și de vector «-dimensionai . . . 82
3.2. Operații liniare cu vectori «-dimensionali. Spațiul vectorial *n*-dimensional R" . . . 84
3.3. Produsul scalar a doi vectori . . . 87
3.3.1. Definiția și proprietățile produsului scalar (87).
3.3.2. Lungimea vectorului (88). -3.3.3. Unghiul dintre doi vectori (90).
3.4. Spațiul afin $R^n$. Distanța dintre două puncte . . . 90
3.4.1. Noțiune de spațiu afin n-dimensional $R^n$ (90).-3.4.2. Distanța dintre două puncte (sau doi vectori) în $R^n$ (94).
3.5. Sisteme de vectori. Combinații liniare de vectori și forma vectorială a sistemelor de ecuații liniare . . . 96
3.6. Dependență și independență liniară a vectorilor . . . 99
3.7. Sisteme echivalente de vectori . . . 105
3.7.1. Noțiunea de echivalență a sistemelor de vectori (105).
3.7.2.Transformări elementare asupra unui sistem de vectori (108).
3.8. Bază a unui sistem de vectori. Rangul sistemului . . . 109
3.9. Bază a spațiului aritmetic $R^n$. Dimensiunea spațiului . . . 115
3.10. Subspații ale spațiului R". Bază a unui subspațiu. Dimensiune a subspațiului . . . 120
3.11. Coordonatele vectorului . . . 124
3.12. Transformarea coordonatelor la schimbarea bazei . . . 127
3.13. Sisteme ortogonale de vectori. Procesul de ortogonalizare . . . 130
3.13.1. Sistem ortogonal și ortonormat de vectori (130).
3.13.2. Procesul de ortogonalizare a unui sistem de vectori (132).
Exerciții 136

Capitolul 4. Matrice **137**
4.1. Noțiunea de matrice . . . 137
4.2. Operații liniare cu matrice . . . 140
4.2.1. Egalitatea matricelor (140).
4.2.2. Adunarea și scăderea matricelor (141).
4.2.3. înmulțirea unei matrice cu un scalar (142).
4.3. înmulțirea matricelor . . . 144
4.3.1. Regula de înmulțire a matricelor (144).
4.3.2. Proprietățileoperației de înmulțire a matricelor (146).
4.4. Matricea transpusă a unei matrice . . . 151
4.5. Matricea inversă a unei matrice pătratice . . . 153
4.5.1. Matrice invers abile (153).
4.5.2. Invers abilitat ea produsului matricelor (155).
4.5.3. Inversabilitatea matricei transpuse (155).

4.6. Calcularea matricei inverse **prin** metoda eliminării complete a necunoscutelor,- . . . . . 155
4.7. Matrice-bloc şi operaţii asupra **lor** . . . . . 158
Exerciţii . . . . . 162

Capitolul 5. **Determinanţi** **164**
5.1. Determinanţi de ordinul doi şi trei . . . . . 164
5.1.1. Determinanţi de ordinul doi (164). - 5.1.2. Proprietăţile determinanţilor de ordinul doi (165). - 5.1.3. Determinanţi de ordinul trei (167).-5.1.4. Minor şi complement algebric al unui element (170).
5.2. Definiţia determinantului de ordinul *n* . . . . . 173
5.3. Permutări şi transpoziţii . . . . . 177
5.4. Exprimarea determinantului de ordinul *n* nemijlocit prin elementele sale (evitând minorii) . . . . . 178
5.5. Proprietăţile determinanţilor . . . . . 181
5.6. Calcularea determinanţilor . . . . . 190
5.7. Calcularea inversei unei matrice pătratice nedegenerate cu ajutorul matricei adjuncte . . . . . 193
Exerciţii . . . . . 196

Capitolul 6. **Rangul unei** matrice 198
6.1. Noţiunea de rang al unei matrice . . . . . 198
6.1.1. Rangurile sistemelor de linii şi de coloane ale unei matrice (198). -6.1.2. Transformări elementare ale matricei (202).
6.2. Calcularea rangului unei matrice . . . . . 207
6.3. Condiţiile ca un determinant să fie nul . . . . . 210
Exerciţii . . . . . 212

Capitolul 7. Sisteme **de ecuaţii liniare (teoria generală)** **213**
7.1. Condiţiile de compatibilitate a unui sistem de ecuaţii liniare . . . . 213
7.2. Forma matriceală a sistemelor de ecuaţii liniare şi a soluţiei unui sistem liniar nedegenerat . . . . . 217
7.2.1. Scrierea matriceală a unui sistem de ecuaţii liniare (217). - 7.2.2. Rezolvarea unui sistem liniar nedegenerat prin metoda matriceală (218).
7.3. Formulele lui Cramer de rezolvare a unui sistem de n ecuaţii liniare cu *n* necunoscute (regula lui Cramer) . . . . . 220
7.4. Structura soluţiilor unui sistem omogen . . . . . 224
7.5. Structura soluţiilor sistemelor neomogene . . . . . 234
Exerciţii . . . . . 239

Capitolul 8. **Valori proprii şi vectori proprii** **240**
8.1. Numere complexe . . . . . 240
8.2. Valori proprii şi vectori proprii ai unei matrice . . . . . 241
8.2.1. Noţiunea de valoare proprie şi vector propriu al unei matrice pătratice (241). - 8.2.2. Determinarea vectorilor proprii ai unei matrice (247).

8.3. Valori **proprii şi vectori proprii ai matricelor simetrice** . . . . . **253**
8.4. Matrice ortogonale . . . . . 259
8.5. Vectorii proprii ai matricelor nenegative . . . . . 266
8.5.1. Matrice nenegativa, semipozitivă şi pozitivă (266). - 8.5.2. Proprietăţile valorilor proprii şi ale vectorilor proprii ai unei matrice pozitive (266). - 8.5.3. Matrice reductibilă şi ireductibilă (268). - 8.5.4. Matrice productivă şi stocastică (270).
Exerciţii . . . . . 271

Capitolul 9. **Forme pâtratice** **272**
9.1. Noţiunile de bază. Scrierea matriceală a unei forme pâtratice . . . . 272
9.2. Transformare liniară a variabilelor . . . . . 276
9.3. Modificarea formei pătratice prin intermediul transformării liniare a variabilelor . . . . . 279
9.4. Reducerea formei pâtratice la forma canonică . . . . . **281**
9.5. Reducerea formei pâtratice la forma canonică prin metoda separării succesive a pătratelor complete (metoda lui Lagrange) . . . . . 286
9.6. Legea inerţiei formelor pâtratice reale . . . . . 289
9.7. Forme pâtratice pozitiv definite şi negativ definite . . . . . 292
9.8. Reducerea formei pâtratice la forma canonică cu ajutorul unei transformări ortogonale a variabilelor . . . . . 298
9.8.1. Transformare ortogonală a variabilelor (298). -9.8.2. Despre aducerea unei matrice la forma diagonală (301).
9.9. Aflarea transformării ortogonale care reduce forma pătr atică la forma canonică (la axele principale) . . . . . 305
9.10. Despre aplicarea formelor pâtratice în programarea matematică . . . 309
Exerciţii . . . . . 310

PARTEA A II-A
**ALGEBRĂ** VECTORIALĂ **ŞI GEOMETRIE ANALITICĂ**

Capitolul 10. **Noţiuni** de **algebră vectorială** **313**
10.1. Metoda coordonatelor . . . . . 313
10.2. Coordonate pe linia dreaptă . . . . . 314
10.2.1. Segmente orientate. Mărimea segmentului orientat pe o axă (314). - 10.2.2. Reprezentarea geometrică a numerelor reale prin puncte ale axei de coordonate (316).
10.3. Sistem rectangular de coordonate în plan . . . . . 317
10.4. Distanţa dintre două puncte în plan . . . . . 321
10.5. Sistem rectangular de coordonate în spaţiu . . . . . 322
10.6. Vectori liberi în spaţiu. Operaţii liniare cu vectori . . . . . 323
10.6.1. Mărimi scalare şi vectoriale (323). - 10.6.2. Noţiunea de vector liber (324). - 10.6.3. Adunarea vectorilor geometrici (326). - 10.6.4. înmulţirea unui vector geometric cu un număr (328).
10.7. Proiecţia ortogonală a unui vector pe o axă . . . . . 329
10.8. Coordonatele unui vector în spaţiu. Reper cartezian . . . . . 335
10.8.1. Coordonatele vectorului (335). -10.8.2. Descompunerea vec-

torului în reperul *{O, i,j, k)* (337). - 10.8.3. Modulul vectorului. Cosinusurile directoare ale vectorului (338).
10.9. Operații cu vectori dați prin coordonatele lor. . . . . 340
10.10. împărțirea unui segment într-un raport dat. . . . . 342
10.11. Produs scalar. . . . . 344
10.11.1. Definiția și proprietățile de bază ale produsului scalar (344). - 10.11.2. Produsul scalar al vectorilor dați prin coordonate (346).
10.12. Condițiile de coliniaritate și de perpendicularitate a doi vectori dați prin coordonate. . . . . 347
10.13. Vector perpendicular pe doi vectori dați. . . . . 349
Exerciții. . . . . 351

Capitolul 11. **Linii,** suprafețe și ecuațiile lor 352
11.1. Linii și suprafețe ca locuri geometrice. . . . . 352
11.2. Ecuația unei linii în plan. . . . . 354
11.3. Linii algebrice. . . . . 358
11.4. Ecuațiile unei suprafețe și ale unei linii în spațiu. . . . . 359
11.5. Două probleme de bază ale geometriei analitice. . . . . 360
11.6. Ecuația unei suprafețe cilindrice. . . . . 362
Exerciții. . . . . 364

Capitolul 12. **Dreapta** în plan 365
12.1. Ecuația generală a unei drepte. . . . . 365
12.2. Punctul de intersecție a două drepte. . . . . 368
12.3. Ecuația dreptei ce trece prin punctul dat în direcția dată. . . . . 369
12.4. Ecuația dreptei care trece prin două puncte date. Ecuația dreptei prin tăieturi. . . . . 372
.12.5. Ecuația dreptei cu coeficientul unghiular dat și ordonata inițială . . 374
12.6. Unghiul dintre două drepte. Condițiile de paralelism și de perpendicularitate a două drepte. . . . . 375
12.7. Distanța de la uu punct la o dreaptă. . . . . 378
12.8. Aria unui triunghi în plan. . . . . 379
Exerciții. . . . . 381

Capitolul 13. Planul și dreapta în spațiu 382
13.1. Planul în spațiu. . . . . 382
13.1.1. Vector normal la plan. Vectori coplanari (382). - 13.1.2. Ecuația generală a unui plan (383). - 13.1.3. Ecuația planului ce trece prin punctul dat și este paralel cu doi vectori dați **(384).** - 13.1.4. Ecuația planului care trece prin trei puncte date (386).
13.2. Distanța de la un punct la un plan. . . . . 387
13.3. Dreapta în spațiul R. . . . . 389
13.3.1. Ecuațiile canonice ale unei drepte în spațiu (389). - 13.3.2. Ecuațiile dreptei care trece prin două puncte date (390).
13.4. Probleme referitoare la dreaptă și plan în spațiu . . . . . 391
13.4.1. Dreapta în spațiu ca linia de intersecție a două plane (391). - 13.4.2. Punctul de intersecție a unei drepte cu un plan (393).

- 13.4.3. Unghiul dintre două drepte. Condițiile de paralelism și de perpendicularitate a două drepte (394). - 13.4.4. Unghiul dintre două plane. Condițiile de perpendicularitate și de paralelism a doua plane (397). - 13.4.5. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Condițiile de perpendicularitate și de paralelism a unei drepte cu un plan (399).
13.5. Distanta de la un punct la o dreaptă în spațiu. Aria unui triunghi . 401
13.5.1. Lungimea perpendicularei dintr-un punct pe o dreapta în spațiu (401). - 13.5.2 Aria unui triunghi în spațiu (402).
13.6. Distanța dintre două drepte necoplanare. . . . . 404
Exerciții. . . . . 406

Capitolul 14. **Mulțimi** convexe 407
14.1. Mulțimi de puncte în spațiul *n*-dimensional R™. . . . . 407
14.1.1. Mulțimi de puncte. Definiție (407). - 14.1.2. Noțiunea de vecinătate a unui punct. Definiție (407).-14.1.3. Mulțimi mărginite. Definiție (408).
14.2. Mulțimi închise și deschise în spațiul R". . . . . 408
14.2.1. Puncte interioare și de frontieră ale unei mulțimi din spațiul R" (408). - 14.2.2. Noțiunea de mulțime deschisă și închisă. Definiție (409).
14.3. Dreapta și hiperplanul în $R^n$. . . . . 410
14.4. Mulțimi convexe în spațiul R". . . . . 412
14.4.1. Definiția segmentului în $R^n$ (412). - 14.4.2. Noțiunea de: mulțime convexă. Definiție (414).
14.5. Puncte extreme ale mulțimilor convexe în $R^n$. . . . . 417
14.6. Interpretarea geometrică a soluțiilor admisibile ale unui sistem de ecuații liniare. . . . . 420
14.7. Inecuații liniare cu două variabile și sensul lor geometric. . . . . 425
14.7.1. Despre interpretarea geometrică a unei inecuații cu două variabile (425). - 14.7.2. Semiplane (425).
14.8. Rezolvarea sistemelor de inecuații liniare prin metoda grafică . . . . 427
14.9. Sisteme de inecuații liniare cu *n* variabile. . . . . 434
Exerciții. . . . . 436

Capitolul 15. **Curbe și suprafețe de ordinul doi** 439
15.1. Forma canonică a ecuațiilor curbelor de ordinul doi. . . . . 439
15.1.1. Noțiunea de curbă de ordinul doi (439). - 15.1.2. Curbele de ordinul doi definite prin ecuațiile lor canonice (440).
15.2. Studierea formei curbei de ordinul doi utilizând ecuația canonică a sa. . . . . 440
15.3. Noțiunea de suprafață de ordinul doi. Forma canonică a ecuațiilor suprafețelor de ordinul doi. . . . . 452
15.4. Studierea formei unei suprafețe prin metoda secțiunilor. . . . . 454
Exerciții. . . . . 465

Capitolul 16. Spaţii liniare 468
16.1. Noţiunea de spaţiu liniar . . . 468
16.2. Exemple de spaţii liniare . . . 470
16.3. Subspaţii liniare ale unui-spaţiu . . . 473
16.4. Cele mai simple proprietăţi ale spaţiilor liniare . . . 475
16.5. Combinaţii liniare şi acoperiri liniare . . . 478
16.5.1. Combinaţie liniara de vectori (478). - 16.5.2. Acoperire liniară (479).
16.6. Dependenţă şi independenţă liniară . . . 480
16.7. Echivalenţa sistemelor de vectori. Bazele şi rangul unui sistem de vectori . . . 482
16.8. Bază a unui spaţiu liniar. Dimnsiune a spaţiului . . . 484
16.9. Izomorfismul spaţiilor liniare . . . 488
16.10. Coordonatele vectorului. Operaţii liniare cu vectori daţi prin coordonate . . . 491
16.11. Combinaţii liniare de vectori daţi prin coordonate şi legătura lor cu sistemele de ecuaţii liniare . . . 493
16.12. Trecerea de la o bază la alta. Matricea de trecere . . . 495
16.13. Spaţii euclidiene . . . 496
16.13.1. Definiţia spaţiului euclidian (496). - 16.13.2. Norma vectorului. Unghiul dintre doi vectori (498). - 16.13.3. Bază ortonormată (499).
Exerciţii . . . 500

Capitolul 17. Operatori liniari 503
17.1. Noţiunea de operator liniar . . . 503
17.1.1. Definiţiile de bază (503). - 17.1.2. Exemple de operatori liniari (504). 17.1.3. Imaginea şi nucleul operatorului liniar (506). -17.1.4. Proprietăţile de bază ale operatorilor liniari (507).
17.2. Legătura dintre matrice şi operatorii liniari. Matricea operatorului liniar . . . 509
17.3. Scrierea prin coordonate a unui operator liniar . . . 517
17.4. Modificarea matricei unui operator liniar la substituirea bazelor. Matrice asemenea . . . 521
17.5. Operaţii cu operatori liniari . . . 524
17.5.1. Suma operatorilor şi înmulţirea operatorului cu un număr (524). - 17.5.2. Produsul operatorilor (526). - 17.5.3. Proprietăţile operaţiilor cu operatori liniari (527).
17.6. Operatori liniari nedegeneraţi . . . 528
17.7. Operatorul invers. Condiţia de iiiversabilitate a unui operator liniar 530
Exerciţii . . . 534

Bibliografie 536